

## КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ «ПРИЧИННОСТИ» В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Д. А. Смирнов\*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,  
г. Саратов, Россия

В рамках формализма динамических эффектов направленной связи (ДЭНС) исследованы соотношения современных количественных характеристик связи между колебательными системами (передаточной энтропии, спектра причинности Грейнджера—Гевеке, спектральных ДЭНС и других) и классических теоретико-колебательных определений «связи и связанности по Мандельштаму» на эталонной системе из двух линейных диссипативных стохастических осцилляторов. Показано, что «связанность» имеет два разных смысла, которые выражаются различными ДЭНС. Совокупность ДЭНС оказывается детализацией понятия связанности и позволяет точнее охарактеризовать разнообразные проявления связи в динамике.

### ВВЕДЕНИЕ

Задача о количественной оценке связей между колебательными системами по временным рядам («кто на кого влияет») находится в последние два десятилетия в центре внимания исследователей из различных научных отраслей [1–5], причём интерес лишь растёт в последние годы [6]. Такие связи в англоязычной литературе по прикладной статистике и анализу временных рядов часто называют причинно-следственными (causalities [5–12]), а в нелинейной динамике используют термин «направленные связи» (directional couplings [13]) с тем же происхождением, что и «одно- и двунаправленные связи» между динамическими системами. К настоящему времени на основе идей теории информации, теории случайных процессов, нелинейной динамики и математической статистики независимо предложены десятки количественных характеристик направленной связи (см. ссылки в [14, 15]), хотя их интерпретации и вызывают напряжённые дискуссии [14, 16–19]. Сейчас это большая, динамично развивающаяся область знаний с разнообразными примерами применения в радиофизике [20–23], технических науках [24, 25], нейронауке [1, 4, 26–29], физиологии [5, 30], науке о климате [3, 6, 16, 31–33], экологии [34] и т. д.

В теоретических исследованиях динамических систем, в которых обычно интересуются характеристиками динамического режима в целом, эта тематика не привлекала большого внимания. Здесь известны давние определения «слабой/сильной связи и связанности», данные Мандельштамом [35]. Хотя автор и отмечал, что «здесь нет ещё хорошей терминологии» [35, с. 232], эти термины оказались весьма полезными и активно используются.

Две указанные области — эмпирических характеристик «причинности» и теоретических исследований связанных динамических систем — остаются почти совсем разделёнными. При этом первая из них ещё и разделена внутри себя на многочисленные, используемые независимо друг от друга подходы. Для объединения последних в рамках общей теоретико-колебательной идеологии в недавних работах [14, 15] была предложена идея «динамических эффектов направленной связи» (ДЭНС) и соответствующий формализм. Было показано, что представляющиеся разнородными характеристики связи оказываются вариантами формализации «будущего отклика системы  $X$  на изменение параметров или начального распределения состояний системы  $Y$ », т. е. теми или

\* smirnovda@yandex.ru

иными ДЭНС (см. более 20 их примеров в [15]). Концепция ДЭНС оказалась плодотворной для установления количественных соотношений между такими характеристиками [36–40]. Она сближает область «характеристик причинности» с идеями теории колебаний (динамических систем). Поэтому появляется возможность теснее связать две эти области и выяснить, как соотносятся их основные понятия, что должно дать более содержательную и надёжную интерпретацию эмпирическим характеристикам связи и, возможно, выявить новые аспекты для теоретических исследований динамических систем. Естественным шагом представляется рассмотрение классических условий слабой/сильной связи и связанности для эталонной колебательной системы с точки зрения ДЭНС и поиск их количественных соотношений. Этой задаче и посвящена данная работа.

Далее, в разделе 1, описаны некоторые известные эмпирические характеристики связи (раздел 1.1), формализм ДЭНС (впервые в русскоязычном варианте, раздел 1.2) и их связь (раздел 1.3). В разделе 2 представлены определения связи и связанности по Мандельштаму и эталонная система осцилляторов, на которой проводится исследование характеристик связи. В разделе 3 описаны изучаемые характеристики и метод исследования. Численные результаты даны в разделе 4, обсуждение — в разделе 5, выводы — в разделе 6, детали расчётов и аналитических выкладок — в приложениях 1 и 2.

## 1. «ПРИЧИННОСТИ» В ПРОЦЕССАХ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ СВЯЗЕЙ

### 1.1. Популярны́е характеристики направленных связей по временным рядам

Рассмотрим стационарный процесс  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ , где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — случайные векторы, характеризующие состояния систем  $X$  и  $Y$  в момент времени  $t$ . В практической постановке обычно дан участок временной реализации в дискретном времени — временной ряд — и нужно определить, есть ли направленная связь  $Y \rightarrow X$  (чаще всего имеется в виду влияние настоящего  $Y$  на будущее  $X$ ) и насколько она сильна. То же относится и к связи  $X \rightarrow Y$ .

В настоящее время одной из самых широко используемых характеристик направленной связи является передаточная энтропия (ПЭ; transfer entropy) [41]. Её вариантам и применениям посвящено множество статей (см., например, [2, 42–44] и ссылки в [39]) и монография [45]. Она введена в [41] для марковского процесса первого порядка, в котором текущее состояние  $(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*)$  однозначно определяет будущие распределения вероятностей. Обозначим  $p_{XY}^{\text{st}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  стационарную плотность распределения одновременных  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . При наличии связи  $Y \rightarrow X$  будущее (в момент  $t + \tau$ ) распределение  $p_{X|XY}^{(\tau)}(\mathbf{x}_{t+\tau} | \mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*)$  при заданном  $\mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*$  отличается от распределения  $p_{X|X}^{(\tau)}(\mathbf{x}_{t+\tau} | \mathbf{x}_t^*)$  при заданном лишь  $\mathbf{x}_t^*$ . В эксперименте первое распределение можно оценить по временному ряду в стационарном режиме, выбирая из него значения  $\mathbf{x}_{t+\tau}$  при всех таких  $t$ , что  $\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t$  близко к  $\mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*$ , а второе — при всех таких  $t$ , что  $\mathbf{x}_t$  близко к  $\mathbf{x}_t^*$ . Дальнейшие комментарии об анализе рядов и «появлении» распределений в определениях мер связи даны в разделе 5. Различия  $p_{X|XY}^{(\tau)}$  и  $p_{X|X}^{(\tau)}$  измеряют разностью их (дифференциальных) энтропий Шеннона, усредняя которую по  $(\mathbf{x}_{t+\tau} | \mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*)$  с плотностью  $p_{XY}^{\text{st}}$ , получают ПЭ  $T_{Y \rightarrow X}^{(\tau)}$ . Полагая для удобства  $t = 0$  и обозначая  $(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{y}_t^*) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , можно записать

$$T_{Y \rightarrow X}^{(\tau)} = \int p_{XY}^{\text{st}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \left\{ H[p_{X|X}^{(\tau)}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0)] - H[p_{X|XY}^{(\tau)}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)] \right\} d\mathbf{x}_0 d\mathbf{y}_0, \quad (1)$$

где  $H(p) = - \int p(\mathbf{x}) \ln p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Положительная величина ПЭ означает уменьшение неопределённости будущего  $\mathbf{x}_\tau$  при учёте  $\mathbf{y}_0$ , т. е. наличие зависимости  $\mathbf{x}_\tau$  от  $\mathbf{y}_0$  при заданном  $\mathbf{x}_0$ .

Задавая условные распределения в (1) при условии всего прошлого  $\mathbf{x}_t$  и  $(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t)$ , а не только при значениях в момент  $t = 0$ , получают «ПЭ с бесконечной историей» (её соотношение с ПЭ (1) исследовано в [39]). Если такие условные распределения различаются, то говорят, что имеет место «причинность по Грейнджеру»  $Y \rightarrow X$  [9]. Передаточная энтропия с бесконечной историей — вариант её формализации и тоже часто называется характеристикой причинности. Другой вариант для одномерного процесса  $x_t$  основан на разности условных дисперсий [7, 8], так что характеристика связи — среднеквадратичное улучшение прогноза  $x$  при учёте прошлых  $y$ . Для векторных процессов  $\mathbf{x}$  берут разность обобщённых условных дисперсий — определителей матриц ковариаций [46]. Для гауссовых процессов ПЭ равна половине логарифма отношения обобщённых дисперсий [47]. Это логарифмическое улучшение прогноза (с бесконечной историей) было представлено как интеграл по частоте от неотрицательной функции [10], которую позже назвали «спектром причинности Грейнджера—Гевеке». Формализм основан на строгих математических результатах [48, 49] и получил широкое применение при анализе временных рядов, в частности в нейроимиджинге. Так, в обзорной статье [29] он упоминается в одном ряду с такими инструментами, как электро- и магнитоэнцефалография, а также томография на основе ядерного магнитного резонанса. При этом интерпретация «спектра причинности» как «силы связи» сталкивается с трудностями. Так, указано [17], что он не отражает резонансных свойств систем, что привело к острой дискуссии [17–19]. В [38] приведён единый подход к анализу и интерпретации различных спектральных характеристик связи с точки зрения динамических систем, описанной ниже.

## 1.2. Динамические эффекты направленной связи

Для характеристики связей в стохастических динамических системах в [14, 15] введены понятие и формализм динамических эффектов направленной связи (ДЭНС). «Динамический эффект» означает, что от связи зависит динамика систем, тогда как для связей статических величин используют термин «causal effect» [11] — «причинный эффект» или «действие». Аппарат стохастических динамических систем [50, 51] широко используется в последние годы при решении и прямых [52–55], и обратных [56, 57] задач теории колебаний. Стохастическая динамическая система, состоящая из подсистем  $X$  и  $Y$  (например, связанные осцилляторы в разделе 2), понимается в [15] и здесь как марковская случайная динамическая система [58], т. е. по известному начальному состоянию  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  однозначно определяются распределения вероятностей будущих состояний  $p_{XY}^{(t)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  с  $t > 0$  — это эволюция ансамбля с начальным распределением  $p_{XY}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Произвольному начальному распределению  $p_{XY}^{(0)}$  однозначно соответствует будущее  $p_{XY}^{(t)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , задаваемое оператором  $L_{XY}^{(t)}$ :

$$p_{XY}^{(t)} = L_{XY}^{(t)}(p_{XY}^{(0)}). \quad (2)$$

Примерами являются стохастические дифференциальные уравнения, для которых оператор (2) есть решение уравнения Фоккера—Планка [58, 59], и вообще марковские случайные процессы [60]. В физических моделях вида (2) эволюция обычно зависит и от вектора постоянных параметров  $\mathbf{a}$ , содержащего индивидуальные параметры  $\mathbf{a}_X, \mathbf{a}_Y$  (например, собственные частоты, параметры диссипации, интенсивности шума в осцилляторах в разделе 2) и параметры связи  $\mathbf{a}_{XY}, \mathbf{a}_{YX}$  (например, коэффициенты связи между осцилляторами в разделе 2), т. е. влияние  $Y \rightarrow X$  есть лишь при  $\mathbf{a}_{XY} \neq 0$ , а  $X \rightarrow Y$  — при  $\mathbf{a}_{YX} \neq 0$ . Будущее  $p_{XY}^{(t)}$  зависит от совокупности  $\theta = \{p_{XY}^{(0)}, \mathbf{a}\}$ , которая названа обобщённым начальным условием в [15]. Начальное  $p_{XY}^{(0)}$  может зависеть от своих параметров  $\lambda$ , например от  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  при  $p_{XY}^{(0)} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$ . Поэтому обозначим  $p_{XY}^{(0)} = \rho_{XY, \lambda}$ , где  $\rho_{XY, \lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_{X, \lambda}(\mathbf{x})\rho_{Y|X, \lambda}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ , и  $\theta_\lambda = \{\rho_{XY, \lambda}, \mathbf{a}\}$ .

Наличие влияния  $Y \rightarrow X$  означает, что какое-либо будущее распределение  $x$  зависит от « $Y$ -компоненты» обобщённого начального условия, т. е. от  $\{\rho_{Y|X,\lambda}, \mathbf{a}_Y, \mathbf{a}_{XY}\}$ , при заданной « $X$ -компоненте», т. е.  $\{\rho_{X,\lambda}, \mathbf{a}_X, \mathbf{a}_{YX}\}$ . Изменение этой  $Y$ -компоненты при заданной  $X$ -компоненте названо в [15] « $Y$ -шевелением» обобщённого начального условия (аналог «интервенции» для статических величин [11]). Оно обозначено упорядоченной парой  $(\theta_\lambda^*, \theta_\lambda^{**})$  — изменением от опорного начального условия  $\theta_\lambda^* = \{\rho_{X,\lambda}^*, \rho_{Y|X,\lambda}^*, \mathbf{a}_X^*, \mathbf{a}_{YX}^*, \mathbf{a}_Y^*, \mathbf{a}_{XY}^*\}$  до альтернативного  $\theta_\lambda^{**} = \{\rho_{X,\lambda}^{**}, \rho_{Y|X,\lambda}^{**}, \mathbf{a}_X^*, \mathbf{a}_{YX}^*, \mathbf{a}_Y^{**}, \mathbf{a}_{XY}^{**}\}$ . Обозначим распределение  $\mathbf{x}$  в будущий момент  $t$  (время отклика) при данном  $\theta_\lambda^*$  через  $p_{X,\theta_\lambda^*}^{(t)}$ , а при данном  $\theta_\lambda^{**}$  — через  $p_{X,\theta_\lambda^{**}}^{(t)}$ . Упорядоченная пара  $(p_{X,\theta_\lambda^*}^{(t)}, p_{X,\theta_\lambda^{**}}^{(t)})$  — это  $X$ -отклик в момент  $t$  на  $Y$ -шевеление  $(\theta_\lambda^*, \theta_\lambda^{**})$ . Различие распределений в отклике измеряется с помощью любого непрерывного функционала  $D(p_{X,\theta_\lambda^*}^{(t)}, p_{X,\theta_\lambda^{**}}^{(t)})$ , который равен нулю,  $D(p, q) = 0$ , при равенстве аргументов  $p \equiv q$  и может быть отличен от нуля при  $p \neq q$ . В [15] он назван функционалом различия, а каждое его значение — элементарным ДЭНС  $Y \rightarrow X$ , т. к. он характеризует отклик на одно  $Y$ -шевеление  $(\theta_\lambda^*, \theta_\lambda^{**})$ . Для характеристики откликов на многие  $Y$ -шевеления надо усреднить или иначе обработать (например, взять максимум [14]) — «собрать» элементарные ДЭНС  $D(p_{X,\theta_\lambda^*}^{(t)}, p_{X,\theta_\lambda^{**}}^{(t)}) = f(\lambda)$  по некоторому множеству  $\Lambda$  значений  $\lambda$ . Итоговая характеристика — это ДЭНС  $C_{Y \rightarrow X}^{(t)}$ , который даётся непрерывным функционалом  $A_\Lambda[f(\lambda)]$  — функционалом сборки [15], определённым на пространстве непрерывных функций  $f(\lambda)$  аргумента  $\lambda \in \Lambda$ :

$$C_{Y \rightarrow X}^{(t)} = A_\Lambda \left[ D(p_{X,\theta_\lambda^*}^{(t)}, p_{X,\theta_\lambda^{**}}^{(t)}) \right]. \quad (3)$$

В  $\Lambda$  можно включить и параметры  $\mathbf{a}$ . Может зависеть от своих параметров и функционал  $D$ . Сборка может проводиться и по всем ним [15]. В данной работе это не требуется, поэтому более общие обозначения («тройные скобки» в [15]) не используются здесь для упрощения.

### 1.3. Примеры динамических эффектов направленной связи

Как показано в [15], многочисленные известные характеристики направленной связи являются частными случаями (3), т. е. ДЭНС  $Y \rightarrow X$  с теми или иными  $Y$ -шевелениями  $(\theta_\lambda^*, \theta_\lambda^{**})$ , временем отклика  $t$ , функционалами различия  $D$  и сборки  $A_\Lambda$ . Так, ПЭ  $T_{Y \rightarrow X}^{(\tau)}$  в (1) — это ДЭНС с  $\rho_{XY,\lambda}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$  и  $\rho_{XY,\lambda}^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)p_{Y|X}^{\text{st}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_0)$ , где  $p_{Y|X}^{\text{st}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  — условная стационарная плотность распределения (см. комментарий в разделе 5),  $\lambda = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  при фиксированном  $\mathbf{a}$ , время отклика  $t = \tau$ , функционал различия — разность энтропий Шеннона, сборка — среднее по стационарному распределению  $A_\Lambda[f(\lambda)] = \int p_{XY}^{\text{st}}(\lambda) f(\lambda) d\lambda$ . При  $t$  порядка некоторого характерного масштаба связанной системы достигается максимум ПЭ [14, 36, 37], так что  $T_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} = \max_{t>0} T_{Y \rightarrow X}^{(t)}$  является «умеренно краткосрочным» ДЭНС. При единственном стационарном распределении  $p_X^{\text{st}}$  обе компоненты  $t$ -отклика  $X$  приближаются к  $p_X^{\text{st}}$  при  $t \rightarrow \infty$ , а ПЭ (которая становится долгосрочным ДЭНС) — к нулю.

Долгосрочный ДЭНС  $Y \rightarrow X$  вполне может быть ненулевым, если  $Y$ -шевеление проводится по параметрам  $\mathbf{a}^* \neq \mathbf{a}^{**}$ . Тогда  $p_X^{\text{st}}$  при этих двух значениях параметров могут различаться. Таким долгосрочным ДЭНС является  $S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}}(1)$  — изменение стационарной дисперсии  $X$  при «включении» связи  $Y \rightarrow X$  (см. раздел 3), т. е. при  $Y$ -шевелении  $(\mathbf{a}_{XY}^* = 0, \mathbf{a}_{XY}^{**} \neq 0)$  [36, 37, 39]. Далее, можно характеризовать будущую динамику  $X$  и на целом интервале времени. Для этого следует лишь понимать  $t$  в (3) как множество времён отклика  $\{t_1, t_2, \dots\}$  — распределённый временной горизонт [15]. Рассмотрим хорошо разрешённый по времени, достаточно длинный участок реализации  $X$  в моменты  $\{t_1, t_2, \dots\}$  в удалённом будущем, стационарную многомерную (т. е. для

моментов  $\{t_1, t_2, \dots\}$ ) плотность распределения и фурье-образ её второго момента — спектральную плотность мощности. Определяя функционал различия через различие спектральных плотностей  $X$  при разных  $Y$ -шевелениях, получим разные спектральные ДЭНС  $Y \rightarrow X$ . Таковым оказывается и спектр причинности Грейнджера—Гевеке [38]. Формулы для некоторых из этих долгосрочных ДЭНС приведены в разделе 3.

## 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: СВЯЗЬ И СВЯЗАННОСТЬ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Известные теоретико-колебательные понятия связи и связанности были введены в [35] для двунаправлено связанных линейных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma_X \dot{x} + \omega_X^2 x &= k_{XY} y + \xi_X(t), \\ \ddot{y} + 2\gamma_Y \dot{y} + \omega_Y^2 y &= k_{YX} x + \xi_Y(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x$  и  $y$  — динамические переменные,  $\gamma_X$  и  $\gamma_Y$  — параметры диссипации,  $k_{XY} > 0$  и  $k_{YX} > 0$  — коэффициенты связи,  $\omega_X$  и  $\omega_Y$  — парциальные частоты осцилляторов,  $\xi_X$  и  $\xi_Y$  — взаимно независимые белые шумы с нулевым средним и автоковариационными функциями  $\langle \xi_X(t) \xi_X(t') \rangle = \Gamma_X \delta(t-t')$  и  $\langle \xi_Y(t) \xi_Y(t') \rangle = \Gamma_Y \delta(t-t')$ , угловые скобки означают усреднение по ансамблю, точка означает производную по времени  $t$ ,  $\Gamma_X$  и  $\Gamma_Y$  — интенсивности шумов.

В [35] рассматривались нулевые шумы и нулевая диссипация, при этом решение (3) есть  $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$  и  $y(t) = n_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + n_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ , где  $C_1, \phi_1, C_2, \phi_2$  определяются начальным состоянием,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — нормальные частоты колебаний (мод),  $n_1, n_2$  — коэффициенты их «распределения» по осцилляторам [35, с. 232]. Вопрос о силе связи в [35, с. 233] был таким: «нас интересует, получится ли сильное взаимодействие», и ответ был следующим. При условии «слабой связанности»  $k \ll |\omega_X^2 - \omega_Y^2|$  (здесь и далее используется обозначение  $k^2 = k_{XY} k_{YX}$ ) имеем  $|n_1| \ll 1, |n_2| \gg 1$ , так что при начальных состояниях с примерно равными энергиями осцилляторов каждый колеблется почти так, как если бы другого не было:  $x(t) \approx C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$  и  $y(t) \approx n_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ , т.е. взаимодействие «слабое». При нарушении этого условия в колебаниях каждого осциллятора присутствуют обе гармонических компоненты. Если при этом задаётся нулевое начальное состояние системы и выводится из равновесия один осциллятор, то второй имеет сначала малую амплитуду колебаний, но по истечении времени  $\pi/|\omega_1 - \omega_2|$  большая доля энергии первого осциллятора передаётся второму, а ещё через такое же время восстанавливаются исходные энергии осцилляторов, т.е. имеется амплитудная модуляция с периодом  $2\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ . При равных парциальных частотах передаётся вся энергия.

Условие «слабой связи» в [35, с. 233] имеет вид  $k_{XY} \ll \omega_X^2$  и должно означать, что связь  $Y \rightarrow X$  слабо влияет на осциллятор  $X$ . При  $x$  и  $y$  одного порядка оно определяет малость члена  $k_{XY} y$  по сравнению с  $\omega_X^2 x$  в (4). Но согласно [35, с. 233] «это мало что даёт, т.к. не это характеризует явления». При «слабой связи» может быть «сильная связанность».

Отметим, что «сильная связанность» в представленных выше формулировках из [35] имеет два смысла. Во-первых, значимо проявляются две гармонических компоненты в колебаниях каждого осциллятора, а не одна. Это спектральный смысл, который должен количественно отражаться каким-либо спектральным ДЭНС. Во-вторых, будущее осциллятора  $X$ , удалённое на время порядка  $\pi/|\omega_1 - \omega_2|$ , сильно зависит от начального состояния  $Y$ . Но такую зависимость отражает и ПЭ (1), см. также конец приложения 2. Значит, большая величина ПЭ — это вариант условия сильной связанности во втором смысле. Для детерминированной системы в [35] оба смысла совпадают. Однако свойства системы (4) с ненулевыми шумами и диссипацией богаче. В ней сохраняются колебательные черты исходной задачи и есть единственное стационарное

распределение состояний, так что корректно определяются ПЭ и спектральные ДЭНС, которые можно соотнести с условиями слабой связи и связанности.

### 3. МАТЕРИАЛ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Для системы (4) ниже рассчитываются ПЭ, четыре спектральных ДЭНС и ДЭНС по стационарной дисперсии. Как показано в [38], для системы (4) спектр причинности Грейнджера–Гевеке есть  $\ln[1 + G_{Y \rightarrow X}(\omega)]$ , где  $G_{Y \rightarrow X}(\omega)$  — это спектральный ДЭНС  $Y \rightarrow X$  при включении шума  $\xi_Y$ , т. е. при весьма специфическом  $Y$ -шевелении ( $\Gamma_Y^* = 0$ ,  $\Gamma_Y^{**} \neq 0$ ):

$$G_{Y \rightarrow X}(\omega) = \frac{W_X(\omega) - W_{X|\Gamma_Y=0}(\omega)}{W_{X|\Gamma_Y=0}(\omega)}. \quad (5)$$

Здесь  $W_X(\omega)$  — спектральная плотность мощности  $x(t)$  при данных параметрах,  $W_{X|\Gamma_Y=0}(\omega)$  — то же, но при  $\Gamma_Y = 0$  и прочих тех же параметрах. Функционал различия — это относительная разность спектральных плотностей, а сборка тривиальна — одно  $Y$ -шевеление. В приложениях обычно определяют максимум  $G_{Y \rightarrow X}^{\max} = \max_{\omega \geq 0} G_{Y \rightarrow X}(\omega)$ .

Более интересной по сравнению с  $G_{Y \rightarrow X}(\omega)$  характеристикой может быть спектральный ДЭНС при включении связи  $Y \rightarrow X$  [38], т. е. для  $Y$ -шевеления ( $k_{XY}^* = 0$ ,  $k_{XY}^{**} \neq 0$ ):

$$S_{Y \rightarrow X}(\omega) = \frac{W_X(\omega) - W_{X|k_{XY}=0}(\omega)}{W_{X|k_{XY}=0}(\omega)}. \quad (6)$$

Другая нормировка рассмотрена в [61]. При ненулевой связи в системе (4) есть два максимума  $S_{Y \rightarrow X}(\omega)$  (см. рис. 1, красные линии). Обозначим  $S_{Y \rightarrow X}^{\max}$  глобальный максимум (вблизи частоты несвязанного осциллятора  $Y$  на рис. 1а и в) и  $S_{Y \rightarrow X}^{\min}$  локальный минимум (вблизи частоты несвязанного осциллятора  $X$ ). Отрицательная величина  $S_{Y \rightarrow X}^{\min} = -1 + 1/N$  означает локальное снижение спектральной мощности в  $N$  раз, а большое  $N$  означает заметное смещение основного максимума  $W_X(\omega)$  по частоте при включении связи  $Y \rightarrow X$ . Наличие второго (локального) максимума  $S_{Y \rightarrow X}(\omega)$  ещё не означает появления значимого второго максимума  $W_X(\omega)$ , так что введём специальные ДЭНС, отражающие именно последнюю роль связи.

Во-первых, определим «чёткость» второго максимума  $R_X$  через отношение его величины  $W_X$  к величине локального минимума  $W_X^{\min}$ :  $R_X = (W_X^{\max,2}/W_X^{\min}) - 1$ . Оно равно единице, если второй максимум вдвое выше минимума. ДЭНС по чёткости второго максимума  $W_X$  при включении связи  $Y \rightarrow X$  тогда определим как

$$R_{Y \rightarrow X} = R_X - R_{X|k_{XY}=0}. \quad (7)$$

При единственном максимуме  $W_X(\omega)$  доопределим  $R_X = 0$ , так что для системы (4) имеем  $R_{X|k_{XY}=0} = 0$  и  $R_{Y \rightarrow X} = R_X$ . Во-вторых, важна высота второго максимума относительно глобального  $r_X = W_X^{\max,2}/W_X^{\max,1}$ . Определим ДЭНС  $Y \rightarrow X$  по этой относительной высоте:

$$r_{Y \rightarrow X} = r_X - r_{X|k_{XY}=0}. \quad (8)$$

При единственном максимуме  $W_X(\omega)$  доопределим  $r_X = 0$ , так что для системы (4) имеем  $r_{X|k_{XY}=0} = 0$  и  $r_{Y \rightarrow X} = r_X$ . Сильная связанность в первом смысле (выше) соответствует чёткому и высокому второму максимуму  $W_X$ , т. е., например, с  $R_{Y \rightarrow X} \geq 1$  и  $r_{Y \rightarrow X} \geq 0,5$ .

ДЭНС  $Y \rightarrow X$  по стационарной дисперсии при включении связи определяется как  $S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}} = (\sigma_X^2 - \sigma_{X|k_{XY}=0}^2)/\sigma_{X|k_{XY}=0}^2$  [36, 37, 39], где функционал различия — относительная разность

Таблица 1. Пороговые  $k$  и ДЭНС  $Y \rightarrow X$  для системы (4) при  $\omega_X^2 = 1,2$ ,  $\omega_Y^2 = 0,8$ ,  $\gamma = 0,01$ . Частота  $G_{Y \rightarrow X}^{\max}$  равна 0,894, частота  $S_{Y \rightarrow X}^{\max}$  близка к частоте левого максимума  $W_X$ , частота  $S_{Y \rightarrow X}^{\min}$  близка к 1,09

Величина	$k_0$	$k_R$	$k_T$	$k_r$	$k_{\text{var}}$
$k$	0,007	0,026	0,072	0,265	0,70
$R_{Y \rightarrow X}$	0,00005	<b>1,0</b>	7,3	95	500
$T_{Y \rightarrow X}^{\max}$	0,005	0,06	<b>0,40</b>	1,7	2,7
$r_{Y \rightarrow X}$	0,0035	0,009	0,05	<b>0,5</b>	0,3
$S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}}$	0,00005	0,0007	0,005	0,07	<b>1,0</b>
$G_{Y \rightarrow X}^{\max}$	0,15	2,0	16	220	1 500
$S_{Y \rightarrow X}^{\max}$	0,15	2,0	16	210	2 900
$S_{Y \rightarrow X}^{\min}$	-0,006	-0,076	-0,45	-0,99	-0,999

дисперсий, а сборка тривиальна. В качестве основной ситуации ниже принята следующая:  $\gamma_X = \gamma_Y = \gamma > 0$ ,  $\Gamma_X = \Gamma_Y = \Gamma > 0$ ,  $k_{XY} = k_{YX} = k \geq 0$ . Тогда (см. приложение 2)

$$S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}} = \frac{k^2}{\omega_X^2 \omega_Y^2 - k^2}. \quad (9)$$

Ниже для случаев различных и одинаковых парциальных частот рассчитывались спектральные ДЭНС  $Y \rightarrow X$  на основе аналитической формулы для  $W_X$  (см. приложение 1). Передаточная энтропия при различных  $t$  находилась путём решения системы линейных дифференциальных уравнений (см. приложение 2). Для всех расчётов при каждой расстройке частот (от 0 до 0,2) и каждом  $\gamma$  (от 0,01 до 0,2 с шагом 0,01)  $k$  менялся от 0 до примерно 1 с шагом 0,005 (в ряде случаев расчёты уточнялись с шагом 0,001 и менее). С ростом  $k$  изменяются (сначала растут) все рассматриваемые ДЭНС. Ниже определялись характерные значения  $k$ , при которых пересекал свой «порог» тот или иной ДЭНС: 1)  $k = k_0$  — появление второго максимума (точнее, точки перегиба) на зависимости  $W_X(\omega)$ ; 2)  $k = k_R$  — достижение  $R_{Y \rightarrow X} = 1$  (чёткий второй спектральный максимум  $x$ ); 3)  $k = k_T$  — достижение  $T_{Y \rightarrow X}^{\max} = 0,4$  (велика ПЭ, см. приложение 2); 4)  $k = k_r$  — достижение  $r_{Y \rightarrow X} = 0,5$  (высокий второй спектральный максимум  $x$ ); 5)  $k = k_{\text{var}}$  — достижение  $S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}} = 1$ . Они сопоставлялись со значениями  $k_1$  и  $k_2$ , при которых член связи в (4) сравнивается с членом диссипации и возвращающей силой при некоторых характерных  $x$  и  $y$  (см. приложение 2). Приближённые формулы для различных ДЭНС и пороговых  $k$  в крайних случаях найдены в приложениях. Так же рассчитывались ДЭНС  $X \rightarrow Y$ .

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При ненулевой расстройке и малом  $\gamma/|\omega_X - \omega_Y|$  пороговые  $k$  располагаются в определённой последовательности. Приближённые оценки  $k_0 \approx 3,5\gamma\omega_Y \sqrt{\gamma/|\omega_X - \omega_Y|}$ ,  $k_R \approx 2\gamma\omega_Y$ ,  $k_T \approx 3,5\gamma\omega_Y \sqrt{|\omega_X - \omega_Y|/\gamma}$ ,  $k_r \approx 1,4\omega_Y |\omega_X - \omega_Y|$ ,  $k_{\text{var}} = \omega_X \omega_Y / \sqrt{2}$  сильно различаются:

$$k_0/k_R \propto k_R/k_T \propto k_T/k_r \propto \sqrt{\gamma/|\omega_X - \omega_Y|} \ll 1, \quad k_r/k_{\text{var}} \propto |\omega_X - \omega_Y|/\omega_X \ll 1. \quad (10)$$

Рисунок 1 и табл. 1 иллюстрируют случай  $\gamma = 0,01$ ,  $\omega_X^2 = 1,2$ ,  $\omega_Y^2 = 0,8$ , где величина  $\sqrt{\gamma/|\omega_X - \omega_Y|} \approx 0,22$  умеренно мала. С ростом  $k$  сначала, при  $k = k_0$ , появляется почти на частоте  $\omega_Y$  второй спектральный максимум  $x$ , который «слит» с минимумом ( $R_{Y \rightarrow X} = 0$ ) и сколь угодно ниже основного ( $r_{Y \rightarrow X} \approx 0,004$  в табл. 1). При  $k = k_R \gg k_0$  второй (левый) максимум

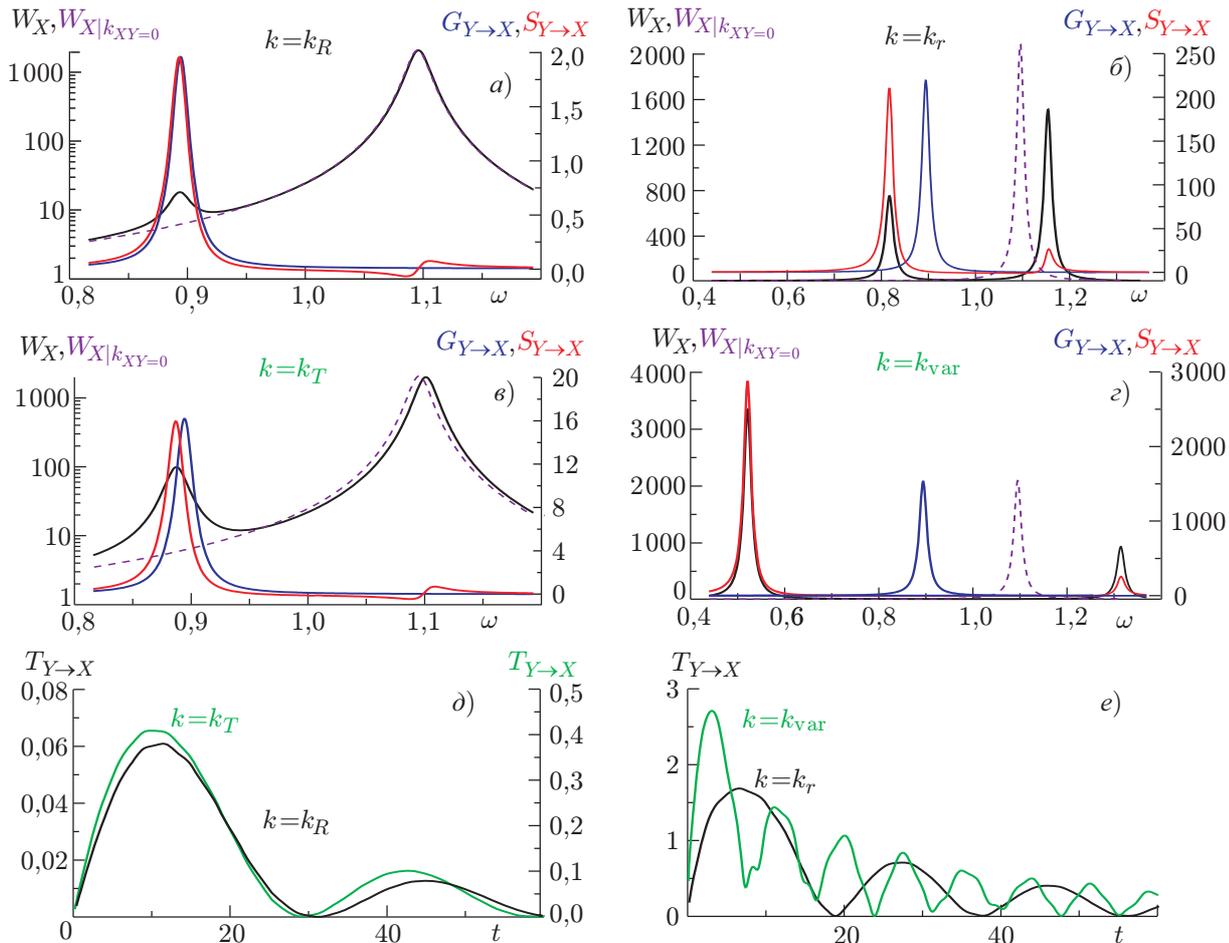


Рис. 1. Характеристики системы (4) при  $\gamma = 0,01$ ,  $\omega_X^2 = 1,2$ ,  $\omega_Y^2 = 0,8$ ,  $\Gamma = 1$ : (a–d) спектральные плотности  $W_X(\omega)$  (сплошные чёрные линии),  $W_X|_{k_{XY}=0}(\omega)$  (штриховые фиолетовые линии), спектральные ДЭНС  $G_{Y \rightarrow X}(\omega)$  (синие линии),  $S_{Y \rightarrow X}(\omega)$  (красные линии) при  $k = k_R = 0,026$  (a),  $k = k_r = 0,265$  (б),  $k = k_T = 0,072$  (в),  $k = k_{var} = 0,7$  (г); (д, е) ПЭ при  $k = k_R$  и  $k = k_T$  (д),  $k = k_r$  и  $k = k_{var}$  (е)

становится чётким ( $R_{Y \rightarrow X} = 1$ ). Таблица 1 даёт  $k_R = 0,026 \approx 3\gamma\omega_Y$  и  $G_{Y \rightarrow X}^{max} \approx S_{Y \rightarrow X}^{max} \approx 1,8$ , что по порядку величин соответствует асимптотическим оценкам  $k_R \approx 2\gamma\omega_Y$  и  $G_{Y \rightarrow X}^{max} \approx S_{Y \rightarrow X}^{max} \approx 1$ . При этом ещё малы  $T_{Y \rightarrow X}^{max} \approx 0,06$  и  $r_{Y \rightarrow X} \approx 0,01$ .

Затем ПЭ достигает 0,4 при  $k = k_T \approx 0,07$ , что соответствует «сильной связанности по Мандельштаму» во втором смысле. При этом ДЭНС по чёткости второго спектрального максимума велик ( $R_{Y \rightarrow X} \approx 7$ ), а ДЭНС по его относительной высоте ещё мал ( $r_{Y \rightarrow X} \approx 0,05$ ), т.е. всё же слаба связанность в первом смысле. Однако при этом уже почти в два раза снижается мощность вблизи частоты несвязанного осциллятора X:  $S_{Y \rightarrow X}^{min} = -0,45$ , т.е. основной (правый) максимум  $W_X$  заметно смещается по частоте (и  $S_{Y \rightarrow X}^{min} = -0,66$  уже при  $k = 0,1$ ).

При  $k = k_r \approx 0,27$  второй (левый) максимум  $W_X$  достигает 0,5 от основного, т.е. сильна связанность в первом смысле. При этом велики значения  $T_{Y \rightarrow X}^{max} \approx 2$  и  $R_{Y \rightarrow X} \approx 100$  (см. табл. 1). При дальнейшем росте  $k$  второй (левый) спектральный максимум  $x$  сравнивается по высоте с первым (при  $k \approx 0,4$  для условий табл. 1), после чего становится основным, а затем и превосходит правый в два раза при  $k = k_r^* \approx 0,56$ . При  $k = k_{var} \approx 0,7$  достигает единицы ДЭНС по стационарной дисперсии, который был мал для предыдущих пороговых  $k$ .

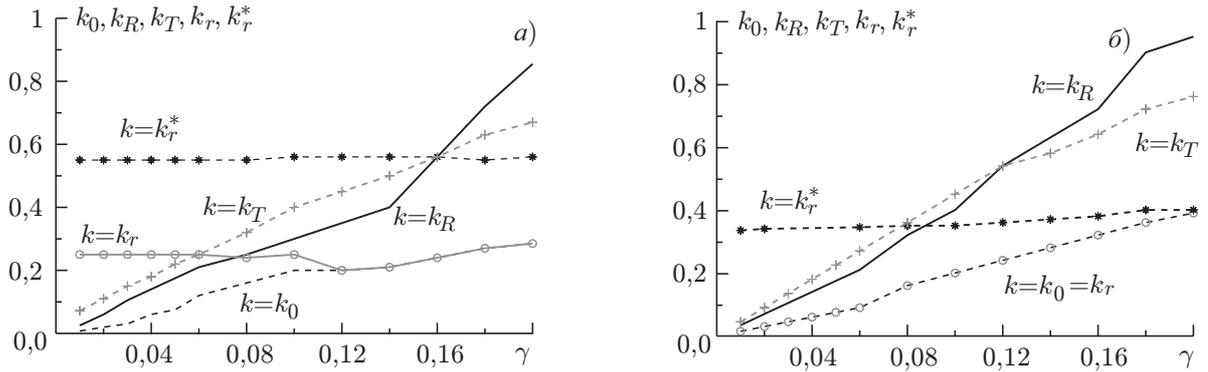


Рис. 2. Пороговые значения  $k$  в зависимости от  $\gamma$  для системы (4) при  $\omega_X^2 = 1,2, \omega_Y^2 = 0,8$ : (а) и  $\omega_X = \omega_Y = 1$  (б). Штриховые чёрные линии —  $k_0$ , сплошные чёрные —  $k_R$ , штриховые серые —  $k_T$ , сплошные серые с кружками —  $k_r$ , штриховые чёрные со звездочками —  $k_r^*$

Возможны и «непосредственные» характеристики связи  $Y \rightarrow X$ , т.е. тоже нулевые для нулевого  $k_{XY}$ , но определённые через члены уравнения (4) и не отражающие влияния связи на динамику связанной системы. Таковы отношения члена связи к диссипации и к возвращающей силе по дисперсии в режиме «разомкнутой цепи» (приложение 2). Они составляют  $k^2/(4\gamma^2\omega_Y^2)$  и  $k^2/(\omega_X^2\omega_Y^2)$  и равны единице при  $k_1 = 2\gamma\omega_Y$  и  $k_2 = \omega_X\omega_Y$  соответственно (второе из них — это условие «сильной связи»). Их можно соотнести с ДЭНС для системы (4):  $k_1$  оказывается близко к  $k_R$ , что соответствует появлению чёткого, но невысокого второго максимума  $W_X$ , а  $k_2$  близко к  $k_{var}$ .

Таким образом, разные ДЭНС характеризуют «взаимодействие» или «связанность» в разных смыслах и позволяют точно описать разнообразные роли связи в динамике с единых позиций, «разворачивая» известные понятия слабой/сильной связи и связанности в более детальный набор характеристик.

С ростом диссипации при данной расстройке частот максимумы спектров становятся более широкими. Пороговые значения  $k_0, k_R$  и  $k_T$  увеличиваются с ростом  $\gamma$ ,  $k_r$  уменьшается, а  $k_r^*$  и  $k_{var}$  не зависят от  $\gamma$  (см. рис. 2). При этом сближаются значения  $k_R, k_T$  и  $k_r$ . При  $\gamma \propto |\omega_X - \omega_Y|$  имеет место  $k_0 = k_r$ , т.е. возникающий второй максимум лишь немного ниже первого. При  $k = k_R$  ПЭ уже близка к 0,4. Так,  $T_{Y \rightarrow X}^{max} \approx 0,3$  при  $k_R \approx 0,034$  в табл. 2, которая приведена для равных парциальных частот, но увеличение диссипации при фиксированной расстройке даёт те же результаты, что и уменьшение расстройки при фиксированной диссипации, приводя к  $\gamma \gg |\omega_X - \omega_Y|$ . В пределе имеем  $\omega_X = \omega_Y$  и любое малое  $\gamma$ , что и отражено в табл. 2. Рассмотрим этот случай аналогично случаю  $\gamma \ll |\omega_X - \omega_Y|$  выше.

Асимптотические оценки при  $\omega_X = \omega_Y$  и малом  $\gamma$  следующие:  $k_0 = k_r \approx 1,2\gamma\omega_X, k_R \approx 3,3\gamma\omega_X, k_T \approx 3,2\gamma\omega_X$ . По порядку величины эти значения одинаковы;  $k_R/k_{var} \propto \gamma/\omega_X \ll 1$ . Рисунок 3

Таблица 2. Пороговые  $k$  и ДЭНС  $Y \rightarrow X$  для системы (3) при  $\omega_X = \omega_Y = 1, \gamma = 0,01$ . Частоты  $G_{Y \rightarrow X}^{max}$  и  $S_{Y \rightarrow X}^{min}$  равны 1, частота  $S_{Y \rightarrow X}^{max}$  близка к частоте левого максимума  $W_X$

Величина	$k_0$	$k_R$	$k_T$	$k_r^*$	$k_{var}$
$k$	0,0125	0,034	0,045	0,335	0,70
$R_{Y \rightarrow X}$	0,00003	<b>1,0</b>	2,0	105	360
$T_{Y \rightarrow X}^{max}$	0,06	0,28	<b>0,4</b>	1,9	2,6
$r_{Y \rightarrow X}$	0,99	0,94	0,92	<b>0,5</b>	0,18
$S_{Y \rightarrow X}^{var}$	0,00016	0,0012	0,0020	0,13	<b>1,0</b>
$G_{Y \rightarrow X}^{max}$	0,4	2,9	5,1	280	1 200
$S_{Y \rightarrow X}^{max}$	0,22	1,6	2,8	210	2 050
$S_{Y \rightarrow X}^{min}$	-0,28	-0,74	-0,83	-0,996	-0,999

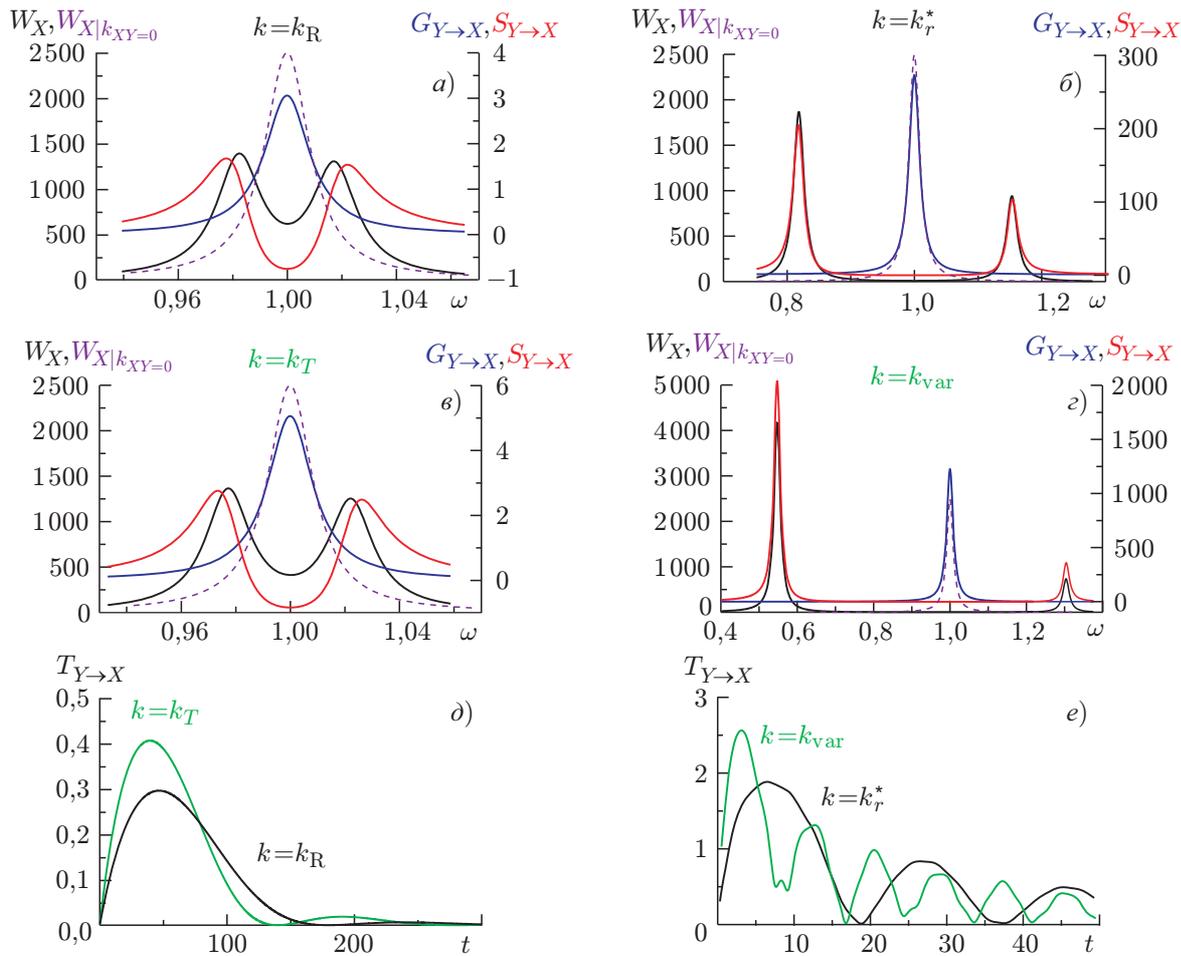


Рис. 3. Характеристики системы (4) при  $\gamma = 0,01$ ,  $\omega_X = \omega_Y = 1$ ,  $\Gamma = 1$ . Обозначения (включая цвета) те же, что и на рис. 1. Пороговые значения составляют  $k = k_R = 0,034$  (а, д),  $k = k_T = 0,045$  (в, д),  $k = k_r^* = 0,335$  (б, е),  $k = k_{var} = 0,7$  (з, е)

и табл. 2 дают численные результаты для  $\gamma = 0,01$ . При  $k_0 = k_r = 0,0125$  появляется второй спектральный максимум  $x$ , но теперь он справа от  $\omega_X = \omega_Y$  и близок по высоте к первому. При  $k_R = 0,034$  второй максимум становится чётким, оставаясь относительно высоким, — это сильная связанность в первом смысле. Передаточная энтропия достигает 0,4 уже вскоре (при  $k_T = 0,045$ , что немного отличается от приближённой оценки) — это сильная связанность во втором смысле. При  $k_r^* \approx 0,34$  второй максимум становится вдвое ниже первого. Таким образом, при нулевой расстройке задача содержит один существенный параметр (это параметр диссипации  $\gamma$ ) и оба смысла сильной связанности совпадают и выражаются как ПЭ, так и спектральными ДЭНС.

Что касается связи  $X \rightarrow Y$ , то при  $\omega_X^2 = 1,2$ ,  $\omega_Y^2 = 0,8$ ,  $\gamma = 0,01$  и прочих тех же параметрах для неё все аналогично связи  $Y \rightarrow X$ , но пороговые  $k$  несколько выше, а второй спектральный максимум  $y$  никогда не достигает 0,5 от основного, т.к. он сразу появляется на более высокой частоте  $\omega_X$ , где выше роль диссипации. Однако при достаточно малых  $\gamma$  пороговые  $k$  для обоих направлений связи сближаются друг с другом и относительно высокий и чёткий второй спектральный максимум  $y$  достигается. Более детальный анализ отличий характеристик связи для двух направлений не требуется для основного вывода данной работы.

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПРИМЕНЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Для иллюстрации характера применения ДЭНС при анализе временных рядов рассмотрим ряд значений величин  $x$  и  $y$  от связанных систем  $X$  и  $Y$ , записанный с шагом  $\Delta t$  при их фиксированных параметрах. Пусть оценена традиционная характеристика связи  $F_{Y \rightarrow X}$  — улучшение прогноза  $X$  при учёте  $Y$ , т.е. относительная разность среднеквадратичных ошибок одношагового прогноза  $x_{t+1}$ , где один прогноз даётся при учёте  $x_t, y_t$ , а другой — при учёте только  $x_t$ . Поскольку в каждом конкретном случае прогноза на ошибку влияют шумы, то здесь сравниваются дисперсии, т.е. характеристики, усреднённые по множеству (ансамблю) случаев прогноза. Первый прогноз с минимальной ошибкой даётся математическим ожиданием будущего  $x_{t+1}$  при условии  $x_t = x^*, y_t = y^*$ , т.е. при настоящем распределении  $p_{XY}^{(t)}(x, y) = \delta(x - x^*)(y - y^*)$ . Второй прогноз даётся тем же самым при условии  $x_t = x^*$ , а поскольку оценка проводится по временному ряду в предположении стационарности и эргодичности, то выбор  $x_t$ , близких к  $x^*$ , означает, что  $y(t)$  распределено при этом согласно условной стационарной плотности  $p_{Y|X}^{\text{st}}(y|x^*)$ . Следовательно, второй прогноз — это математическое ожидание  $x_{t+1}$  при условии  $p_{XY}^{(t)}(x, y) = \delta(x - x^*)p_{Y|X}^{\text{st}}(y|x^*)$ . Так, даже простая идея улучшения прогноза по существу сравнивает эволюцию ансамблей. Если для прогноза учитывается несколько предыдущих значений  $x$  и  $y$ , то  $F_{Y \rightarrow X}$  оценивает «причинность по Вину—Грейнджеру» [7, 8]. Для гауссовых процессов она взаимно однозначно связана с ПЭ [47].

Пусть получена статистически значимая  $F_{Y \rightarrow X}$ , равная 3 %. Тогда можно сделать вывод, что связь  $Y \rightarrow X$  имеется, однако возникает вопрос, сильна ли она, т.к. 3 % — это обычно малое изменение чего-либо. Например, если «выключить» эту связь при прочих равных условиях, то насколько изменится дисперсия  $x$ ? Это показывает ДЭНС по стационарной дисперсии  $S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}}$ , и ответ на практике неочевиден. Предварительный анализ ДЭНС даёт ответ для некоторых классов систем, например для релаксационных систем в [36, 39] и однонаправленно связанных диссипативных осцилляторов в [37]. Так, если  $X$  и  $Y$  — это две релаксационные системы с примерно одинаковыми временами релаксации, равными  $N\Delta t$ , и не слишком сильной связью [36, 39], то  $S_{Y \rightarrow X}^{\text{var}} \approx F_{Y \rightarrow X} N$ . Тогда при  $N = 10$  отсчётов на характерном времени  $F_{Y \rightarrow X} = 3\%$  соответствует увеличению дисперсии  $x$  на 30 % за счёт введения связи  $Y \rightarrow X$ . Часто это достаточно большая величина, т.к., например, такая вариация индекса Эль—Ниньо может соответствовать существенному изменению вероятности опасных климатических явлений. Но в общем случае лишь внешний критерий решает, велико ли такое значение в конкретном исследовании. В данной работе для двунаправленно связанных осцилляторов выявлены более сложные зависимости между различными ДЭНС, которые аналогично могут быть применены на практике.

Часто важен вопрос об изменении спектрального состава сигнала  $x$  при введении связи  $Y \rightarrow X$  [38], но изменение интегральной мощности  $x$  (грубо говоря, амплитуды колебаний) может быть не столь важным, и наоборот. Величины  $F_{Y \rightarrow X}$  и ПЭ чувствительны к изменениям как амплитуды, так и спектра мощности  $x$ . Но оказывается, что информационный поток Лианга—Климена — достаточно популярная в последние годы характеристика [62, 63] — это такой специфический ДЭНС, который может быть чувствителен к изменению амплитуды и не чувствителен к изменению спектра. В [15] показано, что для двух релаксационных систем он равен нулю при сколь угодно сильной двунаправленной связи, сохраняющей неизменной стационарную дисперсию  $x$ . Зная это, исследователь может решить, пригодна ли для использования при решении его конкретной задачи характеристика с такими свойствами. Таким образом, в рамках концепции ДЭНС явно формулируется, какие динамические эффекты связи отражает та или иная формальная характеристика, а какие нет.

Для ансамблей из большего числа систем, например для трёх систем, ДЭНС вводятся вполне аналогично путём надлежащего учёта состояний третьей системы  $Z$  в опорном и альтернативном начальных условиях (начальных распределениях)  $Y$ -шевеления и параметров  $Z$  в общем векторе параметров  $\mathbf{a}$ , как обсуждается в [15, Приложение F].

В трудной ситуации отсутствия данных наблюдений о некоторых переменных состоянии исследуемых систем (и сторонних факторов) всегда остаётся возможность идентификации (реконструкции) параметризованной динамической модели по имеющимся данным [13] и расчёт ДЭНС для неё. В предположении (и при наличии признаков) адекватности этой модели такие ДЭНС могут быть хорошими оценками искомым ДЭНС (см. примеры в [38]).

Представляется, что при дальнейшем развитии этой точки зрения можно получить богатую систему ДЭНС, для которой будет известно, как пересчитать друг в друга те или иные характеристики связи, какие из них дают независимую информацию и какая из них наиболее уместна для ответа на те или иные характерные вопросы о роли связи в динамике. Такие вопросы всегда ставятся «извне», и, соответственно, лишь по внешнему критерию одна характеристика связи может быть лучше других для некоторого круга задач. В частности, одна из характеристик может быть более доступна для надёжной оценки, чем другие желательные характеристики, по имеющимся данным наблюдений в конкретных условиях (возможной зашумлённости, ненаблюдаемых переменных состояния и других). Развитие исследований связанных систем с точки зрения ДЭНС может на практике расширить круг систем и вопросов, для которых можно будет быстро подбирать адекватные характеристики связи и методы их оценки.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые дано русскоязычное описание формализма и терминологии «динамических эффектов направленной связи», которые позволяют единым образом выражать различные характеристики связи, используемые при анализе временных рядов (передаточная энтропия, спектр причинности Грейнджера—Гевеке и другие) и в теоретических исследованиях (изменение дисперсии или спектра мощности при вариации управляющего параметра и другие). Как характеристика «силы связи» ДЭНС  $Y \rightarrow X$  содержит такие элементы, как  $Y$ -шевеление (опорное и альтернативное обобщённые начальные условия связанной системы, каждое из которых представляет собой вектор параметров и начальное распределение состояний), время или распределённый временной горизонт отклика, функционал различия и функционал сборки. Так, ПЭ  $Y \rightarrow X$  оказывается ДЭНС на конечном времени отклика  $t$  при определённом  $Y$ -шевелении начального распределения, спектр причинности Грейнджера—Гевеке  $Y \rightarrow X$  — спектральным ДЭНС при включении шума  $\xi_Y$  и т. д.

Эти характеристики соотнесены здесь с классическими теоретико-колебательными определениями «связи и связанности по Мандельштаму» [35], что естественным образом достигается с точки зрения ДЭНС, которая является по существу реализацией теоретико-колебательного (динамического) взгляда на характеристики направленной связи. В дополнение к известным характеристикам предложены ещё два спектральных ДЭНС — по чёткости и высоте второго спектрального максимума. В результате исследования системы двунаправлено связанных стохастических линейных диссипативных осцилляторов показано, что понятие «связанности по Мандельштаму» имеет два смысла, которые совпадали в [35], но различаются для стохастической диссипативной системы и выражаются разными ДЭНС. Условие же «сильной связи» [35] означает равенство дисперсий члена связи и возвращающей силы (при «разомкнутой цепи») в (4) и по порядку величины соответствует условию удвоения дисперсии  $x$  при включении связи  $Y \rightarrow X$ .

Таким образом, рассмотренный набор ДЭНС позволяет отразить разнообразные проявления

связи в динамике и потому является детализацией понятия «связанности» или «силы взаимодействия» осцилляторов. Теоретико-колебательная точка зрения на ДЭНС с её развернутой терминологией и формализмом позволяет уточнить смысл вопроса «сильна ли связь?» и в перспективе может дать практическую возможность систематического подхода к выбору характеристики направленной связи, подходящей для конкретной исследуемой системы, ответа на поставленный о ней вопрос и оценки по имеющимся эмпирическим данным.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Расчёт спектральных характеристик связи

Матрица спектральной плотности процесса  $(x, y)$  получается формально путём умножения обеих частей системы (4) на  $\exp(-i\omega t)$ , интегрирования по времени, сведения к алгебраической системе для фурье-образов и так далее (см., например, [38]). В результате при нулевой связи имеем

$$W_{X|k_{XY}=0}(\omega) = \frac{\Gamma_X}{(\omega^2 - \omega_X^2)^2 + 4\gamma_X^2 \omega^2}, \quad (\text{П1.1})$$

а при произвольной связи

$$W_X(\omega) = \frac{W_{X|k_{XY}=0}(\omega)}{|\tilde{D}(\omega)|^2} \left[ 1 + \frac{k_{XY}^2 W_{Y|k_{XY}=0}(\omega)}{\Gamma_X} \right], \quad (\text{П1.2})$$

где

$$\tilde{D}(\omega) = 1 - \frac{k^2}{(\omega^2 - \omega_X^2 + 2i\gamma_X \omega)(\omega^2 - \omega_Y^2 + 2i\gamma_Y \omega)}$$

— определитель матрицы спектральной плотности процесса  $(x, y)$ . Выражения для  $W_{Y|k_{XY}=0}(\omega)$  и  $W_Y(\omega)$  аналогичны (П1.1) и (П1.2).

Отсюда ДЭНС  $Y \rightarrow X$  при включении шума  $\xi_Y$  находим из его определения (5):

$$G_{Y \rightarrow X}(\omega) = (k_{XY}^2 / \Gamma_X) W_{Y|k_{XY}=0}(\omega), \quad (\text{П1.3})$$

что для рассматриваемых параметров  $\gamma_X = \gamma_Y = \gamma$ ,  $\Gamma_X = \Gamma_Y = \Gamma$ ,  $k_{XY} = k_{YX} = k$  даёт

$$G_{Y \rightarrow X}(\omega) = \frac{k^2}{(\omega^2 - \omega_Y^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}. \quad (\text{П1.4})$$

При  $\gamma \ll |\omega_X - \omega_Y|$  максимальное значение составляет  $G_{Y \rightarrow X}^{\max} \approx k^2 / 4\gamma^2 \omega^2$  при  $\omega \approx \omega_Y$ . Оно достигает единицы при  $k = k_G \approx 2\gamma\omega_Y$ . Максимальный ДЭНС  $Y \rightarrow X$  при включении связи  $S_{Y \rightarrow X}^{\max}$  достигается на этой же частоте и практически равен  $G_{Y \rightarrow X}^{\max}$  при  $k \ll |\omega_X^2 - \omega_Y^2|$ .

Значение  $k = k_0$ , при котором появляется точка перегиба на зависимости  $W_X(\omega)$ , находится путём дифференцирования (П1.2), приравнивания нулю правой части и учёта малости  $\gamma$ . Получим  $\omega \approx \omega_Y$ , откуда найдём  $k_0 \approx 3,5\gamma\omega_Y \sqrt{\gamma / |\omega_X - \omega_Y|}$ . Значение  $k = k_R$ , при котором достигается  $R_{Y \rightarrow X} = 1$ , соответствует (при малом  $\gamma$ )  $G_{Y \rightarrow X}^{\max} = 1$ , т. е.  $k_R \approx 2\gamma\omega_Y$ , т. к. при этом график  $W_X(\omega)$  представляет собой график  $W_{X|k_{XY}=0}(\omega)$  с очень узким наложенным пиком на частоте  $\omega \approx \omega_Y$ .

Значение  $k = k_r$ , при котором впервые достигается  $r_{Y \rightarrow X} = 0,5$ , при ненулевой расстройке и малом  $\gamma$  находим из равенства соответствующих компонент в уравнении (П1.2), получая

$k^2/|(\omega_X^2 - \omega_Y^2)^2| \approx 0,5\omega_Y^2/\omega_X^2$  или  $k_r^2 \approx |(\omega_X - \omega_Y)^2|/2$ . С ростом  $k$  при  $k = k_r^*$  величина  $r_{Y \rightarrow X}$  снижается до 0,5: здесь второй (уже правый) спектральный минимум становится вдвое ниже основного (левого). Значение  $k = k_r^*$  тоже зависит лишь от  $|\omega_X - \omega_Y|$ , но сложнее.

Аналогично отыскиваются пороговые  $k$  при  $\omega_X = \omega_Y$  (и малом  $\gamma$ ). Это  $k_0 = k_r \approx 1,2\gamma\omega_X$  из условия точки перегиба при  $\omega \approx \omega_X$ , а также  $k_R \approx 3,3\gamma\omega_X$  из того, что  $W_X$  в (П1.2) при  $\omega_1 \approx \omega_X^2 + k$ ,  $\omega_2 \approx \omega_X^2 - k$  (частоты мод детерминированной системы [35]) вдвое больше  $W_X(\omega_X)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Расчёт передаточной энтропии

Расчёт ПЭ повторим по [39] для системы, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \boldsymbol{\xi}(t)$ , где  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{A}$  — постоянная матрица,  $\boldsymbol{\xi}(t)$  — нормальный белый шум с нулевым средним и ковариационной функцией  $\langle \boldsymbol{\xi}(t)\boldsymbol{\xi}^T(t') \rangle = \boldsymbol{\Gamma}\delta(t - t')$ . Такова и рассматриваемая система (4) с  $\mathbf{x} = (x, \dot{x})$ ,  $\mathbf{y} = (y, \dot{y})$  и матрицами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_X^2 & -2\gamma_X & k_{XY} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{YX} & 0 & -\omega_Y^2 & -2\gamma_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.1})$$

Для описания эволюции распределения  $\mathbf{z}$  достаточно уравнений для его математического ожидания  $\mathbf{m}_z(t)$  и матрицы ковариаций  $\mathbf{C}_{zz}(t)$  [14, 39]:

$$\dot{\mathbf{m}}_z(t) = \mathbf{A}\mathbf{m}_z, \quad \dot{\mathbf{C}}_{zz} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{zz} + \mathbf{C}_{zz}\mathbf{A}^T + \boldsymbol{\Gamma}, \quad (\text{П2.2})$$

где индекс T означает транспонирование. Стационарные значения  $\mathbf{m}_z^{\text{st}} = 0$  и  $\mathbf{C}_{zz}^{\text{st}}$  находятся из уравнений (П2.2) с нулевой левой частью. Зададим начальное  $\mathbf{z}_0$ , т.е. начальное распределение с  $\mathbf{m}_z(0) = \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{C}_{zz}(0) = \mathbf{0}$ , и обозначим будущие значения  $\mathbf{m}_{z|\mathbf{z}_0}(t)$ ,  $\mathbf{C}_{zz|\mathbf{z}_0}(t)$ . При этом

$$\mathbf{m}_{z|\mathbf{z}_0}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{z}_0, \quad (\text{П2.3})$$

где матрицу  $\mathbf{B}(t)$  можно найти, интегрируя уравнение  $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B}$  с начальным условием  $\mathbf{B}(0)$  в виде единичной матрицы. Запишем  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{C}_{zz}^{\text{st}}$  в блочном виде с блоками, относящимися к подсистемам  $X$  и  $Y$ :

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{xx}(t) & \mathbf{B}_{xy}(t) \\ \mathbf{B}_{yx}(t) & \mathbf{B}_{yy}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{zz}^{\text{st}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{xx}^{\text{st}} & \mathbf{C}_{xy}^{\text{st}} \\ \mathbf{C}_{yx}^{\text{st}} & \mathbf{C}_{yy}^{\text{st}} \end{pmatrix}.$$

Согласно известному алгебраическому соотношению, условная ковариационная матрица  $\mathbf{C}_{yy|x}^{\text{st}}$  вектора  $\mathbf{y}$  при заданном одновременном  $\mathbf{x}$  не зависит от значения  $\mathbf{x}$  и равна

$$\mathbf{C}_{yy|x}^{\text{st}} = \mathbf{C}_{yy}^{\text{st}} + \mathbf{C}_{yx}^{\text{st}} (\mathbf{C}_{xx}^{\text{st}})^{-1} \mathbf{C}_{xy}^{\text{st}}.$$

Далее, матрица ковариаций  $\mathbf{C}_{xx|\mathbf{z}_0}(t)$  будущего вектора  $\mathbf{x}$  при заданном  $\mathbf{z}_0$  — это соответствующий блок матрицы  $\mathbf{C}_{zz|\mathbf{z}_0}(t)$ , найденной путём решения уравнений (П2.2). Матрица ковариаций  $\mathbf{C}_{xx|\mathbf{z}_0}(t)$  при заданном  $\mathbf{x}_0$ , где  $\mathbf{y}_0$  распределено с матрицей ковариаций  $\mathbf{C}_{yy|x}^{\text{st}}$ , тогда равна  $\mathbf{C}_{xx|x_0}(t) = \mathbf{C}_{xx|\mathbf{z}_0}(t) + \mathbf{B}_{xy}(t)\mathbf{C}_{yy|x}^{\text{st}}\mathbf{B}_{xy}^T(t)$ . Для гауссовых распределений ПЭ находим через отношение определителей ковариационных матриц [47] по формуле

$$T_{Y \rightarrow X}^{(t)} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{C}_{xx|x_0}(t)|}{|\mathbf{C}_{xx|\mathbf{z}_0}(t)|}. \quad (\text{П2.4})$$

Для системы (4) с  $\gamma_X = \gamma_Y = \gamma$ ,  $\Gamma_X = \Gamma_Y = \Gamma$ ,  $k_{XY} = k_{YX} = k$  выражение для  $\mathbf{C}_{zz}^{\text{st}}$  получим в явном виде:

$$\mathbf{C}_{zz}^{\text{st}} = \frac{\Gamma}{4\gamma(\omega_X^2\omega_Y^2 - k^2)} \begin{pmatrix} \omega_Y^2 & 0 & k & 0 \\ 0 & \omega_X^2\omega_Y^2 - k^2 & 0 & 0 \\ k & 0 & \omega_X^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_X^2\omega_Y^2 - k^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{П2.5})$$

при этом

$$\mathbf{C}_{yy|x}^{\text{st}} = \frac{\Gamma}{4\gamma\omega_Y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Полагая малым время отклика  $t$  в (П2.4), найдем явное выражение для ПЭ путём решения уравнений (П2.2) для ковариационной матрицы при сохранении старших двух порядков по  $t$  в каждом из десяти уравнений. Их можно решать цепочкой, начиная с тех, которые содержат первый порядок по  $t$ , т. е. где есть  $\Gamma$  в правой части. Получим

$$T_{Y \rightarrow X}^{(t)} \approx \frac{k^2 t}{8\gamma\omega_Y^2}, \quad (\text{П2.6})$$

где

$$\tau_{Y \rightarrow X} = \left. \frac{dT_{Y \rightarrow X}^{(t)}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{k^2}{8\gamma\omega_Y^2}$$

— первая производная ПЭ по времени отклика в нуле. Приближённое выражение для максимальной ПЭ найдём в виде  $T_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} \approx \alpha \tau_{Y \rightarrow X} t_{Y \rightarrow X}^{\text{max}}$ , где эмпирический коэффициент  $\alpha$  порядка единицы,  $t_{Y \rightarrow X}^{\text{max}}$  — время максимума ПЭ. Значение  $\alpha$  подобрано здесь по форме зависимости ПЭ от  $t$  аналогично [36, 37] и равно 0,5. Так же подобрано и выражение для  $t_{Y \rightarrow X}^{\text{max}}$  — как 1/3 от периода огибающей (которая берётся по модулю), примерно равного  $2\pi/|\omega_X^{\text{max},1} - \omega_X^{\text{max},2}|$ , где  $\omega_X^{\text{max},1}$ ,  $\omega_X^{\text{max},2}$  — частоты двух пиков в спектре мощности  $x$ . Так получаем приближённую формулу

$$T_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} \approx \frac{k^2}{8\gamma\omega_Y^2 |\omega_X^{\text{max},1} - \omega_X^{\text{max},2}|}. \quad (\text{П2.7})$$

При  $\gamma \ll |\omega_X - \omega_Y|$  и  $k \ll |\omega_X^2 - \omega_Y^2|$  имеем  $t_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} \approx 2\pi/|\omega_X - \omega_Y|$  и упрощение до

$$T_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} \approx \frac{k^2}{8\gamma\omega_Y^2 |\omega_X - \omega_Y|}. \quad (\text{П2.8})$$

При  $\omega_X = \omega_Y$  и  $k \ll \omega_X^2$  имеем  $|\omega_X^{\text{max},1} - \omega_X^{\text{max},2}| = k/\omega_X$  и упрощение до

$$T_{Y \rightarrow X}^{\text{max}} \approx \frac{k}{8\gamma\omega_X}. \quad (\text{П2.9})$$

Имеем  $|\mathbf{C}_{xx|x_0}(t)| = \sigma_{x|x_0}^2 \sigma_{\dot{x}|x_0}^2 (1 - \text{cov}_{x\dot{x}|x_0}^2)$  и  $|\mathbf{C}_{xx|z_0}(t)| = \sigma_{x|z_0}^2 \sigma_{\dot{x}|z_0}^2 (1 - \text{cov}_{x\dot{x}|z_0}^2)$  для двумерного  $\mathbf{x}$ , так что

$$T_{Y \rightarrow X}^{(t)} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{x|x_0}^2 - \sigma_{x|z_0}^2}{\sigma_{x|x_0}^2} + \frac{\sigma_{\dot{x}|x_0}^2 - \sigma_{\dot{x}|z_0}^2}{\sigma_{\dot{x}|z_0}^2} + \frac{\text{cov}_{x\dot{x}|z_0}^2 - \text{cov}_{x\dot{x}|x_0}^2}{1 - \text{cov}_{x\dot{x}|z_0}^2} \right).$$

В предположении мало меняющейся при учёте полного  $\mathbf{z}_0$  ковариации  $\text{cov}_{x\dot{x}|x_0}^2$  ПЭ равна среднему (по двум переменным) относительному улучшению прогноза. Иначе говоря, ПЭ равна среднему

относительному увеличению дисперсии одной динамической переменной при задании только  $X$ -состояния  $\mathbf{x}_0$  по сравнению с заданием полного  $\mathbf{z}_0$ . Характерное значение ПЭ порядка единицы, для которого легко получить приближённую формулу, соответствует среднему относительному увеличению дисперсии одной переменной, равному 0,5. Это ПЭ, равная 0,4, т. к.  $\ln 1,5 \approx 0,4$ . Из уравнений (П2.8) и (П2.9) получим, что  $T_{Y \rightarrow X}^{\max} = 0,4$  достигается при  $k_T \approx 1,8\omega_Y \sqrt{\gamma|\omega_X - \omega_Y|}$  в случае  $\gamma \ll |\omega_X - \omega_Y|$  и  $k_T \approx 3,2\omega_X$  в случае  $\omega_X = \omega_Y$ .

Можно ввести и «непосредственные» характеристики связи, не являющиеся результатом анализа роли связи в динамике связанной системы. Ими могут служить, аналогично [39], отношения дисперсии члена связи  $ky$  к дисперсиям членов  $2\gamma\dot{x}$  и  $\omega_X^2 x$  в режиме «разомкнутой цепи», т. е. в таком режиме, где  $x$  и  $y$  меняются согласно несвязанным уравнениям (4). Тогда дисперсия  $ky$  равна  $k^2\Gamma/(4\gamma\omega_Y^2)$ , дисперсия  $2\gamma\dot{x}$  равна  $\Gamma\gamma$ , дисперсия  $\omega_X^2 x$  равна  $\omega_X^2\Gamma/(4\gamma)$ . Упомянутые два отношения равны  $k^2/(4\gamma^2\omega_Y^2)$  и  $k^2/(\omega_X^2\omega_Y^2)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pereda E., Quian Quiroga R., Bhattacharya J. // Prog. Neurobiol. 2005. V. 77. P. 1–37. <https://doi.org/10.1016/j.pneurobio.2005.10.003>
2. Hlaváčková-Schindler K., Paluš M., Vejmelka M., Bhattacharya J. // Phys. Rep. 2007. V. 441. P. 1–46. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.12.004>
3. Attanasio A., Pasini A., Triacca U. // Atmos. Climate Sci. 2013. V. 3. P. 515–522. <https://doi.org/10.4236/acs.2013.34054>
4. Directed Information Measures in Neuroscience / ed. by M. Wibral, R. Vicente, J. T. Lizier. Berlin : Springer, 2014. 239 p.
5. Müller A., Kraemer J.F., Penzel T., et al. // Physiol. Meas. 2016. V. 37. P. R46–R72. <https://doi.org/10.1088/0967-3334/37/5/R46>
6. Runge J., Bathiany S., Bollt E., et al. // Nature Commun. 2019. V. 10. Art. no. 2553. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-10105-3>
7. Wiener N. // Modern Mathematics for Engineers / ed. by E. F. Beckenbach. New York : McGraw-Hill, 1956. P. 165–190.
8. Granger C. W. J. // Inf. Control. 1963. V. 6. P. 28–48. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(63\)90092-5](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(63)90092-5)
9. Granger C. W. J. // J. Econ. Dynam. Control. 1980. V. 2. P. 329–352. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(80\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0165-1889(80)90069-X)
10. Geweke J. // J. Am. Stat. Assoc. 1982. V. 77. P. 304–313. <https://doi.org/10.1080/01621459.1982.10477803>
11. Pearl J. Causality: Models, reasoning, and inference. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. 400 p.
12. Eichler M. // Causality: Statistical Perspectives and Applications / ed. by C. Berzuini, P. Dawid, L. Bernardinelli. Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2012. P. 327–354. <https://doi.org/10.1002/9781119945710.ch22>
13. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin : Springer-Verlag, 2010. 432 p.
14. Smirnov D. A. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. Art. no. 062921. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.062921>
15. Smirnov D. A. // Phys. Rev. E. 2022. V. 105. Art. no. 034209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.034209>

16. Runge J., Heitzig J., Petoukhov V., Kurths J. // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. Art. no. 258701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.258701>
17. Stokes P. A., Purdon P. L. // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2017. V. 114. P. 7063–7072. <https://doi.org/10.1073/pnas.1704663114>
18. Barnett L., Barrett A. B., Seth A. K. // *NeuroImage*. 2018. V. 178. P. 744–748. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2018.05.067>
19. Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M. G., Pikovsky A. S. // *Chaos*. 2003. V. 13. P. 179–184. <https://doi.org/10.1063/1.1518425>
20. Смирнов Д. А., Безручко Б. П. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2012. Т. 55, № 10–11. С. 736–750.
21. Сидак Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2015. Т. 58, № 7. С. 587–599.
22. Сидак Е. В., Смирнов Д. А., Безручко Б. П. // *Радиотехника и электроника*. 2017. Т. 62, № 3. С. 248–258. <https://doi.org/10.7868/S0033849417030196>
23. Корнилов М. В., Сысоев И. В., Астахова Д. И. и др. // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2020. Т. 63, № 7. С. 603–618.
24. Hung Y.-C., Hu C.-K. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. Art. no. 244102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.244102>
25. Chionis D., Dokhane A., Ferroukhi H., Pautz A. // *Chaos*. 2019. V. 29. Art. no. 043126. <https://doi.org/10.1063/1.5083905>
26. Brovelli A., Ding M., Ledberg A., et al. // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2004. V. 101. P. 9849–9854. <https://doi.org/10.1073/pnas.0308538101>
27. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. и др. // *Успехи физ. наук*. 2008. Т. 178, № 3. С. 323–329. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803h.0323>
28. Bressler S. L., Seth A. K. // *NeuroImage*. 2011. V. 58. P. 323–329. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2010.02.059>
29. Sysoeva M. V., Lüttjohann A., van Luijteleaer G., Sysoev I. V. // *Neuroscience*. 2016. V. 314. P. 75–89. <https://doi.org/10.1016/j.neuroscience.2015.11.044>
30. Kralemann B., Frühwirth M., Pikovsky A., et al. // *Nat. Commun.* 2013. V. 4. Art. no. 2418. <https://doi.org/10.1038/ncomms3418>
31. Mokhov I. I., Smirnov D. A., Nakonechny P. I., et al. // *Geophys. Res. Lett.* 2011. V. 38. Art. no. L00F04. <https://doi.org/10.1029/2010GL045932>
32. Мохов И. И., Смирнов Д. А. // *Доклады академии наук*. 2018. Т. 480. С. 97–102. <https://doi.org/10.7868/S0869565218130200>
33. Mokhov I. I., Smirnov D. A. // *Chaos*. 2022. V. 32. Art. no. 063128. <https://doi.org/10.1063/5.0088042>
34. Sugihara G., May R., Ye H., et al. // *Science*. 2012. V. 338. P. 496–500. <https://doi.org/10.1126/science.1227079>
35. Мандельштам Л. И. *Лекции по теории колебаний*. М. : Наука, 1972. 470 с.
36. Smirnov D. A., Mokhov I. I. // *Phys. Rev. E*. 2015. V. 92. Art. no. 042138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.042138>
37. Smirnov D. A. // *Chaos*. 2018. V. 28. Art. no. 075303. <https://doi.org/10.1063/1.5017821>
38. Smirnov D. A. // *Europhys. Lett.* 2019. V. 128. Art. no. 20006. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/128/20006>
39. Smirnov D. A. // *Phys. Rev. E*. 2020. V. 102. Art. no. 062139. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.062139>
40. Smirnov D. A. // *Chaos*. 2021. V. 31. Art. no. 073127. <https://doi.org/10.1063/5.0055586>
41. Schreiber T. // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 461–464.

- <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.461>
42. Palus M., Komarek V., Hrnčir Z., Sterbova K. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. Art. no. 046211. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.046211>
43. Smirnov D. A. // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. Art. no. 042917. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.042917>
44. Земляничников А. С., Сысоев И. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2015. Т. 23, № 4. С. 24–31. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2015-23-4-24-31>
45. Bossomaier T., Barnett L., Harré M., Lizier J. T. An introduction to transfer entropy. Information flow in complex systems. Cham : Springer, 2016. 219 p.
46. Barrett A. B., Barnett L., Seth A. K. // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. Art. no. 041907. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.041907>
47. Barnett L., Barrett A. B., Seth A. K. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. Art. no. 238701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.238701>
48. Колмогоров А. Н. // Бюлл. МГУ. 1941. Т. 2, № 6. С. 3–40.
49. Гельфанд И. М., Яглом А. М. // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 1. С. 3–52.
50. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М. : Наука, 1966. 404 с.
51. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
52. Goldobin D. S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G. B. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. Art. no. 154101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.154101>
53. Голдобин Д. С., Долматова А. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 2. С. 288–301. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301>
54. Klinshov V., Shchapin D., D’Huys O. // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125. Art. no. 034101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.034101>
55. Klinshov V. V., Kirillov S. Y., Nekorkin V. I., Wolfrum M. // Chaos. 2021. V. 31. Art. no. 083103. <https://doi.org/10.1063/5.0056504>
56. Molkov Ya. A., Loskutov E. M., Mukhin D. N., Feigin A. M. // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. Art. no. 036216. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.036216>
57. Мухин Д. Н., Селезнев А. Ф., Гаврилов А. С., Фейгин А. М. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 4. С. 571–602. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-571-602>
58. Arnold L. Random dynamical systems. Berlin : Springer-Verlag, 1998. 601 p.
59. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М. : Наука, 1985. 559 с.
60. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М. : Сов. радио, 1977. 485 с.
61. Smirnov D. // Proc. 6th Scientific School «Dynamics of Complex Networks and their Applications». 14–16 September, 2022, Kaliningrad, Russia. P. 262. <https://doi.org/10.1109/DCNA56428.2022.9923161>
62. Liang X. S., Kleeman R. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. Art. no. 244101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.244101>
63. Liang X. S. // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. Art. no. 052201. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052201>

Поступила в редакцию 29 марта 2023 г.; принята в печать 7 июня 2023 г.

**QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF “CAUSALITY” IN A CLASSICAL  
PROBLEM OF THE THEORY OF OSCILLATIONS***D. A. Smirnov*

Within the formalism of dynamic effects of directional coupling, or dynamic causal effects (DCEs), relations of modern quantifiers of coupling between oscillatory systems (transfer entropy, Granger–Geweke causality spectrum, spectral DCEs, etc.) to the classical oscillation–theoretical notions of “coupling and coupledness according to Mandelstam” are studied for an exemplary system of two linear dissipative stochastic oscillators. It is shown that “coupledness” has two different meanings which are expressed via different DCEs. A whole set of DCEs appears to be a relevant detailed expression of the notion of coupledness and provides a more precise description of the various manifestations of coupling in dynamics.