



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(1)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003085
EDN: TQNUKG

Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Е. В. Навроцкая, А. В. Курбако, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров✉

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: sidakev@gmail.com, kurbako.sasha@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com, ✉mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 2.10.2023, принята к публикации 15.11.2023,
опубликована онлайн 28.12.2023, опубликована 31.01.2024

Аннотация. Цель работы — исследование особенностей синхронизации в ансамблях мемристивно связанных неидентичных нейроподобных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. **Методы.** Численно и экспериментально исследовалась коллективная динамика в кольце осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных мемристивной связью. Неидентичность осцилляторов достигалась их расстройкой по пороговому параметру, отвечающему за возбуждение осциллятора, либо расстройкой по параметру соотношения временных масштабов, от величины которого зависит собственная частота колебаний осциллятора. Мы исследовали синхронизацию мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо в зависимости от величины коэффициента связи, начальных условий всех переменных и количества осцилляторов в ансамбле. В качестве меры синхронизации мы использовали коэффициент, характеризующий близость траекторий осцилляторов. **Результаты.** Показано, что при мемристивной связи осцилляторов ФитцХью–Нагумо их синхронизация зависит не только от величины коэффициента связи, но и от начальных состояний как самих осцилляторов, так и переменных, отвечающих за мемристивную связь. Проведено сравнение особенностей синхронизации неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при мемристивной и диффузионной связи между ними. Показано, что, в отличие от случая диффузионной связи осцилляторов, при мемристивной связи с ростом силы связи осцилляторов может наблюдаться разрушение режима полностью синхронных синфазных колебаний, вместо которого возникает режим несинфазных колебаний. **Заключение.** Полученные результаты могут быть востребованы при решении задач управления синхронизацией в ансамблях нейроподобных осцилляторов, в частности, для достижения или разрушения режима синфазной синхронизации колебаний в ансамбле связанных осцилляторов.

Ключевые слова: модель ФитцХью–Нагумо, нейроподобные осцилляторы, мемристивная связь, радиофизический эксперимент.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

Для цитирования: Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 1. С. 96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085. EDN: TQNUKG

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings

E. V. Navrotskaya, A. V. Kurbako, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov✉

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: sidakev@gmail.com, kurbako.sasha@mail.ru, ponomarenkovi@gmail.com,

✉mdprokhorov@yandex.ru

Received 2.10.2023, accepted 15.11.2023, available online 28.12.2023, published 31.01.2024

Abstract. The aim of the study is to investigate the features of synchronization in ensembles of nonidentical neuron-like FitzHugh–Nagumo oscillators interacting via memristor-based coupling. **Methods.** The collective dynamics in a ring of FitzHugh–Nagumo oscillators connected via memristive coupling was studied numerically and experimentally. The nonidentity of oscillators was achieved by detuning them by the threshold parameter responsible for the excitation of oscillator, or by detuning them by the parameter characterizing the ratio of time scales, the value of which determines the natural frequency of oscillator. We investigated the synchronization of memristively coupled FitzHugh–Nagumo oscillators as a function of the magnitude of the coupling coefficient, the initial conditions of all variables, and the number of oscillators in the ensemble. As a measure of synchronization, we used a coefficient characterizing the closeness of oscillator trajectories. **Results.** It is shown that with memristive coupling of FitzHugh–Nagumo oscillators, their synchronization depends not only on the magnitude of the coupling coefficient, but also on the initial states of both the oscillators themselves and the variables responsible for the memristive coupling. We compared the synchronization features of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive and diffusive couplings. It is shown that, in contrast to the case of diffusive coupling of oscillators, in the case of memristive coupling, with increasing coupling strength of the oscillators, the destruction of the regime of completely synchronous in-phase oscillations can be observed, instead of which a regime of out-of-phase oscillations appears. **Conclusion.** The obtained results can be used when solving the problems of synchronization control in ensembles of neuronlike oscillators, in particular, for achieving or destroying the regime of in-phase synchronization of oscillations in an ensemble of coupled oscillators.

Keywords: FitzHugh–Nagumo model, neuronlike oscillators, memristive coupling, radio physical experiment.

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 22-22-00150, <https://rscf.ru/project/22-22-00150/>.

For citation: Navrotskaya EV, Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Synchronisation of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):96–110. DOI: 10.18500/0869-6632-003085

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Спайковые нейронные сети, использующие в качестве узлов биологически реалистичные модели нейронов, являются объектом пристального изучения в различных научных дисциплинах [1]. Такие сети способны демонстрировать присущую реальным нейронам активность, в том числе генерировать спайки (импульсы). Спайковые нейронные сети широко используются для моделирования процессов обработки информации в головном мозге [2]. Они применяются в задачах классификации и идентификации, например, для классификации типичных паттернов в биомедицинских сигналах (электроэнцефалограммах, электромиограммах и др.) [3–6], классификации внешнего воздействия, подаваемого на нейроны сети [7, 8], распознавания аудиовизуальной информации [9, 10]. Высокую практическую значимость спайковые нейронные сети имеют в робототехнике при решении задач управления движением роботов [11–14]. Разработка новых эффективных алгоритмов обучения спайковых нейронных сетей [15] открывает все более широкие перспективы их применения на практике.

Существует несколько хорошо известных моделей нейронов, которые широко используются как узловые элементы для построения спайковых нейронных сетей [16]. Одной из таких моделей, ставшей эталонной моделью возбудимой динамики нейронов, является модель ФитцХью–Нагумо [16]. Ансамбли связанных осцилляторов, описываемых уравнениями ФитцХью–Нагумо, исследовались многими авторами. В частности, в таких ансамблях были исследованы процессы формирования, эволюции и синхронизации различных пространственно-временных структур, включая бегущие волны и химерные состояния [17–21], предложены методы управления пространственными структурами с помощью внешних воздействий [22, 23].

Динамика спайковых нейронных сетей определяется выбором не только узловых элементов сети, но и выбором типа и структуры связей между нейронами. При исследовании сетей, состоящих из осцилляторов ФитцХью–Нагумо, наиболее широко используется диффузионная связь, которая моделирует электрическую синаптическую связь между нейронами. Обычно при численном моделировании такая связь полагается постоянной, не зависящей от времени. Однако реальным нейронам присуща пластичность синаптических связей, которая обеспечивает высокую адаптивность нейронных сетей. Решить проблему реализации синаптической пластичности в спайковых нейронных сетях позволяет использование мемристивной связи между элементами. Особенностью такой связи является зависимость ее величины от предыдущих состояний взаимодействующих систем [24].

Нейронные ансамбли и сети, состоящие из мемристивно связанных модельных нейронов, преимущественно исследовались численно [25–28]. При этом спайковым нейронным сетям, состоящим из мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, посвящено небольшое количество работ. Например, в [29] было исследовано влияние начальных состояний мемристивной связи на бегущие волны в кольце идентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, а в [30] рассмотрена синхронизация двух мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо и цепочки, состоящей из диффузионно связанных пар таких осцилляторов. Задача экспериментального исследования ансамблей мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо является пока малоизученной. Например, в работе [31] была экспериментально изучена синхронизация двух нейроноподобных радиотехнических генераторов типа ФитцХью–Нагумо, связанных через аналоговое мемристивное устройство.

В данной работе мы численно и экспериментально исследовали синхронизацию в ансамбле мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Причем в радиофизическом эксперименте мы впервые реализовали сеть из 10 аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, связанных мемристивной связью, реализованной в цифровом виде.

1. Синхронизация двух мемристивно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим сначала случай двух взаимно связанных мемристивной связью нейро-осцилляторов ФитцХью–Нагумо, описываемых дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i \dot{x}_i(t) &= x_i(t) - x_i^3(t)/3 - y_i(t) + kM(\varphi_i(t))(x_{i+1}(t) - x_i(t)), \\ \dot{y}_i(t) &= \gamma_i x_i(t) - y_i(t) + \beta, \\ \dot{\varphi}_i(t) &= x_i(t) - x_{i+1}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x_i(t)$ описывает динамику мембранного потенциала i -го нейрона, $i = 1, 2$, с граничными условиями $x_3(t) = x_1(t)$; $y_i(t)$ отвечает за восстановление потенциала покоя мембраны; $\varphi_i(t)$ определяет мгновенное состояние мемристивной связи; ε_i — параметр соотношения временных

масштабов, который обычно является малой величиной; γ_i — пороговый параметр; параметр β характеризует проводимость ионных каналов; k — коэффициент связи; функция $M(\varphi_i(t)) = a + b\varphi_i^2(t)$ описывает проводимость i -го мемристивного элемента связи, где a и b — параметры этой функции. Такой вид функции, описывающей мемристивную связь, был использован в [24, 29, 30].

Следует отметить, что мемристор, представляющий собой пассивный электрический элемент, который способен изменять свое сопротивление в зависимости от протекшего через него электрического заряда, был впервые теоретически описан в работе Чуа [32]. В дальнейшем Чуа развил концепцию мемрстора и обобщил ее на случай любого устройства, характеристики которого зависят от предыстории функционирования [33]. Такие устройства были названы мемристивными [33]. Экспериментальные образцы радиотехнических устройств, обладающих свойствами мемрстора, появились намного позже [34, 35].

Поскольку мгновенное значение переменной $\varphi_i(t)$ в системе (1) определяется следующим образом [29]:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \int_0^t (x_i(\tau) - x_{i+1}(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

мгновенное значение силы связи осцилляторов в (1) зависит от их предыдущих состояний. Поэтому такую связь трактуют как мемристивную.

Мы исследовали синхронизацию осцилляторов в системе (1) в зависимости от величины коэффициента связи k и начальных условий всех трех переменных: $x_i(0)$, $y_i(0)$, $\varphi_i(0)$. Неидентичность осцилляторов достигалась их расстройкой по параметру γ_i или ε_i .

Рассмотрим случай малой расстройки осцилляторов по параметру γ_i , который принимал значения $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1.05$, соответствующие периодическим автоколебаниям несвязанных осцилляторов. Остальные параметры осцилляторов одинаковы: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$, $\beta = 0.2$. Параметры мемристивной связи: $a = 1$, $b = 1$. При численном исследовании системы (1) мы интегрировали модельные уравнения методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $\Delta t = 0.01$. Для исключения переходного процесса временные ряды переменных не рассматривались на начальном участке длиной $T_1 = 10000$.

В качестве меры синхронизации осцилляторов мы использовали коэффициент R , рассчитываемый по следующим формулам [30]:

$$x_s = (x_1 + x_2)/2, \quad (3)$$

$$R = \frac{\langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2)},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. При одинаковых дисперсиях переменных x_1 и x_2 коэффициент R связан с коэффициентом взаимной корреляции r соотношением $R = (1 + r)/2$. Коэффициент r может принимать значения от -1 до 1 , а коэффициент R может меняться от 0 до 1 . При полной синхронизации осцилляторов коэффициент R максимален и равен 1 , а в случаях несинхронных или несинфазных колебаний осцилляторов R принимает малые положительные значения [30]. Для расчета R мы проводили усреднение на интервале времени $T_2 = 1000$.

Обозначим $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$ и построим зависимости $R(\varphi_0)$ при различных значениях k и $x_1(0) = x_2(0)$, $y_1(0) = y_2(0)$ (рис. 1, а). Как видно из рисунка, в широком диапазоне значений φ_0 коэффициент $R = 1$, что указывает на полную синхронизацию осцилляторов. Однако существует интервал значений φ_0 , на котором коэффициент R мал. Отметим, что при более высоких значениях коэффициента связи ($k > 0.007$) характерный провал на графике $R(\varphi_0)$ исчезает и $R = 1$ при любых значениях φ_0 .

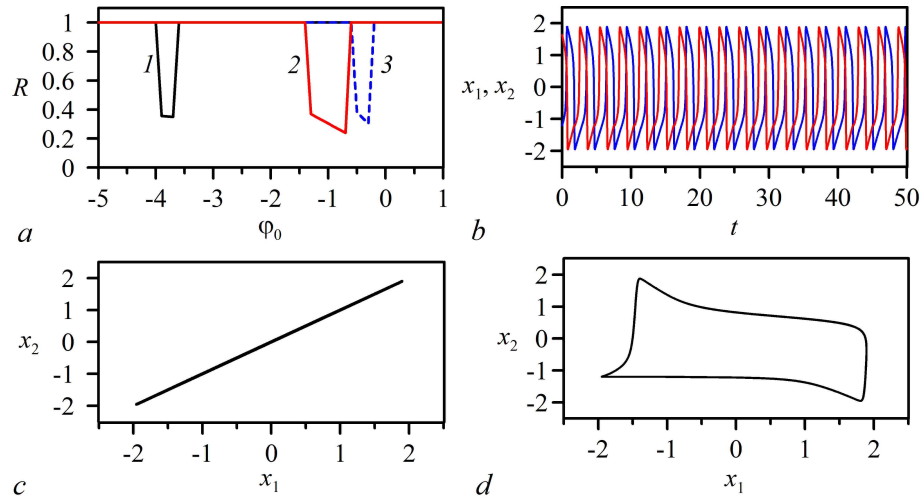


Рис. 1. *a* – Зависимости $R(\varphi_0)$ при $k = 0.0005$ (кривая 1), $k = 0.0025$ (кривая 2), $k = 0.005$ (кривая 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2$, $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. *b* – Временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$. *c* – Проекция колебаний в случае синфазного режима при $\varphi_0 = -2$, $k = 0.0025$. *d* – Проекция колебаний в случае несинфазного режима при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – Dependences $R(\varphi_0)$ for $k = 0.0005$ (curve 1), $k = 0.0025$ (curve 2), and $k = 0.005$ (curve 3) at $x_1(0) = x_2(0) = 0.2$, and $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. *b* – Temporal realizations of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ at $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$. *c* – Projection of oscillations in the case of in-phase mode at $\varphi_0 = -2$, $k = 0.0025$. *d* – Projection of oscillations in the case of out-of-phase mode at $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$ (color online)

На рис. 1, *b* приведены временные реализации переменных x_1 и x_2 при $\varphi_0 = -0.7$, $k = 0.0025$, при которых коэффициент R принимает минимальное значение, $R = 0.24$. Видно, что переменные $x_1(t)$ и $x_2(t)$ совершают при этом несинфазные колебания. В области значений $R = 1$ временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ почти совпадают (не приведены на графике) и практически неразличимы, что свидетельствует о полной (синфазной) синхронизации осцилляторов. Проекция траектории системы (1) на плоскость (x_1, x_2) приведены для случаев синфазных, $R = 1$ (рис. 1, *c*), и несинфазных, $R = 0.24$ (рис. 1, *d*), колебаний, наблюдающихся при разном выборе начальных условий, $\varphi_0 = -2$ и $\varphi_0 = -0.7$, соответственно. За счет мемристивной связи неидентичные осцилляторы оказываются синхронизованы по частоте, но при этом они могут быть как синхронизованы по фазе (см. рис. 1, *c*), так и не синхронизованы по фазе (см. рис. 1, *d*).

Начальные состояния переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$ тоже влияют на вид зависимостей $R(\varphi_0)$. На рис. 2, *a* построены графики $R(\varphi_0)$ для случаев $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ при $k = 0.005$. Видно, что чем больше $x_1(0)$ отличается от $x_2(0)$, а $y_1(0)$ от $y_2(0)$, тем шире область отсутствия полной синхронизации на графике $R(\varphi_0)$.

Кроме коэффициента R мы использовали еще одну меру, характеризующую близость траекторий первого и второго осциллятора:

$$D = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left((x_2(t_j) - x_1(t_j))^2 + (y_2(t_j) - y_1(t_j))^2 \right), \quad (4)$$

где j – номер точки временного ряда, L – количество точек. Чем ближе временные реализации осцилляторов друг к другу, тем меньше абсолютная величина D . При полной синхронизации осцилляторов $D = 0$.

На рис. 2, *b* построены зависимости $D(\varphi_0)$ для тех же случаев, что и на рис. 2, *a*, и $L = 100000$, соответствующем такому же количеству точек, как на интервале времени $T_2 = 1000$ на рис. 2, *a*. Видно, что между зависимостями $R(\varphi_0)$ и $D(\varphi_0)$ имеется высокая корреляция:

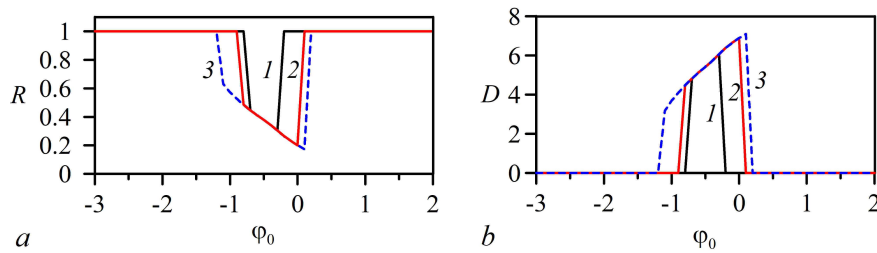


Рис. 2. Зависимости $R(\varphi_0)$ (a) и $D(\varphi_0)$ (b) при $k = 0.005$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (кривая 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.5, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.4$ (кривая 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (кривая 3)

Fig. 2. Dependences $R(\varphi_0)$ (a) and $D(\varphi_0)$ (b) for $k = 0.005$ and $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (curve 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.5, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.4$ (curve 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (curve 3)

провалам на $R(\varphi_0)$ соответствуют подъемы на $D(\varphi_0)$ в тех же самых диапазонах изменения φ_0 . Поэтому, далее мы будем использовать только коэффициент R в качестве иллюстрации меры синхронизации осцилляторов.

Рассмотрим теперь зависимость коэффициента R от величины коэффициента связи k . На рис. 3, a приведены зависимости $R(k)$, построенные для различных значений φ_0 . Начиная уже с малых положительных значений k , величина R достигает максимального значения $R = 1$, что указывает на полную синхронизацию осцилляторов. Однако при дальнейшем увеличении k коэффициент R уменьшается до малых значений. То есть с ростом силы связи осцилляторов наблюдается разрушение режима синфазной синхронизации, а вместо него возникает режим несинфазных колебаний. Далее, с ростом k опять устанавливается режим полной (синфазной) синхронизации осцилляторов. Отметим, что при положительных значениях φ_0 характерный провал на графике $R(k)$ исчезает и $R = 1$ как при малых, так и при высоких значениях k .

Вид графиков $R(k)$ зависит не только от начальных условий φ_0 , но и от начальных условий $x_i(0)$ и $y_i(0)$. На рис. 3, b построены графики $R(k)$ для случаев $x_1(0) \neq x_2(0), y_1(0) \neq y_2(0)$ при $\varphi_0 = -0.5$. Так же, как и на графиках $R(\varphi_0)$ на рис. 2, a, ширина области малых значений R на графиках $R(k)$, соответствующей отсутствию полной синхронизации, увеличивается с ростом разницы между значениями $x_1(0)$ и $x_2(0)$, и $y_1(0)$ и $y_2(0)$ (рис. 3, b).

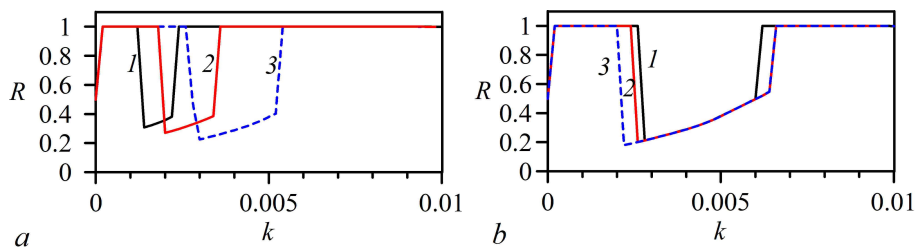


Рис. 3. a – Зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -1.5$ (кривая 1), $\varphi_0 = -1$ (кривая 2), $\varphi_0 = -0.5$ (кривая 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2, y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. b – Зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (кривая 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 1, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.5$ (кривая 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (кривая 3)

Fig. 3. a – Dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -1.5$ (curve 1), $\varphi_0 = -1$ (curve 2), $\varphi_0 = -0.5$ (curve 3) при $x_1(0) = x_2(0) = 0.2, y_1(0) = y_2(0) = 0.1$. b – Dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -0.5$ и $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.3$ (curve 1), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 1, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 0.5$ (curve 2), $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 2, y_1(0) = 0.1, y_2(0) = 1$ (curve 3)

Качественно похожие результаты получаются в случае малой расстройки осцилляторов по параметру ε_i . Вид зависимостей $R(\varphi_0)$ и $R(k)$ при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ похож на приведенные выше аналогичные графики при расстройке осцилляторов по параметру γ_i .

Рассмотрим отдельно случай $b = 0$, соответствующий диффузионной связи осцилляторов. На рис. 4, *a* приведена зависимость $R(k)$ при тех же значениях параметров, что на рис. 3, *a*, построенном для мемристивной связи. Величина R медленно монотонно растет с ростом k , не демонстрируя никаких провалов. На рис. 4, *b* показаны временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $k = 0.005$. Осцилляторы при этом не синхронизованы по частоте и демонстрируют несинхронный режим двухчастотных биений. Проекция колебаний связанной системы на плоскость (x_1, x_2) для этого случая приведена на рис. 4, *c*. При $k = 0.1$ колебания осцилляторов еще не полностью синхронизованы, $R = 0.99$ (рис. 4, *d*). В этом случае осцилляторы демонстрируют близкие к синфазным колебания, имеющие очень малый сдвиг по фазе. Проекция траектории системы на плоскость (x_1, x_2) принимает вид диагональной линии лишь при $k = 2$ (при этом $R = 1$), что соответствует полностью синхронным синфазным колебаниям. Таким образом, при диффузионной связи требуются более высокие значения коэффициента связи k для синхронизации неидентичных осцилляторов.

Кроме численных исследований модельной системы (1) мы провели ее экспериментальное исследование. Для этого, используя идеологию аналогового моделирования, мы построили аналоговые радиотехнические генераторы типа ФитцХью–Нагумо, динамика которых описывается первыми двумя уравнениями системы (1) при $k = 0$. Для осуществления связи между генераторами была использована система ввода-вывода многоканальных данных National Instruments. Блок-схема экспериментальной установки и ее подробное описание приведены в работе [21]. Однако, в отличие от [21], где была программным образом реализована простая диффузионная связь между радиотехническими генераторами, соответствующая связи генераторов через резистор, в данной работе впервые реализована в цифровом виде мемристивная связь аналоговых генераторов. Поскольку сигналы, отвечающие за связь генераторов, формируются в экспериментальной установке программным образом, в ней достаточно легко реализовать изменяющуюся во времени взаимную связь генераторов.

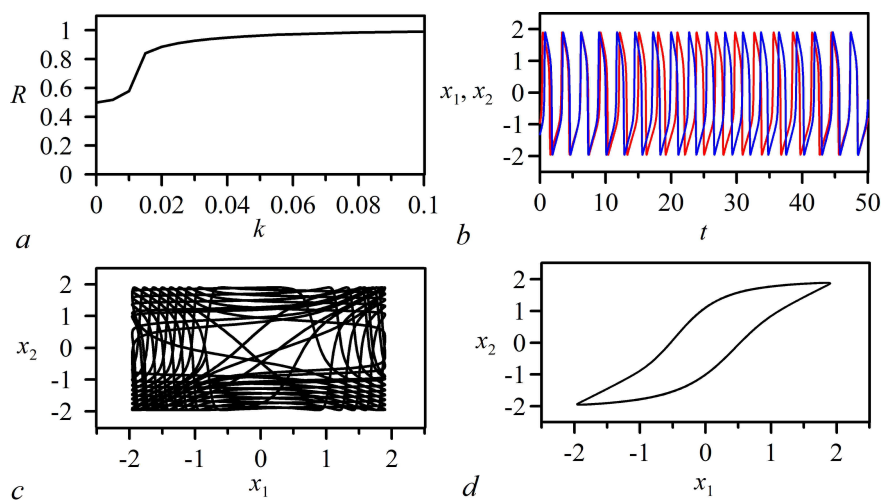


Рис. 4. Случай диффузионной связи ($b = 0$). *a* – Зависимость $R(k)$. *b* – Временные реализации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при $k = 0.005$. *c* – Проекция колебаний в случае несинхронного режима при $k = 0.005$. *d* – Проекция колебаний в случае почти синфазного режима при $k = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Case of diffusive coupling ($b = 0$). *a* – Dependence $R(k)$. *b* – Temporal realizations of $x_1(t)$ and $x_2(t)$ at $k = 0.005$. *c* – Projection of oscillations in the case of non-synchronous regime at $k = 0.005$. *d* – Projection of oscillations in the case of almost in-phase regime at $k = 0.1$ (color online)

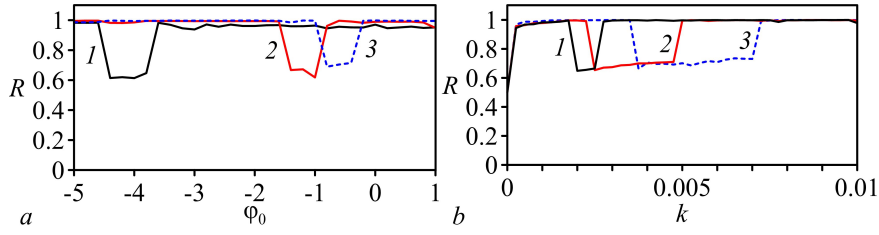


Рис. 5. *a* – Экспериментальные зависимости $R(\varphi_0)$ при $k = 0.0005$ (кривая 1), $k = 0.0025$ (кривая 2), $k = 0.005$ (кривая 3). *b* – Экспериментальные зависимости $R(k)$ при $\varphi_0 = -1.5$ (кривая 1), $\varphi_0 = -1$ (кривая 2), $\varphi_0 = -0.5$ (кривая 3)

Fig. 5. *a* – Experimental dependences $R(\varphi_0)$ for $k = 0.0005$ (curve 1), $k = 0.0025$ (curve 2), $k = 0.005$ (curve 3). *b* – Experimental dependences $R(k)$ for $\varphi_0 = -1.5$ (curve 1), $\varphi_0 = -1$ (curve 2), $\varphi_0 = -0.5$ (curve 3)

Экспериментально полученные зависимости $R(\varphi_0)$ приведены на рис. 5, *a* при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1.05$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.05$, $\beta = 0.2$, $a = 1$, $b = 1$ для трех различных значений k при $x_1(0) = x_2(0)$, $y_1(0) = y_2(0)$. Вид этих зависимостей качественно согласуется с графиками $R(\varphi_0)$, построенными на рис. 1, *a* при численном исследовании системы (1). На рис. 5, *b* приведены экспериментальные зависимости $R(k)$, построенные для различных значений φ_0 , которые тоже достаточно хорошо согласуются с численными результатами, представленными на рис. 3, *a*.

2. Синхронизация колебаний в кольце мемристорно связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим теперь ансамбль осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных в кольцо мемристоривной связью, описываемых модельными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \dot{x}_i(t) &= x_i(t) - x_i^3(t)/3 - y_i(t) + k[M(\varphi_{i-1}(t))(x_{i-1}(t) - x_i(t)) + M(\varphi_i(t))(x_{i+1}(t) - x_i(t))], \\ \dot{y}_i(t) &= \gamma_i x_i(t) - y_i(t) + \beta, \\ \dot{\varphi}_i(t) &= x_i(t) - x_{i+1}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где, в отличие от системы (1), $i = 1, \dots, N$, а граничные условия $x_{i+N}(t) = x_N(t)$, где N – количество осцилляторов. Вид функции $M(\varphi_i(t)) = a + b\varphi_i^2(t)$ такой же, как в (1), с такими же значениями параметров $a = 1$, $b = 1$. В общем случае все осцилляторы ансамбля являются неидентичными.

В качестве меры синхронизации осцилляторов использовался коэффициент R , рассчитываемый по следующим формулам [30]:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \\ R &= \frac{\langle x_s^2 \rangle - \langle x_s \rangle^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так же, как и в случае двух осцилляторов (формула (3)), при полной синхронизации осцилляторов коэффициент R максимален и равен 1, а в случаях несинхронных или несинфазных колебаний осцилляторов R принимает малые положительные значения [30]. Для неидентичных осцилляторов при $k = 0$ коэффициент $R = 1/N$ и стремится к нулю при больших N . Для расчета R мы проводили усреднение на интервале времени $T_2 = 1000$.

Пусть осцилляторы расстроены по параметру γ_i , значения которого заданы случайным образом из интервала $[1, 1.05]$ и соответствуют периодическим автоколебаниям несвязанных осцилляторов. Остальные параметры осцилляторов одинаковы: $\varepsilon_i = 0.05$ для всех i , $\beta = 0.2$.

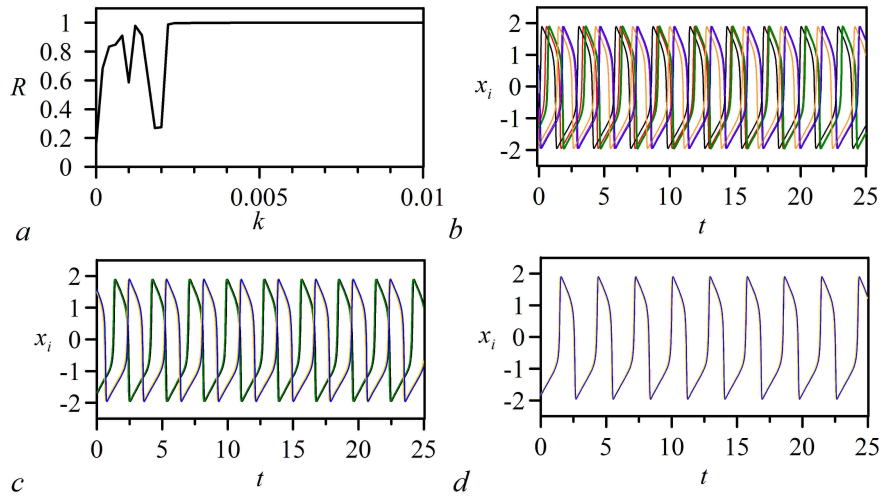


Рис. 6. Зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для $N = 6$ (a) и временные реализации $x_i(t)$ при $k = 0.0001$ (b), $k = 0.002$ (c) и $k = 0.003$ (d) (цвет онлайн)

Fig. 6. Dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ and $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ for $N = 6$ (a) and temporal realizations of $x_i(t)$ at $k = 0.0001$ (b), $k = 0.002$ (c) and $k = 0.003$ (d) (color online)

На рис. 6, a построена зависимость $R(k)$ для случая $N = 6$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для всех i . Как и в случае двух осцилляторов (см. рис. 3), зависимость $R(k)$ на рис. 6 имеет характерный интервал значений k , при которых коэффициент R относительно мал. Однако в отличие от рис. 3, хорошо видна область малых значений k , при которых R относительно мал и еще не достиг значения $R = 1$, соответствующего полной синхронизации осцилляторов в ансамбле. Эта область малых k соответствует несинхронным колебаниям осцилляторов, как в случае, изображенном на рис. 4, b. Временные реализации $x_i(t)$ несинхронных осцилляторов приведены на рис. 6, b при $k = 0.0001$.

На рис. 6, c приведены временные реализации $x_i(t)$ при $k = 0.002$ (при этом $R = 0.27$). Осцилляторы в этом случае синхронизованы по частоте, но демонстрируют несинфазные колебания. В кольце существуют два кластера, внутри которых осцилляторы колеблются почти синфазно, а между кластерами имеется фазовый сдвиг. При $k = 0.003$ коэффициент $R = 1$ и все осцилляторы полностью синхронизованы. Их временные реализации при этом практически совпадают (рис. 6, d).

Когда количество неидентичных осцилляторов в кольце становится достаточно большим, вид зависимости $R(k)$ меняется. Например, при $N = 10$ она становится сильно изрезанной в области малых значений k , предшествующих достижению коэффициентом R максимального значения (рис. 7, a). Этот рисунок построен при тех же параметрах и начальных состояниях $x_i(0)$

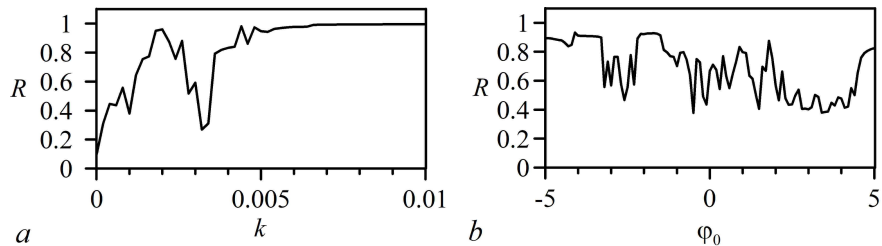


Рис. 7. a – Зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ и $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ для $N = 10$. b – Зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для $N = 10$

Fig. 7. a – Dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ and $x_i(0) = 0.2$, $y_i(0) = 0.1$ for $N = 10$. b – Dependence $R(\varphi_0)$ at $k = 0.001$ for $N = 10$

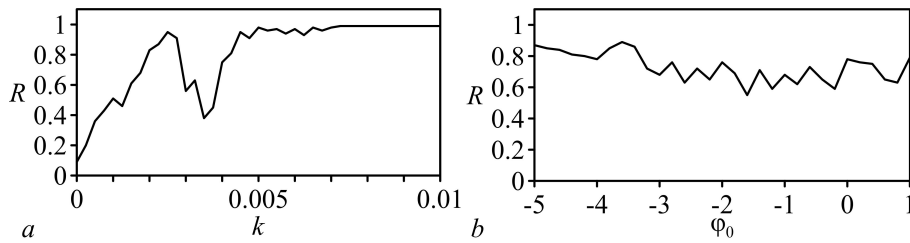


Рис. 8. *a* – Экспериментальная зависимость $R(k)$ при $\varphi_0 = -0.5$ для $N = 10$. *b* – Экспериментальная зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для $N = 10$

Fig. 8. Experimental dependence $R(k)$ at $\varphi_0 = -0.5$ for $N = 10$. *b* – Experimental dependence $R(\varphi_0)$ at $k = 0.001$ for $N = 10$

и $y_i(0)$, что и рис. 6, *a*. Изрезанный характер зависимости $R(k)$ объясняется тем, что для полной синхронизации большого числа неидентичных осцилляторов требуются более высокие значения коэффициента связи, а при малых k может наблюдаться кластерная синхронизация осцилляторов.

На рис. 7, *b* построена зависимость $R(\varphi_0)$ при $k = 0.001$ для кольца из 10 осцилляторов. По сравнению со случаем двух осцилляторов (см. рис. 1, *a*) зависимость $R(\varphi_0)$ на рис. 7, *b* имеет сильно изрезанный вид, а R всюду меньше 1, что объясняется отсутствием полной синхронизации осцилляторов при любых значениях φ_0 для выбранного значения силы связи k .

Мы рассмотрели также случаи, когда начальные состояния переменных $x_i(t)$ и $y_i(t)$ осцилляторов в цепочке отличаются. Начальные условия для $x_i(0)$ и $y_i(0)$ задавались случайным образом в диапазонах $[0.2, 2]$ и $[0.1, 1]$, соответственно. При этом вид зависимостей $R(k)$ и $R(\varphi_0)$ несколько изменился, однако каких-либо качественных отличий от зависимостей, представленных на рис. 7, не наблюдалось.

Экспериментальные зависимости $R(k)$ и $R(\varphi_0)$ представлены на рис. 8. Они качественно похожи на аналогичные зависимости на рис. 7, полученные при численном моделировании.

Заключение

Нами проведено численное и экспериментальное исследование синхронизации в кольце мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Показано, что при мемристивной связи осцилляторов ФитцХью–Нагумо их синхронизация зависит не только от величины коэффициента связи, но и от начальных состояний как самих осцилляторов, так и переменных, отвечающих за мемристивную связь. Исследованы особенности синхронизации в зависимости от числа осцилляторов в кольце. Установлено, что зависимость синхронизации от начальных состояний осцилляторов более выражена в кольце с малым числом элементов, при этом, чем больше отличаются начальные состояния разных осцилляторов, тем сложнее добиться полной синхронизации всех осцилляторов ансамбля. Для полной синхронизации неидентичных осцилляторов в кольце с большим числом элементов требуются более высокие значения коэффициента связи, чем для кольца из малого числа элементов. Показано, что, в отличие от случая диффузионной связи осцилляторов, при мемристивной связи с ростом силы связи осцилляторов может наблюдаться разрушение режима полностью синхронных синфазных колебаний, вместо которого возникает режим несинфазных колебаний. Результаты, полученные в радиофизическом эксперименте для кольца из аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, связанных реализованной в цифровом виде мемристивной связью, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Задача управления синхронизацией в ансамблях нейронных осцилляторов актуальна для многих приложений. Причем в одних случаях синхронизация играет положительную роль, а в других случаях является нежелательной. Например, в робототехнике при разработке центральных генераторов ритма важно обеспечить синфазную синхронизацию элементов ансамбля в широкой

области управляющих параметров, а чрезмерная синхронизация нейронов головного мозга может вызывать такие неврологические заболевания, как эпилепсия, шизофрения и болезнь Паркинсона. Поэтому большой интерес вызывает как задача синфазной синхронизации колебаний в ансамбле связанных нейроподобных осцилляторов, так и задача разрушения режима синхронизации.

Решению этих задач может помочь использование мемристивной связи осцилляторов. Полная (синфазная) синхронизация в ансамбле мемристивно связанных осцилляторов наступает при меньших значениях постоянного коэффициента связи k , чем в ансамбле диффузионно связанных осцилляторов. То есть с помощью мемристивной связи легче синхронизовать нейроподобные осцилляторы. С другой стороны, не меняя силу связи k , можно добиться разрушения синфазных колебаний осцилляторов, изменив начальные условия динамических переменных.

Список литературы

1. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review // *Brain Sciences*. 2022. Vol. 12, no. 7. P. 863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Quiroga R. Q., Panzeri S. Principles of Neural Coding. Boca Raton: CRC Press, 2013. 664 p.
3. Kasabov N. Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer, 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
4. Lobov S., Mironov V., Kastalskiy I., Kazantsev V. A spiking neural network in sEMG feature extraction // *Sensors*. 2015. Vol. 15, no. 11. P. 27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
5. Lobov S.A., Chernyshov A.V., Krilova N.P., Shamshin M.O., Kazantsev V.B. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2000. Vol. 20, no. 2. P. 500. DOI: 10.3390/s20020500.
6. Virgilio G. C. D., Sossa A. J. H., Antelis J. M., Falcón L. E. Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals // *Neural Netw.* 2020. Vol. 122. P. 130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
7. Andreev A. V., Ivanchenko M. V., Pisarchik A. N., Hramov A. E. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 139. P. 110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
8. Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // *Известия вузов. ПНД*. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
9. Hossain M. S., Muhammad G. Emotion recognition using deep learning approach from audio–visual emotional big data // *Information Fusion*. 2019. Vol. 49. P. 69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
10. Yu D., Deng L. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer, 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
11. Bing Z., Meschede C., Röhrbein F., Huang K., Knoll A. C. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks // *Frontiers in Neurorobotics*. 2018. Vol. 12. P. 35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
12. Wang X., Hou Z.-G., Lv F., Tan M., Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks // *Neurocomputing*. 2014. Vol. 134. P. 230–238. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
13. Chou T.-S., Bucci L. D., Krichmar J. L. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex // *Frontiers in Neurorobotics*. 2015. Vol. 9. P. 6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
14. Lobov S. A., Mikhaylov A. N., Shamshin M., Makarov V. A., Kazantsev V. B. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot // *Frontiers in Neuroscience*. 2020. Vol. 14. P. 88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
15. Yi Z., Lian J., Liu Q., Zhu H., Liang D., Liu J. Learning rules in spiking neural networks: A survey // *Neurocomputing*. 2023. Vol. 531. P. 163–179. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.02.026.

16. *Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С., Некоркин В. И.* Нелинейные динамические модели нейронов: обзор // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
17. *Shepelev I. A., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 38. P. 206–217. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.020.
18. *Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // Physics Letters A. 2017. Vol. 381, no. 16. P. 1398–1404. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.034.
19. *Shepelev I. A., Shamshin D. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E.* Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling // Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol. 104. P. 153–160. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.009.
20. *Plotnikov S. A., Fradkov A. L.* On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks // Chaos, Solitons & Fractals. 2019. Vol. 121. P. 85–91. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.02.006.
21. *Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E.* Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 98, no. 1. P. 735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
22. *Plotnikov S. A., Lehnert J., Fradkov A. L., Schöll E.* Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes // Int. J. Bifurc. Chaos. 2016. Vol. 26, no. 4. P. 1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.
23. *Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Адаптивное управление несинхронными колебаниями в сети идентичных электронных нейроподобных генераторов // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 19. С. 43–46. DOI: 10.21883/PJTF.2022.19.53596.19328.
24. *Корнеев И. А., Слепнев А. В., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.* Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 324–340. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
25. *Wang C., Lv M., Alsaedi A., Ma J.* Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network // Chaos. 2017. Vol. 27, no. 11. P. 113108. DOI: 10.1063/1.5004234.
26. *Xu F., Zhang J., Jin M., Huang S., Fang T.* Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 94, no. 2. P. 775–783. DOI: 10.1007/s11071-018-4393-9.
27. *Usha K., Subha P. A.* Collective dynamics and energy aspects of star-coupled Hindmarsh–Rose neuron model with electrical, chemical and field couplings // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 96, no. 3. P. 2115–2124. DOI: 10.1007/s11071-019-04909-7.
28. *Bao H., Zhang Y., Liu W., Bao B.* Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera // Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 100, no. 1. P. 937–950. DOI: 10.1007/s11071-020-05529-2.
29. *Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E.* The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 147. P. 110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
30. *Xu Y., Jia Y., Ma J., Alsaedi A., Ahmad B.* Synchronization between neurons coupled by memristor // Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol. 104. P. 435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
31. *Герасимова С. А., Михайлов А. Н., Белов А. И., Королев Д. С., Горшков О. Н., Казанцев В. Б.* Имитация синаптической связи нейроноподобных генераторов с помощью мемристивного устройства // ЖТФ. 2017. Т. 87, № 8. С. 1248–1254. DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44735.2033.
32. *Chua L.* Memristor-The missing circuit element // IEEE Transactions on Circuit Theory. 1971. Vol. 18, no. 5. P. 507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.

33. *Chua L. O., Kang S. M.* Memristive devices and systems // Proceedings of the IEEE. 1976. Vol. 64, no. 2. P. 209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092.
34. *Strukov D. B., Snider G. S., Stewart D. R., Williams R. S.* The missing memristor found // Nature. 2008. Vol. 453, no. 7191. P. 80–83. DOI: 10.1038/nature06932.
35. *Patterson G. A., Fierens P. I., García A. A., Grosz D. F.* Numerical and experimental study of stochastic resistive switching // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87, no. 1. P. 012128. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.012128.

References

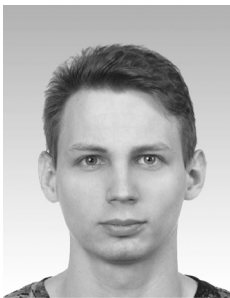
1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*. 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Quiroga RQ, Panzeri S. Principles of Neural Coding. Boca Raton: CRC Press; 2013. 664 p.
3. Kasabov N. Evolving Connectionist Systems: The Knowledge Engineering Approach. London: Springer; 2007. 451 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-347-5.
4. Lobov S, Mironov V, Kastalskiy I, Kazantsev V. A spiking neural network in sEMG feature extraction. *Sensors*. 2015;15(11):27894–27904. DOI: 10.3390/s151127894.
5. *Lobov SA, Chernyshov AV, Krilova NP, Shamshin MO, Kazantsev VB.* Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // *Sensors*. 2000;20(2):500. DOI: 10.3390/s20020500.
6. Virgilio GCD, Sossa AJH, Antelis JM, Falcón LE. Spiking Neural Networks applied to the classification of motor tasks in EEG signals. *Neural Netw*. 2020;122:130–143. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.09.037.
7. Andreev AV, Ivanchenko MV, Pisarchik AN, Hramov AE. Stimulus classification using chimera-like states in a spiking neural network. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;139:110061. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061.
8. Navrotskaya EV, Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):495–512. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512.
9. Hossain MS, Muhammad G. Emotion recognition using deep learning approach from audio–visual emotional big data. *Information Fusion*. 2019;49:69–78. DOI: 10.1016/j.inffus.2018.09.008.
10. Yu D, Deng L. Automatic Speech Recognition: A Deep Learning Approach. London: Springer; 2015. 321 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-5779-3.
11. Bing Z, Meschede C, Röhrbein F, Huang K, Knoll AC. A survey of robotics control based on learning-inspired spiking neural networks. *Frontiers in Neurorobotics*. 2018;12:35. DOI: 10.3389/fnbot.2018.00035.
12. Wang X, Hou Z-G, Lv F, Tan M, Wang Y. Mobile robots' modular navigation controller using spiking neural networks. *Neurocomputing*. 2014;134:230–238. DOI: 10.1016/j.neucom.2013.07.055.
13. Chou T-S, Bucci LD, Krichmar JL. Learning touch preferences with a tactile robot using dopamine modulated STDP in a model of insular cortex. *Frontiers in Neurorobotics*. 2015;9:6. DOI: 10.3389/fnbot.2015.00006.
14. Lobov SA, Mikhaylov AN, Shamshin M, Makarov VA, Kazantsev VB. Spatial properties of STDP in a self-learning spiking neural network enable controlling a mobile robot. *Frontiers in Neuroscience*. 2020;14:88. DOI: 10.3389/fnins.2020.00088.
15. Yi Z, Lian J, Liu Q, Zhu H, Liang D, Liu J. Learning rules in spiking neural networks: A survey. *Neurocomputing*. 2023;531:163–179. DOI: 10.1016/j.neucom.2023.02.026.
16. Dmitrichev AS, Kasatkin DV, Klinshov VV, Kirillov SY, Maslennikov OV, Shchapin DS, Nekorkin VI. Nonlinear dynamical models of neurons: Review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018;26(4):5–58. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58.
17. Shepelev IA, Slepnev AV, Vadivasova TE. Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions.

- Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016;38:206–217. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.02.020.
18. Shepelev IA, Vadivasova TE, Bukh AV, Strelkova GI, Anishchenko VS. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Physics Letters A*. 2017;381(16):1398–1404. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.02.034.
 19. Shepelev IA, Shamshin DV, Strelkova GI, Vadivasova TE. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:153–160. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.08.009.
 20. Plotnikov SA, Fradkov AL. On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019;121:85–91. DOI: 10.1016/j.chaos.2019.02.006.
 21. Kulminskiy DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD, Hramov AE. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dynamics*. 2019;98(1):735–748. DOI: 10.1007/s11071-019-05224-x.
 22. Plotnikov SA, Lehnert J, Fradkov AL, Schöll E. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 2016;26(4):1650058. DOI: 10.1142/S0218127416500589.
 23. Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Adaptive control of non-synchronous oscillations in a network of identical electronic neuron-like generators. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(10):38–41. DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328.
 24. Korneev IA, Slepnev AV, Semenov VV, Vadivasova TE. Wave processes in a ring of memristively coupled self-excited oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(3):324–340 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
 25. Wang C, Lv M, Alsaedi A, Ma J. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network. *Chaos*. 2017;27(11):113108. DOI: 10.1063/1.5004234.
 26. Xu F, Zhang J, Jin M, Huang S, Fang T. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks. *Nonlinear Dynamics*. 2018;94(2):775–783. DOI: 10.1007/s11071-018-4393-9.
 27. Usha K, Subha PA. Collective dynamics and energy aspects of star-coupled Hindmarsh–Rose neuron model with electrical, chemical and field couplings. *Nonlinear Dynamics*. 2019;96(3):2115–2124. DOI: 10.1007/s11071-019-04909-7.
 28. Bao H, Zhang Y, Liu W, Bao B. Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera. *Nonlinear Dynamics*. 2020;100(1):937–950. DOI: 10.1007/s11071-020-05529-2.
 29. Korneev IA, Semenov VV, Slepnev AV, Vadivasova TE. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;147:110923. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110923.
 30. Xu Y, Jia Y, Ma J, Alsaedi A, Ahmad B. Synchronization between neurons coupled by memristor. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017;104:435–442. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.002.
 31. Gerasimova SA, Mikhaylov AN, Belov AI, Korolev DS, Gorshkov ON, Kazantsev VB. Simulation of synaptic coupling of neuron-like generators via a memristive device. *Tech. Phys.* 2017;62(8):1259–1265. DOI: 10.1134/S1063784217080102.
 32. Chua L. Memristor-The missing circuit element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*. 1971;18(5):507–519. DOI: 10.1109/TCT.1971.1083337.
 33. Chua LO, Kang SM. Memristive devices and systems. *Proceedings of the IEEE*. 1976;64(2):209–223. DOI: 10.1109/PROC.1976.10092.
 34. Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, Williams RS. The missing memristor found. *Nature*. 2008;453(7191):80–83. DOI: 10.1038/nature06932.
 35. Patterson GA, Fierens PI, García AA, Grosz DF. Numerical and experimental study of stochastic resistive switching. *Phys. Rev. E*. 2013;87(1):012128. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.012128.



Навроцкая Елена Владимировна — родилась в Алма-Ате (1987), республика Казахстан. Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2011) по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2016, СГУ). Работает в Саратовском университете с 2008 года, в настоящее время — в должности доцента кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Автор более 15 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: sidakev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1649-440X
AuthorID (eLibrary.Ru): 542544



Курбако Александр Васильевич — родился в Знаменске (1997). Окончил бакалавриат (2019) и магистратуру (2021) Саратовского государственного университета по направлению «Биотехнические системы и технологии». Обучается в аспирантуре СГУ имени Н. Г. Чернышевского. Работает ассистентом на кафедре динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ и младшим научным сотрудником СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов — анализ временных рядов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН
E-mail: kurbako.sasha@mail.ru
ORCID: 0000-0002-3479-4609
AuthorID (eLibrary.Ru): 1055278



Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (СГУ, 1982). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985