УДК 537.86

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СВОЙСТВ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОБЩЕГО ПОЛЯ НА КОЛЛЕКТИВНУЮ ДИНАМИКУ ГЛОБАЛЬНО СВЯЗАННЫХ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Д.Д. Кульминский[1,2], *В.И. Пономаренко*[1,2], *М.Д. Прохоров*[1]

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
[2]Саратовский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com,
mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.08.2017, после доработки 27.10.2017

Исследованы особенности коллективной динамики осцилляторов в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, глобально связанных между собой через общее поле. Такие ансамбли связанных осцилляторов существуют в объектах живой и неживой природы, включая физические, химические и биологические системы. Рассмотрено влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов. Показано, что разнообразие колебательных режимов в ансамбле обусловлено тем, что бистабильные состояния парциальных элементов имеют существенно различающиеся основные частоты колебаний. При соответствующем выборе параметров общего поля это позволяет обеспечить разную величину фазового сдвига сигнала общего поля для осцилляторов, находящихся в различных колебательных режимах. Показано, что при определенном задании начальных условий в исследуемом ансамбле любого числа элементов формируется два кластера, каждый из которых в зависимости от величины фазового сдвига сигнала общего поля может демонстрировать как синхронное, так и несинхронное поведение входящих в него элементов. В случае, когда связь оказывается притягивающей для элементов одного кластера и отталкивающей для элементов другого кластера, в ансамбле возникает состояние «химера», при котором в ансамбле одновременно сосуществуют кластер с синхронным и кластер с несинхронным поведением элементов. Полученные результаты могут оказаться востребованными при решении задачи управления колебательными режимами в сети глобально связанных осцилляторов в ситуациях, когда имеется возможность изменять параметры общего поля.

Ключевые слова: ансамбли связанных осцилляторов, кластеризация, синхронизация, системы с запаздыванием.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Образец цитирования: Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику глобально связанных бистабильных осцилляторов с запаздыванием // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 1. С. 4–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

INFLUENCE OF INERTIAL PROPERTIES AND DELAY OF THE MEAN FIELD ON THE COLLECTIVE DYNAMICS OF GLOBALLY COUPLED BISTABLE DELAYED-FEEDBACK OSCILLATORS

D. D. Kulminskiy[1,2], *V. I. Ponomarenko*[1,2], *M. D. Prokhorov*[1]

[1] Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics
of Russian Academy of Sciences, Saratov Branch
38, Zelyonaya, 410019 Saratov, Russia
[2]Saratov State University
83, Astrakhanskaya, 410012 Saratov, Russia
E-mail: kulminskydd@gmail.com, ponomarenkovi@gmail.com,
mdprokhorov@yandex.ru
Received 16.08.2017, revised 27.10.2017

The features of collective dynamics of oscillators are studied in an ensemble of identical bistable time-delay systems globally coupled via the mean field. The influence of inertial proper-ties and delay of the mean field on the collective dynamics of oscillators is considered. It is shown that a variety of oscillation regimes in the ensemble is caused by the presence of bistable states with considerably different basic frequencies in coupled oscillators. Under the correspond-ing choice of the mean field parameters, it allows us to ensure different phase shifts of the mean field signal for oscillators in different regimes of oscillations. It is shown that under a specific choice of initial conditions, two clusters are formed in the ensemble. Depending on the phase shift of the mean field, each of these clusters can contain either synchronous or asynchronous oscillators. If the coupling is attractive for oscillators in one cluster and repulsive for oscillators in another cluster, a chimera state takes place in the ensemble, in which a cluster with synchronized oscillators coexists with a cluster with non-synchronized oscillators. The obtained results can be useful for solving the problem of controlling the oscillation regimes in the networks of globally coupled oscillators in situations, where it is possible to vary the mean field parameters.

Key words: ensembles of coupled oscillators, clusterization, synchronization, time-delay systems.

DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

References: Kulminskiy D.D., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Influence of inertial properties and delay of the mean field on the collective dynamics of globally coupled bistable delayed-feedback oscillators. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 4–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Введение

Исследование пространственно-временной динамики ансамблей осцилляторов давно привлекает внимание многих авторов [1, 2]. При ее изучении были обнаружены многие нелинейные явления, включая образование различных структур, кластеризацию и синхронизацию. В гетерогенных ансамблях осцилляторов были найдены режимы, при которых осцилляторы с близкими частотами синхронизуются между собой, а осцилляторы с существенно отличающимися частотами совершают несинхронные колебания, что приводит к одновременному существованию в ансамбле кластеров с синхронным и несинхронным поведением осцилляторов. Существование таких режимов в ансамблях, состоящих из идентичных осцилляторов, считалось невозможным. Лишь недавно было показано, что и в ансамблях идентичных осцилляторов возможно состояние, при котором часть элементов ансамбля совершает синхронные колебания, а другая часть элементов колеблется несинхронно [3]. Такое состояние было названо состоянием «химера» [4].

Состояния «химера» были сначала обнаружены в ансамблях идентичных фазовых осцилляторов со слабой нелокальной связью элементов [4]. Потом было показано, что состояния «химера» можно наблюдать и в ансамблях осцилляторов с локальной связью (только с ближайшими соседями) [5] и в ансамблях осцилляторов с глобальной связью [6]. Помимо ансамблей фазовых осцилляторов состояния «химера» были обнаружены в ансамблях, состоящих из других осцилляторов [7–9], и в ансамблях связанных отображений [10]. Теоретическому, численному и экспериментальному исследованию состояний «химера» в последние годы было посвящено большое количество публикаций [11–19].

В настоящей работе исследованы особенности коллективной динамики, в том числе состояния «химера», в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, а также в случае глобально связанных между собой через общее поле. Глобальная связь осцилляторов, приводящая к их синхронизации, является достаточно распространенной в многоэлементных системах различной природы, включая группы насекомых [20], живые клетки [21], аплодисменты зрителей в больших аудиториях [22], пешеходы на мосту [23], электрохимические осцилляторы [24], а запаздывание присуще многим объектам и процессам в природе [25]. Рассмотрены различные способы формирования общего поля, осуществляющего глобальную связь осцилляторов, и исследовано влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов.

1. Колебательные режимы в ансамбле бистабильных систем с запаздыванием, связанных через общее поле

Рассмотрим ансамбль, которой состоит из идентичных систем с задержкой, описываемых в отсутствие связи дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\tau)), \tag{1}$$

где ε – параметр инерционности, τ – время запаздывания, f – нелинейная функция. В общем случае уравнение (1) является математической моделью осциллятора, представляемого кольцом из трех идеализированных элементов: задержки, нелинейного и инерционного (рис. 1).

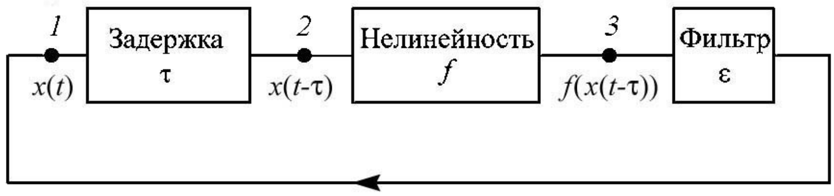

Рис. 1. Блок-схема кольцевой системы с запаздывающей обратной связью. Цифрами *1–3* отмечены точки, в которые можно подать внешнее воздействие

Fig. 1. Block diagram of a ring system with time-delayed feedback. Numerals *1–3* denote points in which an external signal can be fed into the system

Пусть нелинейный элемент осциллятора описывается кубической нелинейной функцией

$$f(x) = a + b(x - d) - c(x - d)^3. \quad (2)$$

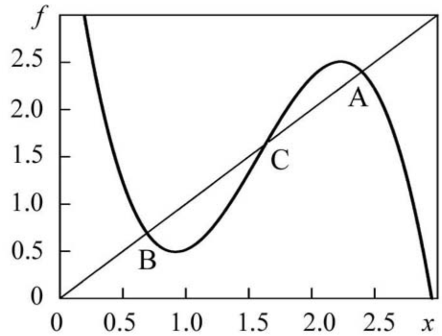

Рис. 2. График кубической функции (2) при $a = 1.5$, $b = 2.3$, $c = 1.78$, $d = 1.57$. Буквами A, B и C обозначены неустойчивые неподвижные точки

Fig. 2. Plot of cubic function (2) at $a = 1.5$, $b = 2.3$, $c = 1.78$ and $d = 1.57$. A, B, and C are unstable fixed points

При такой нелинейности, в зависимости от начальных условий осциллятор может совершать два вида колебаний, демонстрируя бистабильность. Эти колебания происходят вблизи неустойчивых неподвижных точек (рис. 2), которые обозначены буквами A и B. Вблизи точки A наблюдаются периодические колебания на основной моде, частота которых близка к величине $\nu_1 = 1/(2\tau)$. Около точки B реализуются хаотические колебания на третьей гармонике основной моды, основная частота которых близка к величине $\nu_2 = 3/(2\tau)$. Характерный вид временных реализаций периодических и хаотических колебаний осциллятора в области бистабильности будет рассмотрен ниже.

Качественно похожие режимы периодических и хаотических колебаний наблюдаются в системах с запаздыванием (1), имеющих синусоидальную нелинейность. Подробное исследование колебательных режимов, соответствующих фундаментальному решению и решениям на высших гармониках для уравнения (1) с синусной функцией f, а также вычисление периодов (частот), возникающих в системе колебаний, проведено в [26].

Осцилляторы с запаздыванием (1) свяжем между собой через общее поле $G(t)$, которое действует на каждый элемент ансамбля и осуществляет глобальную связь между элементами. Сигнал $G(t)$ можно подать в различные точки кольцевого осциллятора с запаздыванием [26], обозначенные на рис. 1 цифрами *1*, *2* и *3*. При этом динамика каждого из осцилляторов ансамбля описывается одним из следующих уравнений:

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f\left(x_i(t-\tau) + kG(t-\tau)\right), \quad (3)$$

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f\left(x_i(t-\tau) + kG(t)\right), \quad (4)$$

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f\left(x_i(t-\tau)\right) + kG(t), \quad (5)$$

где $i = 1, \ldots, N$, N – число элементов в ансамбле, k – коэффициент связи. Осциллятор описывается: уравнением (3), если сигнал $G(t)$ воздействует на систему с запаздыванием в точке *1*; уравнением (4), если $G(t)$ подается в точке *2*; уравнением (5), если $G(t)$ подается в точке *3*.

1. В наиболее простом случае общее поле формируется путем сложения сигналов $x_i(t)$ всех осцилляторов и нормировки суммарного сигнала на N

$$G(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t). \quad (6)$$

Вид колебательного режима в исследуемом ансамбле определяется выбором начальных условий в связанных осцилляторах. Если начальные условия задать таким образом, что в одних осцилляторах колебания реализуются на основной моде, а в других осцилляторах колебания реализуются на третьей гармонике основной моды, то все элементы ансамбля окажутся разделены на два кластера, отличающихся частотой колебаний осцилляторов. Поведение элементов внутри каждого кластера определяется величиной фазового сдвига $\Delta\varphi$ сигнала общего поля $G(t)$ относительно $x_i(t)$: при $|\Delta\varphi| < \pi/2$ связь через общее поле является притягивающей и элементы ансамбля синхронизуются между собой после переходного процесса; при $\pi/2 < |\Delta\varphi| < 3\pi/2$ связь является отталкивающей и элементы колеблются несинхронно [6].

Пусть сигнал общего поля $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке *1* (см. рис. 1), действуя на переменную $x_i(t)$. (Далее, если это не оговорено особо, общее поле также будет воздействовать на осциллятор в точке *1*.) Если общее поле имеет вид (6), то фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ сигнала $G(t)$ относительно $x_i(t)$ будет отсутствовать и наблюдается синхронизация элементов как в первом, так и во втором кластерах.

В общем случае общее поле может формироваться сложным образом и описываться уравнением более сложного вида, чем уравнение (6). Например, среда, через которую связаны осцилляторы, может обладать инерционными свойствами или иметь собственную задержку, связанную с конечной скоростью распространения и обработки сигналов. Сложный вид сигнала общего поля может привести к большему разнообразию колебательных режимов в ансамбле связанных осцилляторов и заметно обогатить его динамику.

2. Рассмотрим сначала влияние инерционных свойств общего поля на коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3). Предположим, что инерционные свойства общего поля обусловлены линейной фильтрацией суммарного сигнала (6) низкочастотным фильтром первого порядка и общее поле $G(t)$ описывается уравнением следующего вида:

$$\gamma\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t), \tag{7}$$

где $\gamma = 1/f_F$ – постоянная времени фильтра, а f_F – частота среза фильтра. Поскольку в формировании общего поля участвуют все осцилляторы ансамбля, в сигнале (6) имеются две основные составляющие с частотами, близкими ν_1 и ν_2. При прохождении через линейный низкочастотный фильтр первого порядка каждая из этих частотных составляющих претерпевает фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -\arctan(2\pi\nu\gamma), \tag{8}$$

величина которого зависит от частоты ν. В уравнении (8) для низкочастотной составляющей сигнала $G(t)$ имеем $\nu = \nu_1$ и $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$, а для высокочастотной составляющей – $\nu = \nu_2$ и $\Delta\varphi = \Delta\varphi_2$. Так как для фазового сдвига $\Delta\varphi$, определяемого уравнением (8), всегда выполняется условие $|\Delta\varphi| < \pi/2$, то связь через общее поле является притягивающей для элементов обоих кластеров. В этом случае осцилляторы синхронизуются внутри первого и внутри второго кластера, также как в рассмотренном выше случае отсутствия у общего поля инерционных свойств (см. п. 1).

3. Рассмотрим более сложную ситуацию, при которой инерционные свойства общего поля обусловлены линейной фильтрацией суммарного сигнала (6) двумя последовательными низкочастотными фильтрами первого порядка и общее поле $G(t)$ описывается уравнением следующего вида:

$$\gamma_1\gamma_2\ddot{G}(t) + (\gamma_1 + \gamma_2)\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t), \tag{9}$$

где $\gamma_1 = 1/f_{F1}$ и $\gamma_2 = 1/f_{F2}$ — постоянные времени фильтров, а f_{F1} и f_{F2} — частоты среза первого и второго фильтров, соответственно. При такой фильтрации частотные составляющие сигнала (6) претерпевают фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -\arctan(2\pi\nu\gamma_1) - \arctan(2\pi\nu\gamma_2), \tag{10}$$

величина которого зависит от частоты ν. В уравнении (10) первый член определяет фазовый сдвиг, вносимый первым фильтром, а второй член определяет фазовый сдвиг, вносимый вторым фильтром. Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то уравнение (9) можно переписать в виде

$$\gamma^2\ddot{G}(t) + 2\gamma\dot{G}(t) + G(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t). \tag{11}$$

3.а. В случае воздействия общего поля на осцилляторы в точке *1* его составляющие с частотами, близкими ν_1 и ν_2, претерпевают соответственно фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$

$$\Delta\varphi_1 = -2\arctan(2\pi\nu_1\gamma), \tag{12}$$

$$\Delta\varphi_2 = -2\arctan(2\pi\nu_2\gamma). \tag{13}$$

Для фазовых сдвигов (12) и (13) всегда выполняется условие $|\Delta\varphi_{1,2}| < \pi$, при этом, если $\pi/2 < |\Delta\varphi_{1,2}| < \pi$, то связь через общее поле является отталкивающей и элементы кластера колеблются несинхронно. На рис. 3, *а* построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$ при $\tau = 100$ ($\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$). Так как $\nu_1 < \nu_2$, фазовый сдвиг (12) меньше по абсолютной величине, чем фазовый сдвиг (13). В зависимости от величины γ возможны три различные ситуации: 1) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 2) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $\pi/2 \le |\Delta\varphi_2| < \pi$; 3) $\pi/2 \le |\Delta\varphi_1| < \pi$, $\pi/2 \le |\Delta\varphi_2| < \pi$.

Области, соответствующие этим трем ситуациям, отмечены на рис. 3, *а* как SS, CS1 и AS, соответственно. При значениях γ из области SS имеет место синхронизация осцилляторов в первом кластере и синхронизация осцилляторов во втором кластере. В области CS1 осцилляторы в первом кластере, совершающие колебания на основной моде, демонстрируют синхронное поведение, а осцилляторы во втором кластере, совершающие колебаний на третьей гармонике основной моды, колеблются несинхронно. Такая ситуация соответствует состоянию «химера». В области AS колебания осцилляторов в обоих кластерах являются несинхронными.

3.б. В случае, когда сигнал $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке *2* (см. рис. 1), он действует на переменную $x_i(t-\tau)$. При таком воздействии имеется

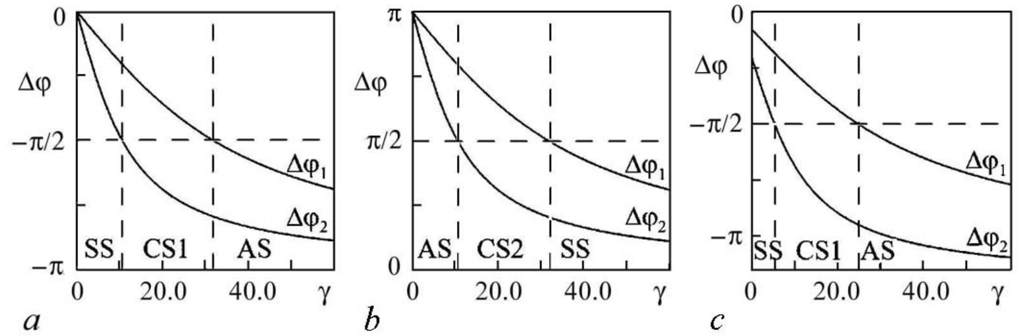

Рис. 3. Зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (12) и (13) (*a*), (14) и (15) (*b*), (16) и (17) (*c*) при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. Здесь: SS – области с синхронным поведением осцилляторов внутри кластеров; AS – области с несинхронным поведением осцилляторов внутри кластеров; CS1 и CS2 – области существования состояний «химера»

Fig. 3. Dependencies $\Delta\varphi_1(\gamma)$ and $\Delta\varphi_2(\gamma)$, described by Eqs. (12) and (13) (*a*), Eqs. (14) and (15) (*b*), Eqs. (16) and (17) (*c*) at $\nu_1 = 1/200$ and $\nu_2 = 3/200$. SS are the regions of synchronous behavior of oscillators in both clusters. AS are the regions of non-synchronous behavior of oscillators in both clusters. CS1 and CS2 are the regions of chimera states

фазовый сдвиг сигнала $G(t)$ относительно $x_i(t)$. Этот сдвиг равен π для колебаний на основной моде и 3π для колебаний на третьей гармонике основной моды. Его необходимо учитывать при вычислении общего фазового сдвига в присутствии инерционности общего поля. Поскольку фаза является 2π-периодической функцией, уравнения (12) и (13) в случае воздействия $G(t)$ на $x_i(t-\tau)$ принимают следующий вид:

$$\Delta\varphi_1 = -2\arctan(2\pi\nu_1\gamma) + \pi, \tag{14}$$

$$\Delta\varphi_2 = -2\arctan(2\pi\nu_2\gamma) + \pi. \tag{15}$$

На рис. 3, *b* построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (14) и (15), при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. В зависимости от величины γ возможны три различные ситуации: 1) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 2) $\pi/2 \le |\Delta\varphi_1| < \pi$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 3) $\pi/2 \le |\Delta\varphi_1| < \pi$, $\pi/2 \le |\Delta\varphi_2| < \pi$.

Области, соответствующие этим трем ситуациям, отмечены на рис. 3, *b* как SS, CS2 и AS. При значениях γ из области CS2 существует состояние «химера». Однако, в отличие от состояния «химера», существующего в области CS1 на рис. 3, *a*, осцилляторы в первом кластере, совершающие колебания на основной моде, демонстрируют несинхронное поведение, а осцилляторы во втором кластере, совершающие колебаний на третьей гармонике основной моды, колеблются синхронно.

3.в. В случае, когда сигнал $G(t)$ воздействует на осцилляторы в точке *3* (см. рис. 1), фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ описываются следующими уравнениями:

$$\Delta\varphi_1 = -2\arctan(2\pi\nu_1\gamma) - \arctan(2\pi\nu_1\varepsilon), \tag{16}$$

$$\Delta\varphi_2 = -2\arctan(2\pi\nu_2\gamma) - \arctan(2\pi\nu_2\varepsilon). \tag{17}$$

На рис. 3, *c* построены зависимости $\Delta\varphi_1(\gamma)$ и $\Delta\varphi_2(\gamma)$, описываемые уравнениями (16) и (17), при $\nu_1 = 1/200$, $\nu_2 = 3/200$ и $\varepsilon = 8$. Также как на рис. 3, *a*, имеются три области, обозначенные на рис. 3, *c* как SS, CS1 и AS, в которых реализуются синхронный режим, состояние «химера» и несинхронный режим, соответственно.

4. Рассмотрим теперь влияние запаздывания в общем поле на коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3). В случае, когда сигнал воздействует на осцилляторы в точке *1* общее поле имеет вид

$$G(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t - \tau_m), \tag{18}$$

где τ_m – собственное время запаздывания общего поля. Фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ для частотных составляющих сигнала $G(t)$, соответствующих колебаниям на основной моде и на третьей гармонике основной моды, соответственно, линейно зависят от τ_m

$$\Delta\varphi_1 = -2\pi\nu_1\tau_m, \Delta\varphi_2 = -2\pi\nu_2\tau_m. \tag{19}$$

На рис. 4 построены зависимости $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ и $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ при $\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$. В зависимости от величины τ_m существует четыре области, обозначенные на рис. 4 как SS, CS1, CS2 и AS. При наличии запаздывания в общем поле в ансамбле могут существовать два разных состояния «химера» (одно в области CS1, а другое в области CS2) в отличие от рассмотренного выше (см. п. 3.a) случая инерционности общего поля, при котором в ансамбле может существовать только одно состояние «химера». Отметим, что для осцилляторов во втором кластере, совершающих колебаний на третьей гармонике основной моды, связь является отталкивающей при $\pi/2 < |\Delta\varphi_2| < 3\pi/2$ и притягивающей при $3\pi/2 < |\Delta\varphi_2| < 5\pi/2$. Поскольку фаза является 2π-периодической функцией, последнее условие эквивалентно условию $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$.

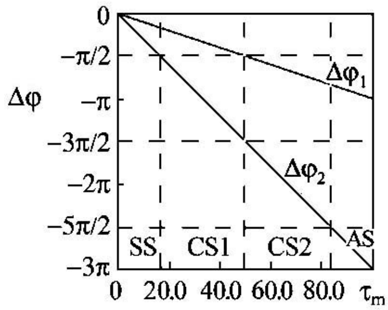

Рис. 4. Зависимости $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ и $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ при ν_1=1/200 и $\nu_2 = 3/200$. SS — области с синхронным поведением осцилляторов внутри кластеров. AS — области с несинхронным поведением осцилляторов внутри кластеров. CS1 и CS2 — области существования состояний «химера»

Fig. 4. Dependencies $\Delta\varphi_1(\tau_m)$ and $\Delta\varphi_2(\tau_m)$ at ν_1=1/200 and $\nu_2 = 3/200$. SS are the regions of synchronous behavior of oscillators in both clusters. AS are the regions of non-synchronous behavior of oscillators in both clusters. CS1 and CS2 are the regions of chimera states

Таким образом, коллективная динамика осцилляторов ансамбля зависит от инерционных свойств и запаздывания общего поля, через которое они связаны. Если имеется возможность изменять параметры общего поля, то можно управлять поведением осцилляторов внутри кластеров, в том числе, контролируя состояния «химера». В общем случае общее поле может обладать одновременно и инерционными свойствами и запаздыванием, но в данной работе мы такую ситуацию не рассматриваем.

2. Численное моделирование коллективной динамики осцилляторов в ансамбле

В зависимости от выбора начальных условий осцилляторы могут совершать периодические колебания на основной моде с частотой вблизи ν_1, либо хаотические колебания на третьей гармонике основной моды с основной частотой вблизи $\nu_2 = 3\nu_1$. Начальные условия можно задать как постоянную величину на интервале времени, равном времени запаздывания осцилляторов. В этом случае число p периодических осцилляторов и число n хаотических осцилляторов в ансамбле полностью определяется выбором начальных условий. Например, при задании начальных условий, равными 0.5, в осцилляторе устанавливаются хаотические колебания вблизи неподвижной точки B (см. рис. 2), а при задании начальных условий, равными 2, в осцилляторе устанавливаются периодические колебания вблизи неподвижной точки A.

Для ансамбля, состоящего из N бистабильных осцилляторов, в зависимости от начальных условий возможно $N + 1$ различных ситуаций, при которых n и p принимают значения от 0 до N, причем $n + p = N$. При $p = 0$ и $p = N$ в ансамбле формируется лишь один кластер, состоящий их хаотических или периодических осцилляторов, соответственно. В зависимости от величины фазового сдвига между сигналами $G(t)$ и $x_i(t)$ осцилляторы внутри такого кластера демонстрируют либо синхронное, либо асинхронное поведение. При $p = 1, ..., N - 1$ в ансамбле имеются как периодические, так и хаотические осцилляторы. Однако при $p = 1$ и $p = N - 1$ имеется лишь один периодический или один хаотический осциллятор, соответственно, для которого понятие синхронной или асинхронной коллективной динамики лишено смысла. Поэтому, при $p = 1$ и $p = N - 1$ состояния «химера» не наблюдаются. Как было недавно показано в работах [18, 28, 29], состояния «химера» могут существовать и в малых ансамблях связанных осцилляторов. Для наблюдения состояний «химера» достаточно четырех идентичных связанных осцилляторов [18, 28, 29].

Нами было проведено численное исследование коллективной динамики ансамбля из из $N = 8$ бистабильных осцилляторов с запаздыванием вида (3) при $\tau = 100$ и $\varepsilon = 8$, имеющих нелинейную функцию (2) с теми же значениями параметров, что на рис. 2, и связанных между собой через общее поле $G(t)$ вида (9) при $k = 0.01$. Состояние «химера» наблюдалось при $p = 2, ..., 6$.

Начальные условия в осцилляторах можно задать случайным образом. Для случайного задания начальных условий в осцилляторах подействуем на каждый из них независимым равномерным шумом, значения которого принадлежат отрезку $[0.7, 2.5]$. При таком шуме начальные условия могут оказаться в бассейне притяжения как периодического, так и хаотического аттрактора. После отключения шума мы имеем случайную комбинацию колебательных режимов в осцилляторах ансамбля. Часть осцилляторов оказывается в периодическом режиме, а другая часть в хаотическом режиме.

Нами рассмотрен случай, при котором четыре осциллятора совершают периодические колебания на основной моде с частотой вблизи ν_1, а четыре других осциллятора совершают хаотические колебания на третьей гармонике основной моды с основной частотой вблизи $\nu_2 = 3\nu_1$.

Фрагменты временных реализаций колебаний динамической переменной $x_i(t)$ во всех восьми связанных осцилляторах показаны на рис. 5 при различных значениях фазовых сдвигов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$. В верхней части рисунков показаны реализации периодических колебаний осцилляторов, а в нижней части рисунков показаны реализации хаотических колебаний осцилляторов.

На рис. 5, *a* показан случай, когда осцилляторы, совершающие периодические колебания, полностью синхронны, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, находятся в режиме фазовой синхронизации, при которой они могут иметь разные амплитуды колебаний. Рис. 5, *b* соответствует состоянию «химера», при котором периодические осцилляторы синхронны между собой, а хаотические осцилляторы совершают несинхронные колебания. Так как осцилляторы абсолютно идентичны, временные реализации всех периодических осцилляторов на рис. 5, *a, b* полностью совпадают и неразличимы между собой. На рис. 5, *c* колебания как периодических, так и хаотических осцилляторов несинхронны. Качественно похожие результаты были получены при экспериментальном исследовании ансамбля бистабильных электронных автогенераторов с запаздыванием, связанных через общее поле [30].

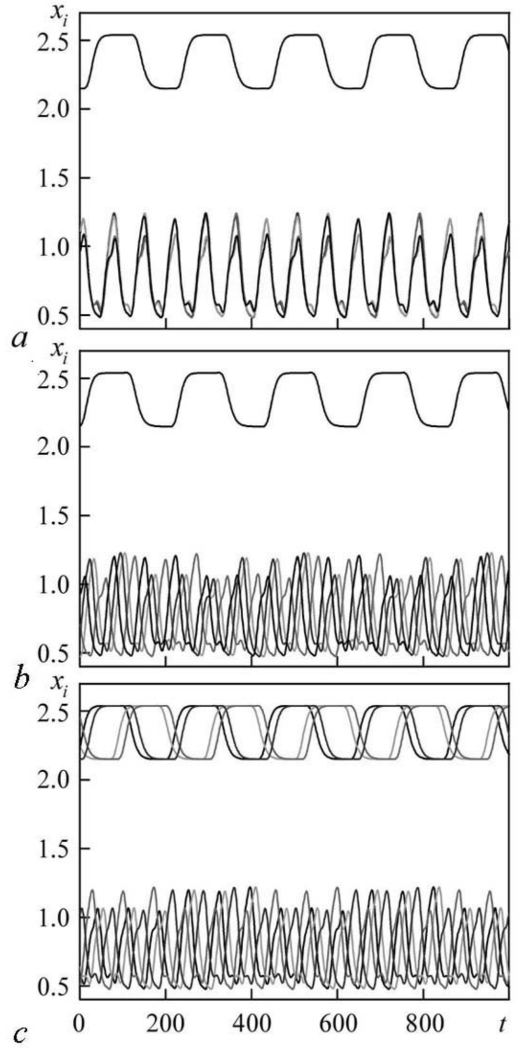

Рис. 5. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (3) при $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) и $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

Fig. 5. Time series of oscillations in coupled oscillators (3) at $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) and $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

На рис. 6 приведены пространственно-временные диаграммы колебаний $x_i(t)$ в каждом из восьми осцилляторов. Осцилляторы, совершающие периодические колебания, обозначены номерами $i = 1...4$, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, обозначены номерами $i = 5...8$. На рис. 6, *a* осцилляторы $i = 1...4$ демонстрируют полную синхронизацию, а осцилляторы $i = 5...8$ находятся в режиме фазовой синхронизации, при которой амплитуда колебаний в осцилляторах может отличаться. Рис. 6, *b* иллюстрирует состояние «химера», при котором периодические осцилляторы совершают синхронные колебания, а хаотические осцилляторы колеблются несинхронно, при этом отличия амплитуды их колебаний более заметны, чем на рис. 6, *a*. Рис. 6, *c* иллюстрирует ситуацию, при которой и периодические и хаотические осцилляторы совершают несинхронные колебания.

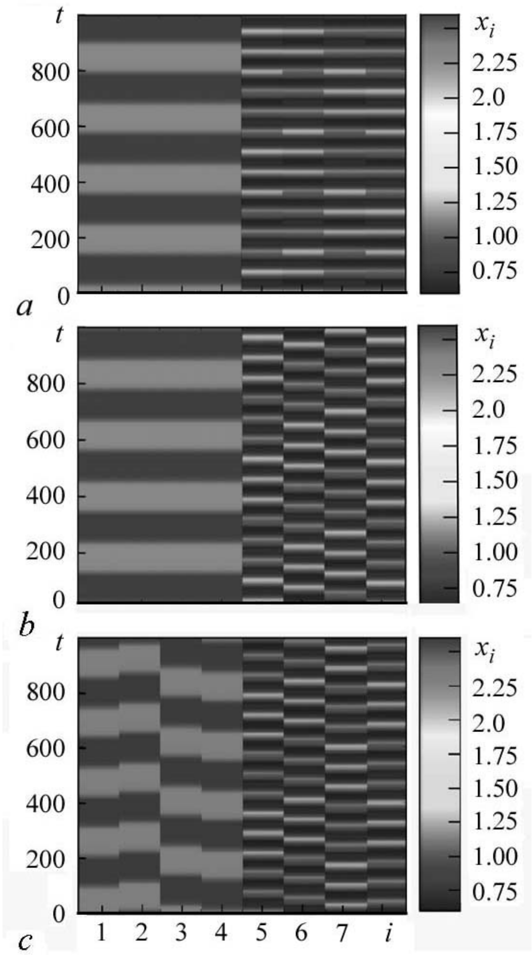

Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы колебаний динамической переменной $x_i(t)$ связанных осцилляторов (3) при $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) и $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

Fig. 6. Space-time plots of oscillations of dynamical variable $x_i(t)$ in coupled oscillators (3) at $|\Delta\varphi_1| = 0.04\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.12\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.36\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.69\pi$ (*b*) and $|\Delta\varphi_1| = 0.64\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.87\pi$ (*c*)

Результаты, похожие на результаты, представленные на рис. 5 и 6, были получены также и для ансамбля, состоящего из осцилляторов с запаздыванием вида (5), связанных между собой через общее поле вида (9).

Исследована также динамика ансамбля для случая, при котором динамика каждого осциллятора описывается уравнением (4). В зависимости от величины фазовых сдвигов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ частотных составляющих сигнала $G(t)$ вида (9) наблюдался режим, при котором и периодические, и хаотические осцилляторы были синхронны, и режим, при котором и периодические и хаотические осцилляторы были несинхронны. Кроме того, в ансамбле наблюдалось состояние «химера», которого не было в ансамбле связанных осцилляторов вида (3). В этом режиме синхронные колебания совершают хаотические осцилляторы, а периодические осцилляторы демонстрируют несинхронное поведение.

Для такого состояния «химера» на рис. 7, *a* показаны фрагменты временных реализаций колебаний динамической переменной $x_i(t)$ во всех восьми связанных осцилляторах, а на рис. 7, *b* построена пространственно-временная диаграмма колебаний $x_i(t)$ в каждом из восьми осцилляторов. Отметим, что границы существования различных колебательных режимов в численном эксперименте хорошо согласуются с границами областей, построенными на рис. 3.

Наконец, проиллюстрируем коллективную динамику связанных осцилляторов, описываемых уравнением (3), при наличии запаздывания в общем поле, имеющем вид (18). В полном соответствии с результатами, приведенными в разделе 1, в таком ансамбле можно наблюдать четыре разных колебательных режима. Для каждого из

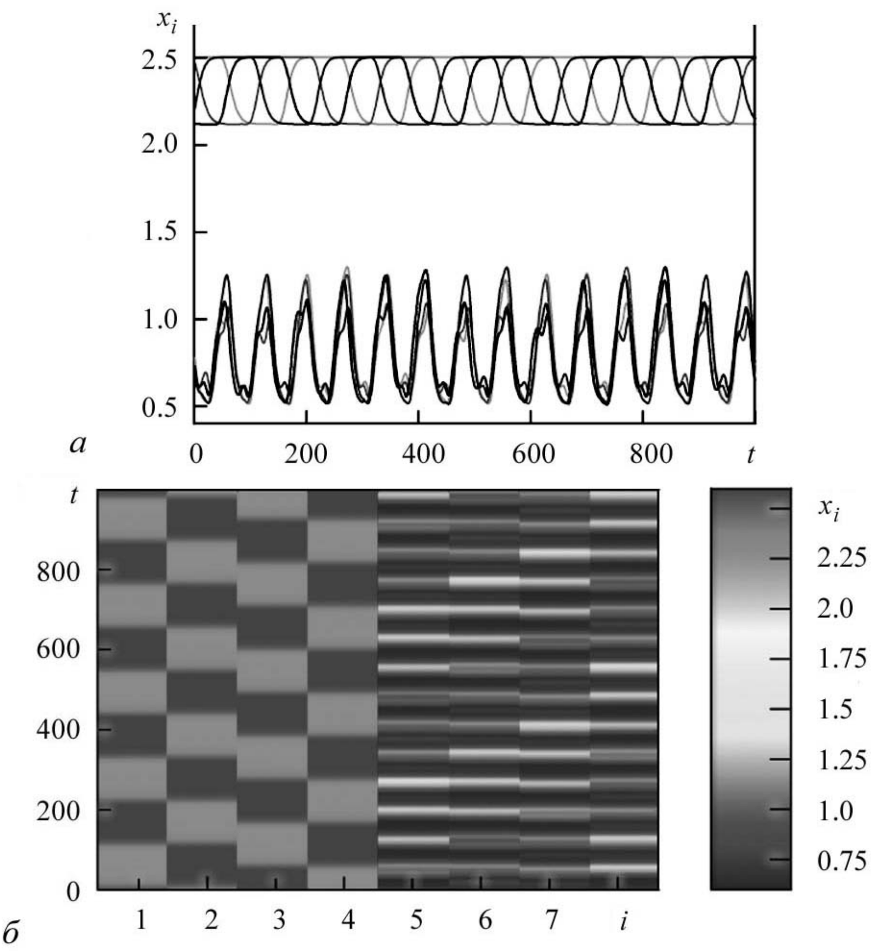

Рис. 7. Временные реализации (a) и пространственно-временная диаграмма (b) колебаний динамической переменной $x_i(t)$ связанных осцилляторов (4) для состояния «химера» при $|\Delta\varphi_1| = 0.72\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.40\pi$

Fig. 7. Time series of oscillations (a) and space-time plot (b) of oscillations of dynamical variable $x_i(t)$ in coupled oscillators (4) for a chimera state at $|\Delta\varphi_1| = 0.72\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.40\pi$

этих режимов на рис. 8 показаны мгновенные состояния динамической переменной $x_i(t)$ в осцилляторах. Осцилляторы, совершающие периодические колебания, обозначены номерами $i = 1...4$, а осцилляторы, совершающие хаотические колебания, обозначены номерами $i = 5...8$.

Режим, при котором синхронными являются и периодические осцилляторы, и хаотические осцилляторы, показан на рис. 8, *a*. Рис. 8, *b* и *c* иллюстрируют два разных состояния «химера». В первом из них периодические осцилляторы синхронны, а хаотические несинхронны (см. рис. 8, *b*), а во втором, наоборот, периодические осцилляторы несинхронны, а хаотические синхронны (см. рис. 8, *c*). Режим, при котором и периодические и хаотические осцилляторы демонстрируют несинхронное поведение, представлен на рис. 8, *d*. Отметим, что собственное время запаздывания осцилляторов τ не влияет на их коллективную динамику. Оно оказывает существенное влияние лишь на вид колебаний парциальных элементов ансамбля.

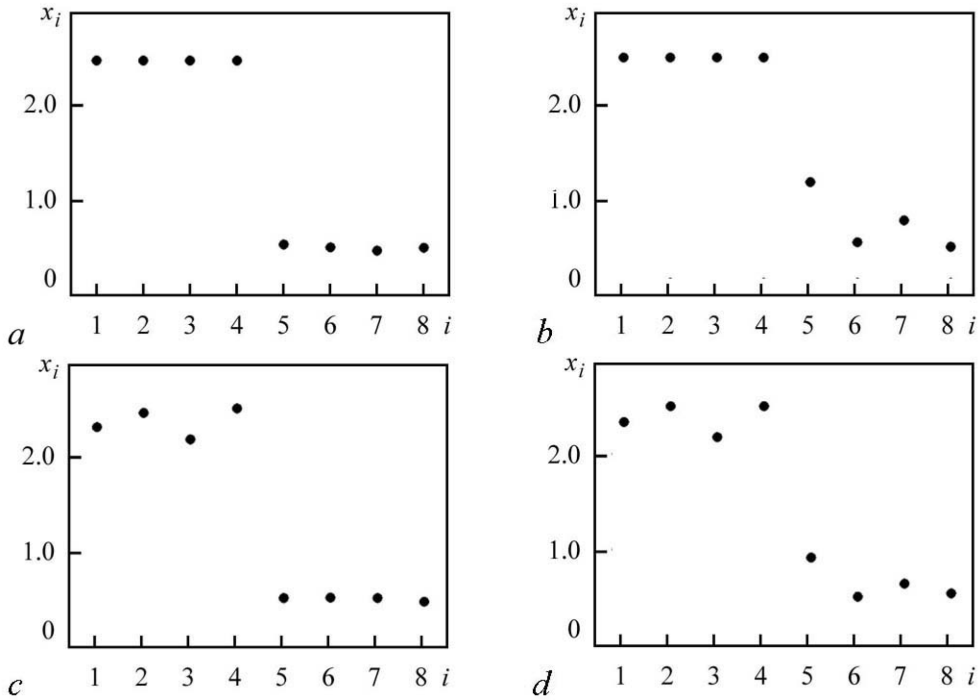

Рис. 8. Мгновенные состояния динамической переменной $x_i(t)$ в каждом из восьми связанных осцилляторов (3) при наличии запаздывания в общем поле при $|\Delta\varphi_1| = 0.05\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.15\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.24\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.72\pi$ (*b*), $|\Delta\varphi_1| = 0.63\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 1.89\pi$ (*c*) и $|\Delta\varphi_1| = 0.91\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 2.73\pi$ (*d*)

Fig. 8. Snapshots of variables $x_i(t)$ in each of eight coupled oscillators (3) in the presence of delay in the mean field at $|\Delta\varphi_1| = 0.05\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.15\pi$ (*a*), $|\Delta\varphi_1| = 0.24\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 0.72\pi$ (*b*), $|\Delta\varphi_1| = 0.63\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 1.89\pi$ (*c*) and $|\Delta\varphi_1| = 0.91\pi$ and $|\Delta\varphi_2| = 2.73\pi$ (*d*)

Заключение

Исследованы особенности коллективной динамики в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле. Рассмотрены различные способы формирования общего поля, осуществляющего глобальную связь осцилляторов. Исследовано влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику осцилляторов.

Разнообразие колебательных режимов в исследованном ансамбле связанных осцилляторов обусловлено тем, что бистабильные состояния парциальных элементов имеют существенно различающиеся основные частоты колебаний. Один из бистабильных режимов реализуется на основной моде колебаний системы с запаздыванием, а другой колебательный режим реализуется на третьей гармонике основной моды. При соответствующем выборе параметров общего поля это позволяет обеспечить разную величину фазового сдвига сигнала общего поля для осцилляторов, находящихся в различных колебательных режимах.

Вид колебательного режима в исследуемом ансамбле зависит от выбора начальных условий в связанных осцилляторах. Начальные условия могут быть заданы желаемым образом для каждого осциллятора отдельно, а могут быть заданы случайным образом при помощи шума. Показано, что в исследуемом ансамбле формируется два кластера, каждый из которых в зависимости от величины фазового сдвига сигнала общего поля может демонстрировать как синхронное, так и несинхронное поведение входящих в него элементов. В случае, когда связь оказывается притягивающей для элементов одного кластера и отталкивающей для элементов другого кластера, в ансамбле возникает состояние «химера», при котором в ансамбле одновременно сосуществуют кластер с синхронным и кластер с несинхронным поведением элементов. Таким образом, изменяя параметры общего поля, можно управлять поведением осцилляторов внутри кластеров, в том числе, контролировать состояния «химера».

Рассмотрена ситуация, при которой в одном из бистабильных состояний осцилляторы совершают периодические колебания, а в другом бистабильном состоянии они колеблются хаотически. Однако качественно похожие результаты можно получить и для случаев, когда оба бистабильных состояния элементов являются периодическими или оба состояния являются хаотическими. Следует лишь отметить, что в случае притягивающей связи идентичные периодические осцилляторы демонстрируют полную синхронизацию, а хаотические осцилляторы демонстрируют фазовую синхронизацию.

Особенности коллективной динамики в ансамбле идентичных бистабильных осцилляторов с запаздыванием исследованы для случаев, когда сигнал общего поля вводится в различные точки кольцевых систем с запаздыванием. Показаны сходства и отличия таких ситуаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-02-00091.

Библиографический список

1. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации // Под ред. Гапонова-Грехова А.В. и Рабиновича М.И. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
2. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U.* Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424. P. 175.
3. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. Vol. 5. P. 380.
4. *Abrams D.M., Strogatz S.H.* Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. 174102.
5. *Laing C.R.* Chimeras in networks with purely local coupling // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 050904(R).
6. *Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M.* Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. 144103.
7. *Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P.K., Dana S.K.* Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 062920.
8. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. 014102.
9. *Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E.* Chimera states in networks of van der Pol oscillators with hierarchical connectivities // Chaos. 2016. Vol. 26. 094825.

10. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. 234102.
11. *Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Schöll E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // Nat. Phys. 2012. Vol. 8. P. 658.
12. *Sethia G.C., Sen A., Johnston G.L.* Amplitude-mediated chimera states // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 88. 042917.
13. *Zakharova A., Kapeller M., Schöll E.* Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. 154101.
14. *Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y.* Imperfect chimera states for coupled pendula // Sci. Rep. 2014. Vol. 4. P. 6379.
15. *Gambuzza L.V., Buscarino A., Chessari S., Fortuna L., Meucci R., Frasca M.* Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 90. 032905.
16. *Schmidt L., Krischer K.* Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems // Phys. Rev. Lett. 2015. Vol. 114. 034101.
17. *Kemeth F.P., Haugland S.W., Schmidt L., Kevrekidis I.G., Krischer K.* A classification scheme for chimera states // Chaos. 2016. Vol. 26. 094815.
18. *Hart J.D., Bansal K., Murphy T.E., Roy R.* Experimental observation of chimera and cluster states in a minimal globally coupled network // Chaos. 2016. Vol. 26. 094801.
19. *Shepelev I.A., Vadivasova T.E., Bukh A.V., Strelkova G.I., Anishchenko V.S.* New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // Phys. Lett. A. 2017. Vol. 381. P. 1398.
20. *Buck J., Buck E.* Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies // Science. 1968. Vol. 159. P. 1319.
21. *Danø S., Sørensen P.G., Hynne F.* Sustained oscillations in living cells // Nature (London). 1999. Vol. 402. P. 320.
22. *Néda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L.* Self-organizing processes: The sound of many hands clapping // Nature (London). 2000. Vol. 403. P. 849.
23. *Dallard P., Fitzpatrick T., Flint A., Low A., Smith R.R., Willford M., Roche M.* London Millennium Bridge: Pedestrian-induced lateral vibration // J. Bridge Eng. 2001. Vol. 6. P. 412.
24. *Kiss I., Zhai Y., Hudson J.* Emerging coherence in a population of chemical oscillators // Science. 2002. Vol. 296. P. 1676.
25. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
26. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Physica D. 1987. Vol. 29, P. 223.
27. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* Estimation of coupling between time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. 016210.
28. *Ashwin P., Burylko O.* Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // Chaos. 2015. Vol. 25. 013106.

29. *Röhm A., Böhm F., Lüdge K.* Small chimera states without multistability in a globally delay-coupled network of four lasers // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94. 042204.
30. *Пономаренко В.И., Кульминский Д.Д., Караваев А.С., Прохоров М.Д.* Коллективная динамика идентичных бистабильных автогенераторов с запаздыванием, связанных через общее поле // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 6. С. 64.

References

1. Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Eds. Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I. Gorky: IPF AN USSR, 1989 (in Russian).
2. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U. *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424. P. 175.
3. Kuramoto Y., Battogtokh D. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2002. Vol. 5. P. 380.
4. Abrams D.M., Strogatz S.H. *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93. 174102.
5. Laing C.R. *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92. 050904(R).
6. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 144103.
7. Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P.K., Dana S.K. *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 92. 062920.
8. Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117. 014102.
9. Ulonska S., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. *Chaos.* 2016. Vol. 26. 094825.
10. Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106. 234102.
11. Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R., Hoevel P., Omelchenko I., Schöll E. *Nat. Phys.* 2012. Vol. 8. P. 658.
12. Sethia G.C., Sen A., Johnston G.L. *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88. 042917.
13. Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112. 154101.
14. Kapitaniak T., Kuzma P., Wojewoda J., Czolczynski K., Maistrenko Y. *Sci. Rep.* 2014. Vol. 4. P. 6379.
15. Gambuzza L.V., Buscarino A., Chessari S., Fortuna L., Meucci R., Frasca M. *Phys. Rev. E.* 2014. Vol. 90. 032905.
16. Schmidt L., Krischer K. *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. 034101.
17. Kemeth F.P., Haugland S.W., Schmidt L., Kevrekidis I.G., Krischer K. *Chaos*. 2016. Vol. 26. 094815.
18. Hart J.D., Bansal K., Murphy T.E., Roy R. *Chaos*. 2016. Vol. 26. 094801.
19. Shepelev I.A., Vadivasova T.E., Bukh A.V., Strelkova G.I., Anishchenko V.S. *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381. P. 1398.
20. Buck J., Buck E. *Science*. 1968. Vol. 159. P. 1319.
21. Danø S., Sørensen P.G., Hynne F. *Nature* (London). 1999. Vol. 402. P. 320.
22. Néda Z., Ravasz E., Brechet Y., Vicsek T., Barabási A.-L. *Nature* (London). 2000. Vol. 403. P. 849.
23. Dallard P., Fitzpatrick T., Flint A., Low A., Smith R.R., Willford M., Roche M.J. *Bridge Eng.* 2001. Vol. 6. P. 412.

24. Kiss I., Zhai Y., Hudson J. *Science*. 2002. Vol. 296. P. 1676.
25. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
26. Ikeda K., Matsumoto K. *Physica D.* 1987. Vol. 29. P. 223.
27. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. *Phys. Rev.* E. 2005. Vol. 72. 016210.
28. Ashwin P., Burylko O. *Chaos.* 2015. Vol. 25. 013106.
29. Röhm A., Böhm F., Lüdge K. *Phys. Rev. E.* 2016. Vol. 94. 042204.
30. Ponomarenko V.I., Kul'minskii D.D., Karavaev A.S., Prokhorov M.D. *Tech. Phys. Lett*. 2017. Vol. 43. P. 309.

Кульминский Данил Дмитриевич – родился в Саратове (1991). Окончил Саратовский государственный университет (2014). После окончания СГУ работает младшим научным сотрудником в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и ассистентом кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов: теория динамических систем, анализ временных рядом, математическое моделирование. Имеет 20 научных статей в отечественных и зарубежных журналах. Стипендиат фонда «Династия».

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: kulminskydd@gmail.com

Пономаренко Владимир Иванович – родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992) и доктора физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика, системы с запаздыванием, синхронизация, моделирование биологических систем. Автор более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com

Прохоров Михаил Дмитриевич – родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997) и доктора физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники
и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru