

01.5

## Клонирование химерных состояний в двухслойной сети бистабильных генераторов с запаздывающей обратной связью

© Д.Д. Кульминский<sup>1,2</sup>, В.И. Пономаренко<sup>1,2</sup>, М.Д. Прохоров<sup>1</sup><sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия<sup>2</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: kulminskydd@gmail.com

Поступило в Редакцию 7 сентября 2020 г.

В окончательной редакции 6 октября 2020 г.

Принято к публикации 6 октября 2020 г.

Впервые экспериментально исследовано клонирование химерных состояний в двухслойной сети идентичных бистабильных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Рассмотрены случаи однонаправленной и взаимной связи между слоями сети. Показано, что для клонирования химерных состояний необходимо соответствующим образом выбрать начальные условия генераторов.

**Ключевые слова:** сети связанных осцилляторов, химерное состояние, генератор с запаздыванием, радиофизический эксперимент.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.02.50543.18543

Системы с сетевой структурой чрезвычайно широко распространены в природе, технике и социуме, и их изучение представляет фундаментальный и практический интерес. Особое внимание привлекает задача исследования адаптивных динамических сетей, в которых топология связей между элементами сети может меняться во времени [1]. Показано, что изменение коллективного поведения элементов таких сетей происходит как вследствие внутренней динамики системы [2,3], так и в ответ на внешние воздействия [4]. Важной прикладной задачей для многих приложений является управление коллективной динамикой в сетях, в том числе синхронизация колебательных режимов [1].

В настоящей работе управление коллективной динамикой в адаптивных сетях исследовано на примере химерных состояний, возникающих в ансамблях идентичных осцилляторов и характеризующихся одновременным существованием в ансамбле как осцилляторов, совершающих синхронные колебания, так и осцилляторов, колеблющихся несинхронно. Химерные состояния были обнаружены при теоретических и экспериментальных исследованиях ансамблей связанных осцилляторов [5–7]. На различных модельных системах были обнаружены эффекты синхронизации химерных состояний в модульных сетях [8] и мультиплексных сетях [9–12], в том числе состоящих из бистабильных осцилляторов [13–15]. Эти эффекты типичны для биологических объектов и нейронных сетей мозга [16,17]. Недавно [18,19] был обнаружен и изучен новый эффект — клонирование химерных состояний, возникающий при объединении в мультиплексную систему двух кольцевых ансамблей линейно локально связанных бистабильных осцилляторов. Численно было показано, что при определенных зна-

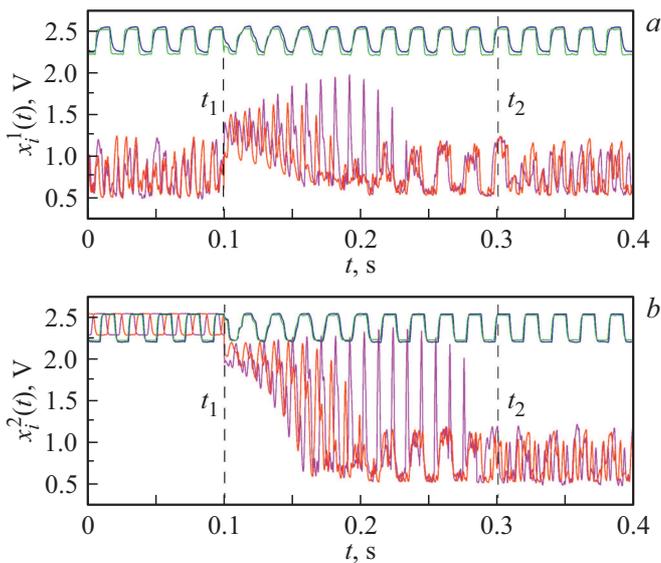
чениях силы и времени межкольцевого взаимодействия в кольце с изначально беспорядочным распределением фаз формируется копия химерного состояния, наблюдаемого в другом кольце, с точностью до значений фаз в некогерентной части. В основе эффекта лежит конкурентная динамика пар осцилляторов из разных слоев мультиплексной системы [18,19].

Мы впервые экспериментально исследовали клонирование химерных состояний в двухслойной сети идентичных бистабильных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Обнаружение нами эффекта клонирования химерных состояний в физическом эксперименте доказывает реальность его существования, а наблюдение эффекта в системах с задержкой, широко распространенных в природе и технике [20], свидетельствует об общности этого нелинейного явления для широкого класса систем.

Рассмотрим сеть, состоящую из двух слоев, каждый из которых представляет собой кольцо из связанных бистабильных генераторов с запаздывающей обратной связью. Динамика такой мультиплексной сети описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_i^j(t) &= -x_i^j(t) + f(x_i^j(t - \tau)) + k_p(x_{i+1}^j(t) - x_i^j(t)) \\ &+ k_m(t)(x_i^{j+1}(t) - x_i^j(t)), \\ k_m(t) &= \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ k, & t_1 \leq t < t_2, \\ 0, & t \geq t_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(t)$  — напряжение на входе линии задержки генератора,  $i = 1, \dots, N$  — номер генератора внутри слоя,  $N$  — количество генераторов в слое,  $j = 1, 2$  — номер



**Рис. 1.** Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_i^j$  генераторов первого слоя (a) и второго слоя (b) при  $\tau = 1$  ms,  $\varepsilon = 0.08$  ms,  $k_p = 0.01$ , демонстрирующие клонирование химерного состояния при взаимной связи  $k = 0.5$  между слоями. Временные реализации  $x_i^1(t)$  и  $x_i^2(t)$  показаны одинаковым цветом (см. электронную версию статьи).

слоя, граничные условия  $x_{N+1}^j = x_1^j$  и  $x_i^3 = x_i^1$ ,  $\varepsilon$  — параметр инерционности,  $\tau$  — время запаздывания,  $f$  — нелинейная функция,  $k_p$  — коэффициент связи генераторов внутри слоя,  $k_m(t)$  — коэффициент связи между слоями сети, параметр  $k$  определяет силу связи между слоями, а времена  $t_1$  и  $t_2$  — его длительность. В качестве функции  $f$  возьмем кубическую функцию

$$f(x) = a + b(x - d) - c(x - d)^3, \quad (2)$$

параметры которой имеют значения  $a = 1.5$ ,  $b = 2.3$ ,  $c = 1.78$ ,  $d = 1.57$ . При такой нелинейности в зависимости от начальных условий генератор может совершать два вида колебаний, демонстрируя бистабильность. Один из бистабильных режимов является периодическим с частотой  $\nu_1 \approx 1/(2\tau)$ , а другой — хаотическим с основной частотой  $\nu_2 \approx 3/(2\tau)$ .

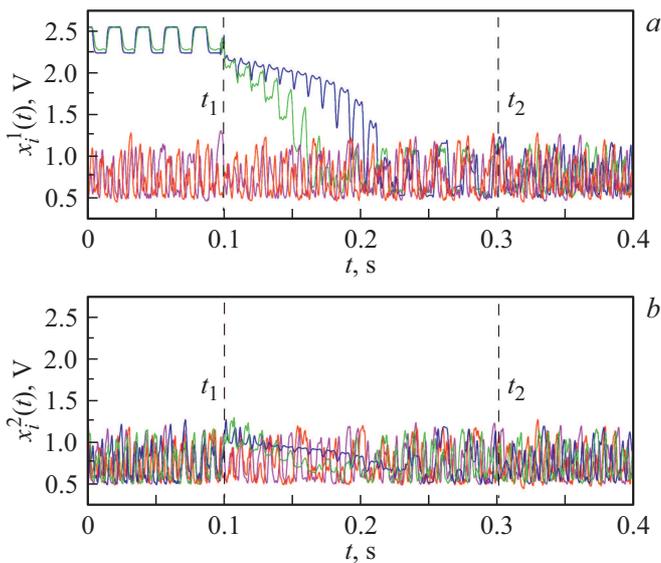
Для экспериментальной реализации исследуемой сети радиотехнических генераторов мы использовали предложенный нами недавно подход, в основе которого лежит программный способ формирования сигналов, отвечающих за связь между генераторами [2,3]. Используя такой подход, мы построили экспериментальную установку, которая позволяет задать произвольную архитектуру и тип связей между генераторами и изменять связи в ходе эксперимента.

Рассмотрим случай, когда каждый слой содержит четыре автогенератора с запаздыванием, параметры которых имеют значения  $\tau = 1$  ms,  $\varepsilon = 0.08$  ms,  $k_p = 0.01$ . Начальные условия выбраны таким образом, что при

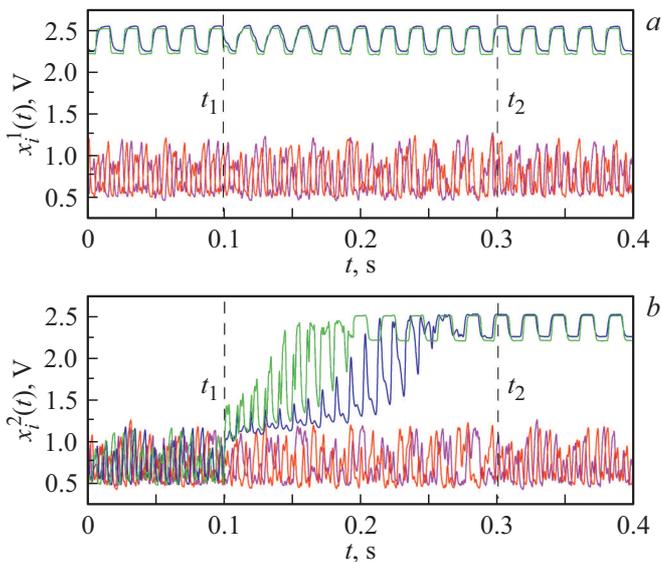
отсутствии взаимодействия между слоями ( $k = 0$ ) в первом слое реализуется химерное состояние, обладающее следующими свойствами. Генераторы с номерами  $i = 1, 2$  совершают синхронные периодические колебания, а генераторы с номерами  $i = 3, 4$  совершают несинхронные хаотические колебания (рис. 1, a). Начальные условия генераторов второго слоя будем варьировать. Сначала выберем их таким образом, чтобы при  $k = 0$  все четыре генератора совершали периодические колебания (рис. 1, b).

При включении взаимной связи между слоями в момент времени  $t_1 = 0.1$  s генераторы разных слоев начинают взаимодействовать. На рис. 1 приведены временные реализации всех динамических переменных  $x_i^j(t)$  при  $k = 0.5$ . Видно, что в результате взаимодействия происходит изменение динамики тех генераторов ( $x_3^1(t)$ ,  $x_4^1(t)$  и  $x_3^2(t)$ ,  $x_4^2(t)$ ), колебательные режимы которых качественно различались до включения связи. После окончания переходного процесса, который продолжается некоторое время после момента времени  $t_2 = 0.3$  s отключения связи, третий и четвертый генераторы в каждом слое совершают несинхронные хаотические колебания, т.е. во втором слое произошло переключение бистабильных режимов в третьем и четвертом генераторах с низкочастотного периодического на высокочастотный хаотический. По-видимому, это связано с тем, что при заданных параметрах генераторов высокочастотный режим имеет больший бассейн притяжения, чем низкочастотный режим, и побеждает в результате конкуренции. Динамика генераторов  $x_1^1(t)$ ,  $x_2^1(t)$  и  $x_1^2(t)$ ,  $x_2^2(t)$ , совершающих одинаковые низкочастотные периодические колебаний в обоих слоях, почти не изменилась при включении связи между слоями. Таким образом, в первом слое сохранилось химерное состояние, а во втором слое появилась его копия. Отметим, что при выбранных значениях параметров двухслойной сети (1) клонирование химерного состояния наблюдалось при  $(t_2 - t_1) > 0.1$  s.

Для наблюдения эффекта клонирования химерного состояния начальные условия генераторов второго слоя должны быть выбраны определенным образом. Если выбрать их так, чтобы все генераторы второго слоя демонстрировали при  $k = 0$  высокочастотный хаотический режим, то после включения взаимной связи между слоями два периодических генератора первого слоя переходят в хаотический режим, и химерное состояние в первом слое разрушается (рис. 2), причем хаотические колебания генераторов оказываются не синхронизованы между слоями. Аналогичная картина наблюдается в том случае, когда до включения межслойной связи генераторы второго слоя с номерами  $i = 1, 2$  совершают хаотические колебания, а генераторы с номерами  $i = 3, 4$  совершают периодические колебания. В этом случае после включения взаимной связи между слоями все восемь генераторов также оказываются в высокочастотном хаотическом режиме.



**Рис. 2.** Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_i^j(t)$  генераторов первого слоя (а) и второго слоя (б) при  $\tau = 1$  ms,  $\varepsilon = 0.08$  ms,  $k_p = 0.01$ , демонстрирующие разрушение химерного состояния при взаимной связи  $k = 0.5$  между слоями. Временные реализации  $x_i^1(t)$  и  $x_i^2(t)$  показаны одинаковым цветом (см. электронную версию статьи).



**Рис. 3.** Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения  $x_i^j(t)$  генераторов первого слоя (а) и второго слоя (б) при  $\tau = 1$  ms,  $\varepsilon = 0.08$  ms,  $k_p = 0.01$ , демонстрирующие копирование химерного состояния при однонаправленной связи  $k = 0.5$  от первого слоя ко второму. Временные реализации  $x_i^1(t)$  и  $x_i^2(t)$  показаны одинаковым цветом (см. электронную версию статьи).

Таким образом, взаимная межслойная связь может привести к изменению бистабильных состояний генераторов как первого, так и второго слоя. Если при включении межслойной связи возникает связь между

генераторами, находящимися в одном режиме колебаний, то после выключения связи в обоих генераторах остается этот режим. Если же связь возникает между генераторами, находящимися в разных режимах колебаний, то в результате взаимодействия в каждом из генераторов формируется высокочастотный хаотический режим колебаний.

Рассмотрим теперь случай однонаправленной связи между слоями сети, при котором для второго слоя в уравнении (1) отсутствует последний член, а для первого слоя вместо этого члена появляется слагаемое  $k_m(t)x_i^2$ . Параметры и начальные условия генераторов первого слоя выберем такими же, как в рассмотренном выше случае, при котором существует химерное состояние. Начальные условия генераторов второго слоя таковы, что все они совершают несинхронные хаотические колебания при  $k = 0$ . После включения однонаправленной межслойной связи  $k = 0.5$  наблюдается вынужденная синхронизация генераторов второго слоя (рис. 3). В результате во втором слое возникает копия химерного состояния, существующего в первом слое, которая сохраняется и после отключения межслойной связи. В отличие от случая взаимной межслойной связи химерное состояние во втором слое возникает при любых начальных условиях его генераторов. Как видно из рис. 3, при  $k_p \ll k$  генераторы второго слоя демонстрируют переключение из высокочастотного хаотического режима в низкочастотный периодический, которое не наблюдалось при взаимной связи между слоями.

Итак, нами впервые экспериментально исследовано явление клонирования химерных состояний в двухслойной сети генераторов с запаздывающей обратной связью. Показано, что при взаимной связи между слоями клонирование химерного состояния возникает лишь при определенном выборе начальных условий генераторов и обусловлено конкуренцией колебательных режимов. При сильной однонаправленной связи между слоями копия химерного состояния возникает в результате вынужденной синхронизации и не зависит от начальных условий генераторов.

## Благодарности

Авторы благодарят В.И. Некоркина за полезные обсуждения работы.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ, проект МК-1199.2019.8 (дизайн экспериментальной установки), а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-02-00071 (управление коллективной динамикой).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] О.В. Масленников, В.И. Некоркин, УФН, **187** (7), 745 (2017). DOI: 10.3367/UFNr.2016.10  
[Пер. версия: 10.3367/UFNr.2016.10.037902].
- [2] В.И. Пономаренко, Д.Д. Кульминский, М.Д. Прохоров, Письма в ЖТФ, **44** (17), 11 (2018). DOI: 10.21883/PJTF.2018.17.46565.17366  
[Пер. версия: 10.1134/S1063785018090109].
- [3] Д.Д. Кульминский, В.И. Пономаренко, И.В. Сысоев, М.Д. Прохоров, Письма в ЖТФ, **46** (4), 26 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.04.49046.18018  
[Пер. версия: 10.1134/S1063785020020236].
- [4] В.И. Пономаренко, Д.Д. Кульминский, А.С. Караваев, М.Д. Прохоров, Письма в ЖТФ, **43** (6), 64 (2017). DOI: 10.21883/PJTF.2017.06.44405.16546  
[Пер. версия: 10.1134/S1063785017030208].
- [5] D.M. Abrams, S.H. Strogatz, Phys. Rev. Lett., **93**, 174102 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
- [6] L.V. Gambuzza, A. Buscarino, S. Chessa, L. Fortuna, R. Meucci, M. Frasca, Phys. Rev. E, **90**, 032905 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevE.90.032905
- [7] V.I. Ponomarenko, D.D. Kulminskiy, M.D. Prokhorov, Phys. Rev. E, **96**, 022209 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.96.022209
- [8] J. Hizanidis, N.E. Kouvaris, G. Zamora-López, A. Díaz-Guilera, C.G. Antonopoulos, Sci. Rep., **6**, 19845 (2016). DOI: 10.1038/srep19845
- [9] D.V. Kasatkin, V.I. Nekorkin, Chaos, **28**, 093115 (2018). DOI: 10.1063/1.5031681
- [10] V.A. Maksimenko, V.V. Makarov, B.K. Bera, D. Ghosh, S.K. Dana, M.V. Goremyko, N.S. Frolov, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, Phys. Rev. E, **94**, 052205 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052205
- [11] G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, Reg. Chaot. Dyn., **23**, 948 (2018). DOI: 10.1134/S1560354718070092
- [12] Т.Р. Богатенко, А.В. Бух, В.С. Анищенко, Г.И. Стрелкова, Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика, **20** (1), 42 (2020). DOI: 10.18500/1817-3020-2020-20-1-42-54
- [13] Д.С. Шапин, А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин, Письма в ЖЭТФ, **106** (9), 591 (2017). DOI: 10.7868/S0370274X17210135  
[Пер. версия: 10.1134/S0021364017210111].
- [14] A.V. Andreev, N.S. Frolov, A.N. Pisarchik, A.E. Hramov, Phys. Rev. E, **100**, 022224 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022224
- [15] A.V. Andreev, M.V. Ivanchenko, A.N. Pisarchik, A.E. Hramov, Chaos Solit. Fract., **139**, 110061 (2020). DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110061
- [16] S. Majhi, B.K. Bera, D. Ghosh, M. Perc, Phys. Life Rev., **28**, 100 (2019). DOI: 10.1016/j.plrev.2018.09.003
- [17] N. Frolov, V. Maksimenko, S. Majhi, S. Rakshit, D. Ghosh, A. Hramov, Chaos, **30**, 081102 (2020). DOI: 10.1063/5.0019200
- [18] А.С. Дмитричев, Д.С. Шапин, В.И. Некоркин, Письма в ЖЭТФ, **108** (8), 574 (2018). DOI: 10.1134/S0370274X18200109  
[Пер. версия: 10.1134/S0021364018 200079].
- [19] A. Dmitrichev, D. Shchapin, V. Nekorkin, Front. Appl. Math. Stat., **5**, 9 (2019). DOI: 10.3389/fams.2019.00009
- [20] T. Erneux, *Applied delay differential equations* (Springer-Verlag, N.Y., 2009). DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1