

Саратовский государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники  
Российской Академии Наук

На правах рукописи  
УДК: 530.182, 53.083

СЫСОЕВ Илья Вячеславович

**РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ  
СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ СКРЫТЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И  
ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

01.04.03 — Радиоп физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Безручко Б.П.

Саратов — 2007

# Оглавление

Введение	4
<b>1 Реконструкция при наличии скрытых переменных</b>	<b>21</b>
1.1 Введение	21
1.2 Методы оценки параметров при наличии скрытых переменных	23
1.2.1 Метод начального условия	23
1.2.2 Метод множественной стрельбы	24
1.3 Сравнительный анализ в численном эксперименте	27
1.3.1 Методика сравнения	27
1.3.2 Оценка параметров системы Лоренца	29
1.3.3 Оценка влияния измерительного шума на результат реконструкции	30
1.3.4 Оптимальный выбор параметров алгоритма: количества фрагментов и их длины	31
1.3.5 Преимущества модифицированного метода	33
1.3.6 Выбор оптимального количества разрывов	35
1.3.7 Универсальность оптимального выбора числа подсегментов $L$ при различном числе сегментов непрерывности $\nu$	38
1.3.8 Реконструкция системы Рёсслера	40
1.3.9 Подбор стартовых догадок для скрытых переменных	41
1.4 Выводы	45
<b>2 Реконструкция систем под регулярным воздействием</b>	<b>50</b>
2.1 Введение	50
2.2 Методика реконструкции	52
2.3 Численный эксперимент	54
2.3.1 Реконструкция при гладком периодическом воздействии	54
2.3.2 Влияние шума на результат реконструкции	58
2.3.3 Реконструкция при треугольном периодическом воздействии	60
2.3.4 Реконструкция при воздействии с субгармониками	63
2.3.5 Реконструкция при квазипериодическом воздействии	66
2.4 Выводы	68
<b>3 Восстановление внешнего воздействия методами работы со скрытыми переменными</b>	<b>70</b>
3.1 Введение	70
3.2 Методика реконструкции	73
3.3 Численные примеры реконструкции	75
3.3.1 Автономный режим периодический, воздействие хаотическое	76
3.3.2 Реконструкция по зашумлённым данным	77

3.3.3	Автономный режим хаотический, воздействие хаотическое . . . . .	79
3.3.4	Автономный режим хаотический, воздействие шумом . . . . .	81
3.3.5	Ситуация большого числа скрытых переменных . . . . .	81
3.3.6	Реконструкция уравнений генератора с 1,5 степенями свободы . . . . .	83
3.4	Возможные приложения метода . . . . .	84
3.4.1	Скрытая передача и кодирование информации . . . . .	86
3.5	Выводы . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Приложение методов реконструкции</b>	<b>91</b>
4.1	Введение . . . . .	91
4.2	Способ определения характеристик нелинейных устройств . . . . .	92
4.2.1	Выбор объекта и постановка эксперимента . . . . .	93
4.2.2	Выбор эквивалентного представления . . . . .	94
4.2.3	Реконструкция в режиме малых сигналов . . . . .	97
4.2.4	Реконструкция в режиме больших периодических сигналов. Зави- симость ёмкости от частоты воздействия . . . . .	99
4.2.5	Реконструкция в режиме больших периодических сигналов. Зави- симость ёмкости от амплитуды воздействия . . . . .	104
4.2.6	Использование метода множественной стрельбы при реконструк- ции характеристик диода . . . . .	106
4.2.7	Учёт сопротивления базы . . . . .	107
4.2.8	Разбраковка устройств . . . . .	109
4.3	Реконструкция моделей голосовых связок . . . . .	112
4.3.1	Механические модели голосовых связок . . . . .	113
4.3.2	Исследование духмассовой модели . . . . .	118
4.3.3	Реконструкция уравнений двухмассовой модели по её решениям . . . . .	121
4.4	Реконструкция модели нефрона . . . . .	123
4.4.1	Уравнения модели нефрона . . . . .	123
4.4.2	Реконструкция модели нефрона по модельным и эксперименталь- ным реализациям . . . . .	125
4.5	Выводы . . . . .	130
	<b>Заключение</b>	<b>132</b>
	<b>Благодарности</b>	<b>136</b>
	<b>Литература</b>	<b>138</b>

# Введение

Развитие концепции динамического хаоса продемонстрировало возможность описания сложных движений с помощью простых нелинейных моделей и усилило интерес к методам моделирования по дискретным последовательностям экспериментальных данных (временным рядам). Построенные по рядам эмпирические модели интересны сами по себе, например для организации прогноза дальнейшего поведения, оценки адекватности модельных представлений, а также дополняют традиционные методы анализа сигналов такие, как спектральный Фурье и вейвлет анализ, построение авто- и взаимных корреляционных функций, функций взаимной информации и т.д., используются для оценки структуры фазовых портретов, бифуркационных диаграмм и особенностей пространства параметров.

Исторически в основе реконструкции<sup>1</sup> лежит задача аппроксимации точек на плоскости  $(x, y)$  функцией  $y = f(x)$  [2, 3, 4, 5]. Но в настоящее время речь идёт об описании сложных, часто хаотических процессов, поэтому появляется необходимость построения по экспериментальным данным разностных уравнений (дискретных отображений — отображений последования):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Реконструкция — термин, используемый в нелинейной динамике. В математической статистике принят другой термин — «идентификация систем»[1].

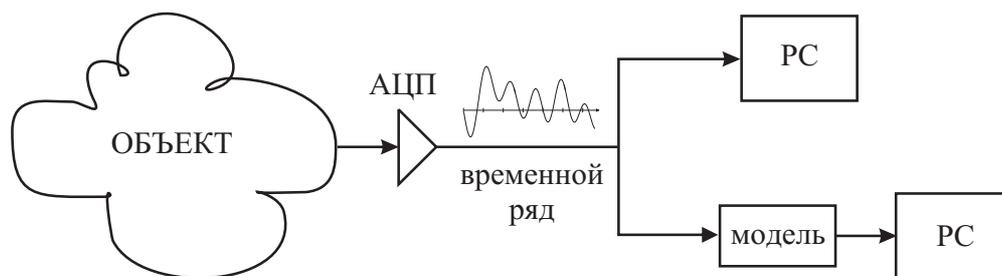


Рис. 1: два подхода к обработке экспериментальных временных рядов — непосредственная обработка и обработка на основе построения модели.

обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_D, t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_D, t) \\ &\dots \\ \frac{dy_D}{dt} &= f_D(y_1, y_2, \dots, y_D, t)\end{aligned}\tag{2}$$

и даже уравнений в частных производных [6] и пространственно распределённых систем в виде решёток отображений [8]<sup>2</sup>. При этом основная идея остаётся неизменной — подгонка коэффициентов аппроксимирующих функций  $f_i$  по точкам в многомерном фазовом пространстве  $\{y_i\}$ , что по силам только современным высокопроизводительным компьютерам и требует специальных алгоритмов.

Реконструкция модельных уравнений служит средством решения значительного числа практически важных задач, среди которых:

- прогноз дальнейшего поведения с целью предсказания последствий или контроля и управления объектом;
- определение наличия и направленности (или даже структуры связей) между двумя системами или между подсистемами одной системы;
- классификация систем [10].
- измерение величин, недоступных напрямую (причины могут быть различны: несовершенство аппаратуры, риск повреждения объекта и др.) [11];
- оценка адекватности модельных представлений, сравнение различных моделей;
- диагностика патологий, поломок или разбраковка устройств;

---

<sup>2</sup>До открытия детерминированного хаоса любое сложное поведение считалось реализацией некоторого случайного процесса, поэтому использовались простые модели, в структуру которых входили только линейные функции, в обязательном порядке содержащие случайную добавку. Таковы классические модели авторегрессии и скользящего среднего [9].

- скрытая (конфиденциальная) передача, кодирование и декодирование информации [12, 13];

Восстановленные по временным рядам модели используются в настоящее время в радиофизике [14], лазерной физике [15, 16], биофизике и биологии (в частности, при изучении структуры и механизмов функционирования клетки [17]), метеорологии [18, 19], сейсмографии [20], экономике [21, 22], медицине и физиологии [23, 24, 25], астрофизике [26], и т.д.

Развитие алгоритмов реконструкции долгое время шло по пути создания универсальных методик, рассчитанных на широкий класс систем обладающих высокою степенью универсальности. К таковым относится, например, так называемый стандартный подход [27], когда по скалярной наблюдаемой восстанавливаются уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_3 \\ &\dots \\ \frac{dy_D}{dt} &= f(y_1, y_2, \dots, y_D) \end{aligned} \tag{3}$$

где  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, D$  — динамические переменные,  $D$  — размерность модели,  $f(y_1, y_2, \dots, y_D)$  — единственная неизвестная функция, представляемая обычно в виде полинома. Претензии таких моделей на общность теоретически обоснованы, поскольку в виде (3) может быть представлена почти любая система ОДУ (подробнее см. [28]) и любая непрерывная функция  $f$  в (3) может быть сколь угодно точно равномерно приближена алгебраическим полиномом (теорема Вейерштрасса). К тому же они требуют минимума дополнительной информации об объекте. Однако при их практическом применении возникают многочисленные и трудноразрешимые проблемы, главная причина которых — «проклятие размерности». Так принято называть проблемы, связанные повышением размерности модели: быстрый рост количества коэффициентов, недостаточная длина экспериментального ряда для восстановления пространства состояний, а при использовании последовательного дифференцирования, как в 3, также увеличение влияния шумов. Большое число коэффициентов разложения в ряд по выбранному

базису приводит к росту вычислительных затрат, а главное — существенно снижает область сходимости используемых итерационных алгоритмов, так как подавляющее большинство их являются лишними. Существующие способы устранения лишних коэффициентов достаточно громоздки, так как связаны с многократным перебором, и всё равно позволяют решить эту задачу лишь частично. Важно также, что коэффициенты  $\mathcal{Z}$  не имеют понятного физического смысла и их сложно интерпретировать.

Альтернативой универсальным методам являются специализированные алгоритмы, ориентированные на некоторый достаточно узкий класс систем. Эти подходы, опираясь на априорную или дополнительную информацию, зачастую позволяют достигнуть успеха там, где применение универсальных алгоритмов оказывается бесперспективным.

Одной из распространённых ситуаций, требующих разработки специализированных алгоритмов необходимо, является случай так называемых «скрытых» переменных. Скрытыми называются такие  $(D - l)$  из общего числа  $D$  переменных модели (2), которые не могут быть измерены в принципе или полученные временные ряды этих переменных непригодны для моделирования, например, из-за высокой зашумлённости. Основная причина — несовершенство аппаратуры, а также риск разрушить объект (это особенно актуально для биологических систем). Такая ситуация часто встречается на практике, если модель записывается из первых принципов и стоит задача проверки её адекватности или оценки неизвестных параметров и нелинейных функций.

Основной принцип методов работы со скрытыми переменными был выдвинут достаточно давно и заключается в том, что начальные условия для скрытых переменных включаются в число неизвестных параметров<sup>3</sup>. Для этих начальных условий задаются стартовые догадки  $y_{l+1}^{0,s}(t_1), \dots, y_D^{0,s}(t_1)$ <sup>4</sup>, задаются стартовые догадки для параметров  $c_1^s, \dots, c_p^s$ . Затем формулируется критерий, на основе которого стремятся достигнуть максимально возмож-

<sup>3</sup>Альтернативный подход, использующий явление хаотической синхронизации см. в [29].

<sup>4</sup>Индексом  $s$  сверху будем далее обозначать стартовые догадки для соответствующих величин, индексом 0 — начальные условия.

ной близости между траекториями наблюдаемых  $\eta_k(t_i)$  и соответствующих им нескрытых модельных переменных, для чего используется один из итерационных методов глобальной оптимизации.

Применение описанного подхода напрямую<sup>5</sup> для длинных хаотических рядов малоэффективно, поскольку высокая чувствительность траектории к начальным условиям приводит к тому, что задачу глобальной оптимизации сложно решить из-за большого количества локальных минимумов вблизи глобального (см. [30]). Поэтому в [31] предложена модификация, состоящая в том, что для каждой переменной задаётся не одно, а сразу несколько —  $L$  начальных условий  $y_k^{0,s}(t_1), y_k^{0,s}(t_{n+1}), \dots, y_k^{0,s}(t_{(L-1)n+1})$  на разных участках временного ряда. Такой модифицированный метод называется методом множественной стрельбы по аналогии с одноимённым методом решения краевых задач для ОДУ. В случае, если дополнительно на траекторию накладывается условие непрерывности (4) траектории («сшивания» фрагментов), алгоритм часто называют методом Бока.

$$\mathbf{y}^0(t_{jn+1}) = \mathbf{y}(t_{jn+1}, \mathbf{y}^0(t_{j(n-1)+1})), \quad n = 1, \dots, (L-1) \quad (4)$$

где  $n$  — число точек в одном фрагменте (таким образом  $N = Ln$ ),  $\mathbf{y}(t_{jn+1}, \mathbf{y}^0(t_{j(n-1)+1}))$  — значение вектора состояния модели, полученного интегрированием уравнений с начальными условиями  $\mathbf{y}^0(t_{j(n-1)+1})$ . Получается задача условной минимизации. При произвольном выборе стартовых догадок для всех искомых величин траектория модели, как правило, состоит из нестыкующихся сегментов. Но в процессе работы итерационного метода сегменты всё лучше удовлетворяют условию (4), так что в итоге траектория модели оказывается непрерывной. При  $L = 1$  алгоритм Бока превращается в метод начального условия. Условие (4) позволяет существенно сократить количество независимых неизвестных параметров модели, однако при достаточно длинных рядах оно приводит к тем же неприятностям, что и использование метода начального условия: найти глобальный минимум оказывается чрезвычайно сложно.

---

<sup>5</sup>Такой подход часто называют методом начального условия.

Таким образом, для методов множественной стрельбы, рассчитанных на реконструкцию при наличии скрытых переменных, остаётся существенным ограничение на длину используемого временного ряда при применении к хаотическим временным рядам. Нет никаких правил выбора количества фрагментов  $L$ , на которые делится ряд, а также нет указаний, каким образом формировать стартовые догадки для рядов скрытых переменных. Неизвестны критерии, по которым можно оценить шансы на успех, в частности, на сколько, хотя бы приблизительно, можно ошибиться в задании стартовых догадок для искомым параметров по сравнению с их «истинными» значениями, чтобы остаться в области притяжения глобального минимума. Без решения этих проблем использование методов работы со скрытыми переменными затруднительно, что обосновывает актуальность и практическую важность данной работы.

Другой практически важный класс объектов, для которых в диссертации разрабатываются специализированные методики, — неавтономные системы. Необходимость этого обусловлена тем, что, хотя неавтономную динамическую систему можно свести к виду (3), это ведёт к росту размерности и сложности аппроксимирующей функции  $f(y_1, y_2, \dots, y_D)$ . Поэтому неавтономность следует учитывать в структуре модели. Информация об этом может быть известна априорно, либо такое предположение можно сделать, анализируя сами временные ряды, например, по спектру, если в нём присутствуют один или несколько резких пиков.

Существуют несколько подходов к реконструкции неавтономных систем. Один из них предполагает возможность измерения рядов той же системы в автономном режиме, на основе которых восстанавливаются параметры модели, а затем уже по неавтономным реализациям реконструируется само воздействие [32, 33, 34]. Преимущество такого подхода состоит в том, что на воздействие не накладываются никакие ограничения: оно может быть как регулярным, так и хаотическим или шумовым. Но доступность рядов автономной системы — существенное и трудновыполнимое на практике требование.

Если ряды автономной системы недоступны, в [35, 36] разработан подход, позволяющий учесть только гармоническое воздействие, хотя и при произвольном способе его внесения. Подход основан на введении в уравнения явной зависимости от времени и может быть расширен на случай всякого регулярного: периодического и квазипериодического воздействия, что сделано во второй главе. Актуальность такой модификации объясняется тем, что негармоническое, в частности, импульсное воздействие очень распространено на практике.

Недостатком развитого в [35, 36] подхода является необходимость явно задавать зависимость внешнего воздействия от времени, что исключает возможность применения для любого нерегулярного сигнала: как хаотического детерминированного, так и случайного. Это важное ограничение в значительной степени снимает новый метод, предложенный в третьей главе диссертации. Согласно ему внешнее воздействие представляется как дополнительная скрытая переменная.

Актуальность работы определяется тем, что развиваемые и предлагаемые в ней методики предназначены для решения теоретических (расширение и уточнение имеющихся представлений об объектах природы) и прикладных (разработка методов косвенного измерения, прогноз дальнейшего поведения, диагностика патологий, построение систем приёма и передачи информации и др.) задач. Для этого требуется разработка специализированных алгоритмов, рассчитанных на определённые ситуации, из которых в работе выделены две: присутствие скрытых переменных и наличие внешнего воздействия. Существующие специальные методы имеют большое количество ограничений, кроме того общие рекомендации по их применению отсутствуют, что в значительной степени снижает эффективность.

Практическая важность работы определяется тем, что в ней предложены алгоритмы реконструкции модельных уравнений, позволяющие решать практические задачи, недоступные решению другими методами. В частности, предложен новый подход к измерению эквивалентных характеристик радиofизических устройств, отличающийся тем, что позволяет проводить

измерения непосредственно в интересующем нас режиме независимо от его сложности, в то время как традиционные методы ориентированы на измерения только в режимах постоянных, медленно меняющихся или низкоамплитудных гармонических сигналов.

Предложенные и модифицированные в диссертации методы работы со скрытыми переменными апробированы на примерах из биофизики. Так, рассматривается задача реконструкции двухмассовой модели голосовых связок человека и модели нефрона (функциональной единицы почки). Преследуется двойная цель: во-первых, исследовать адекватность этих моделей опираясь на экспериментальные данные, во-вторых, научиться восстанавливать некоторые параметры этих моделей для конкретного организма (к настоящему времени известны только средние, характерные значения), что может быть использовано в целях нетравматической диагностики.

**Целью диссертационной работы** являются исследование эффективности существующих алгоритмов реконструкции динамических систем по временным рядам сложных, в том числе и хаотических, колебаний при наличии скрытых переменных и внешнего воздействия, их модернизация и применение для решения практически важных задач.

Для достижение поставленной цели были решены следующие задачи:

- проведена оценка работоспособности современных методов работы со скрытыми переменными, основанных на алгоритме множественной стрельбы, для чего требуется ввести объективные количественные критерии;
- усовершенствован метод Бока на случай длинных рядов, а также разработаны рекомендации на оптимальную длину используемого ряда, его способ деления и вид стартовых догадок для скрытых переменных;
- осуществлено расширение известных алгоритмов реконструкции неавтономных систем на случай произвольного регулярного (сложного периодического и квазипериодического), хаотического и шумового воздействия;

- разработан способ определения нелинейных характеристик радиотехнических устройств в реальном режиме эксплуатации;
- проведена реконструкция по экспериментальным данным различных моделей реальных биологических систем с целью проверки их адекватности и измерения практически важных параметров, рассматривались система регуляции давления в нефроне (функциональной единице почки) и процесс образования основного тона колебаний голосовыми связками человека.

**Объекты исследования.** Представленные в работе методы, как заимствованные, так и оригинальные тестируются на эталонных динамических системах, таких как неавтономный осциллятор Тоды [37, 38], система Лоренца [39], система Рёсслера [40], а также ставших уже классическими моделях радиотехнических генераторов хаоса с 1,5 и 2,5 степенями свободы [41, 42], рекомендуемых авторами для использования в системах связи на хаотической несущей. Метод реконструкции нелинейных характеристик радиофизических устройств тестируется на примере полупроводникового диода с р-п переходом типа КД202Р, от которого измеряются ряды тока через него и напряжения на нём при различных видах воздействия. В биологических приложениях используются модель нефрона [43] и различные модели голосовых связок человека [44, 45, 46].

На защиту выносятся следующие **положения и результаты:**

1. Предложенный модифицированный метод множественной стрельбы имеет больший радиус сходимости, чем оригинальный алгоритм Бокка, если при его использовании делить тренировочный временной ряд на сегменты длиной порядка величины, обратной старшему ляпуновскому показателю.
2. Новый метод реконструкции по скалярным хаотическим временным рядам дифференциальных уравнений систем, находящихся под регулярным воздействием, имеет преимущества перед известными универ-

сальными алгоритмами, поскольку обладает большей областью сходимости, более устойчив к измерительным шумам, а также позволяет обойтись меньшим количеством параметров, что упрощает применение модели.

3. Предложенный подход к восстановлению внешнего воздействия и оценке параметров неавтономных систем применим при произвольном воздействии, в том числе хаотическом или шумовом, а также тогда, когда вид воздействия неизвестен; подход не требует дополнительных измерений рядов автономной системы.
4. Разработан и запатентован способ измерения характеристик нелинейных устройств, основанный на использовании методов реконструкции неавтономных систем и позволяющий проводить измерения в произвольном эксплуатационном режиме.

**Достоверность полученных результатов и выводов** подтверждается их воспроизводимостью в численном, радиофизическом и биофизическом эксперименте, а также тем, что они опираются на теоретические результаты, полученные в самой работе, и базовые результаты нелинейной динамики и радиофизики.

**Научная новизна работы состоит в следующем:**

1. Известный ранее способ реконструкции неавтономных систем распространён на случай произвольного регулярного способа воздействия. На примере эталонной динамической системы — неавтономного осциллятора Тоды под воздействием различных форм и спектра — показано, что в подавляющем типичном случае использование данного метода может привести к успеху, в то время как применение универсальных методик неэффективно.
2. С помощью введённого количественного критерия сформулированы рекомендации по использованию методов множественной стрельбы реконструкции динамических систем при наличии скрытых переменных: условия на оптимальный выбор длины тренировочного ряда, способ

его деления на сегменты и подсегменты, способ построения стартовых догадок для скрытых переменных.

3. Проведено сравнение работоспособности различных реализаций метода множественной стрельбы. На численных примерах систем Лоренца и Рёсслера показано, что исходный алгоритм Бока уступает его модификации, заключающейся в допуске разрывов траектории модели при сохранении единых значений параметров.
4. С использованием методов реконструкции неавтономных систем изобретён способ измерения характеристик нелинейных устройств, отличающийся от уже существующих тем, что позволяет измерять такие характеристики в произвольном режиме эксплуатации, в том числе и в сложных нелинейных режимах. Кроме того, способ позволяет получать характеристики, недоступные прямому измерению.
5. Предложен принципиально новый подход к реконструкции нелинейных систем под произвольным (в том числе хаотическим и шумовым) воздействием в случае, когда структура уравнений системы хорошо известна. Подход основывается на представлении внешнего воздействия в виде дополнительной скрытой переменной, написании для этой переменной собственного эволюционного уравнения и реконструкции полученной модифицированной системы методами работы со скрытыми переменными.

### **Теоретическая и практическая значимость результатов.**

- Результаты данной работы по модернизации метода реконструкции неавтономных систем обобщают ранее полученные на случай произвольного регулярного воздействия. Это расширяет спектр объектов применения данного метода.
- Исследование эффективности и пределов применимости методов множественной стрельбы с помощью впервые введённых количественных

критериев подтверждает ранее высказанное мнение об их высокой работоспособности и предлагает общие рекомендации по выбору некоторых параметров моделирования: длины используемого временного ряда, количества его сегментов, способу подбора стартовых догадок для скрытых переменных. Также показано, что мало популярный модифицированный метод множественной стрельбы, допускающий разрывы траектории модели, более эффективен, чем оригинальный алгоритм Бока, причём его преимущества проявляются для более длинных временных рядов. Это позволит в дальнейшем при моделировании сократить и упростить этап подбора параметров модели.

- Предложенный новый подход к реконструкции неавтономных систем под произвольным внешним воздействием имеет целый ряд возможных приложений, среди которых можно выделить следующие. Косвенное измерение величин, которые невозможно измерить непосредственно: используя в качестве датчика объект, для которого существует хорошая модель и на который действует измеряемая величина, последняя может быть восстановлена как скрытая переменная. Определение наличия связи (воздействия): если важно выяснить, влияет ли на исследуемую систему некоторая другая система, и примерно известно в какую часть исследуемой системы это воздействие может подаваться. Построение системы скрытой передачи или кодирования информации.
- На основе метода реконструкции неавтономных систем разработан способ измерения нелинейных характеристик устройств, позволяющий измерять величины, недоступные прямому измерению, в произвольном режиме эксплуатации исследуемого устройства. Способ опробован на примере реконструкции вольтамперных и вольтфарадных характеристик полупроводникового диода с р-п переходом. Данный способ позволяет проводить разбраковку нелинейных устройств на основе произвольно выбранного критерия, что может быть использовано, в частности, при построении систем телекоммуникаций, где важ-

но с высокой точностью соблюдены идентичность компонентов системы приёмник–передатчик.

**Личный вклад соискателя.** Основные результаты диссертации получены лично автором. В совместных работах автором выполнены все компьютерные расчёты, включая обработку экспериментальных данных. Постановка задач, разработка методов их решения, выбор объектов, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены совместно с руководителем и другими соавторами.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертации были доложены на следующих конференциях:

- International Symposium Topical problems of nonlinear wave physics (Nizhny Novgorod, 2003).
- The second international conference on circuits and systems for communication (Moscow, 2004).
- 6th International School on Chaotic Oscillations and Pattern Formation (Saratov, 2001).
- VII Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, 2004).
- XII и XIII Всероссийские школы-конференции «Нелинейные волны — 2004» и «Нелинейные волны — 2006» (Нижний Новгород).
- Международная научно-техническая конференция «Радиотехника и связь» (Саратов, 2005).
- VI и VII Всероссийские научные конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2002, 2005).
- Межвузовская конференция «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ» (Саратов, 2001).

- I Конференция молодых учёных «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2006).
- научные школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (Саратов, 2000-2006).

Также результаты неоднократно обсуждались на научных семинарах:

- кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии ФНиБМТ СГУ,
- кафедры электроники, колебаний и волн ФНП СГУ (объединённые семинары с участием сотрудников кафедры нелинейной физики ФНП СГУ и сотрудников отделения физики нелинейных систем НИИ ЕН СГУ).

Исследования были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №02-02-17578, №05-02-16305), Фондом некоммерческих программ «Династия» и Американским фондом гражданских исследований и развития для государств бывшего Советского Союза (CRDF REC-006).

По теме диссертации опубликованы 22 работы: 4 статьи в реферируемых журналах, входящих в перечень рекомендованных ВАК, 2 в тематических сборниках статей, 16 статей и тезисов в сборниках трудов конференций.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. В ней содержится 101 страница текста, 51 рисунок, библиография из 110 наименований. Общий объём диссертации 150 страниц.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, даётся краткий обзор существующих методов их решения и накопленных результатов, формулируются цели и задачи исследования, также положения и результаты, выносимые на защиту, раскрывается научная новизна и теоретическое и практическое научное значение полученных в дис-

сертификации результатов и личный вклад соискателя, кратко описывается содержание работы.

В первой главе на основе специально введённых количественных критериев оценивается эффективность методов работы со скрытыми переменными (методов множественной стрельбы), предлагаются рекомендации по выбору оптимальных значений длины временного ряда и способа его деления на фрагменты. Также выявляются и раскрываются преимущества относительно нового подхода, предполагающего частичный отказ от непрерывности модельных траекторий, по сравнению с методом Бока.

Во второй главе известный метод реконструкции неавтономных систем, рассчитанный на случай гармонического воздействия, расширяется на случай произвольного воздействия с дискретным спектром (периодического и квазипериодического).

В третьей главе предлагается и апробируется новый подход к реконструкции неавтономных систем, состоящий в том, что внешнее воздействие представляется как дополнительная скрытая переменная, структура модели модифицируется (в модель добавляется дополнительное эволюционное уравнение для новой переменной), и реконструируется по имеющимся рядам нескрытых переменных. Преимуществом нового подхода является то, что он может учесть любое достаточно гладкое (в том числе хаотическое или шумовое) воздействие и при этом не требуется измерять дополнительно ряды объекта в автономном режиме. Подход протестирован на устойчивость к измерительным шумам высоких уровней.

Четвёртая глава посвящена применению предложенных методов в радиофизике и биофизике. В качестве радиофизического приложения разработан способ измерения нелинейных характеристик устройств, основанный на реконструкции по временным рядам токов и напряжений математических моделей изучаемого процесса, записанных на основе законов Кирхгофа, в которые искомые характеристики входят как нелинейные функции. Метод может использоваться при произвольном режиме эксплуатации. Рассмотрены два биофизических объекта: модель регуляции давления

в нефроне (функциональной единице почки) и различные модели вибрации голосовых связок человека.

Результаты диссертационной работы и выводы обобщаются и обсуждаются в заключении.

# Глава 1

## Реконструкция при наличии скрытых переменных

### 1.1 Введение

Задача построения математической модели, описывающей сложную динамику исследуемого объекта, по временным реализациям экспериментально наблюдаемых величин  $\eta(t)$ , может иметь различные постановки. Мы рассматриваем такую, в которой структура модельных уравнений полностью известна из «первых принципов» или других соображений:

$$dy/dt = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{c}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{y}$  — модельная переменная ( $D$ -мерный вектор состояния), а  $\mathbf{c}$  —  $P$ -мерный вектор параметров, который необходимо найти. Задача сводится к *оценке неизвестных параметров*  $c_1, \dots, c_P$  по наблюдаемому временному ряду. Такая постановка встречается, например, в аэродинамике (оценка коэффициентов аэродинамических сил при летном эксперименте с самолетом [47]), лазерной физике (оценка скоростей перехода между уровнями рабочего вещества газового лазера [15]), радиотехнике (моделирование электрических цепей с сегнетоэлектрическими или полупроводниковыми нелинейностями [11, 48]), клеточной биологии (оценка параметров модели нейрона [49], модели сигнального пути клеток определенного вида [17]).

Стандартная процедура реконструкции модели (1.1) предполагает знание векторного временного ряда значений  $\mathbf{y}$ , то есть требуется иметь ря-

ды всех  $D$  компонент, формируемых по данным эксперимента из ряда наблюдаемой  $\{\eta_i\}$ . Например, одна из переменных может просто совпадать с наблюдаемой, т.е. измеряется непосредственно, а другие — получаются из неё дифференцированием, интегрированием, использованием временной задержки, весовым суммированием и другими способами. Однако нередко из-за невозможности измерить нужную величину вследствие зашумлённости или иных причин удаётся сформировать ряды лишь для  $l < D$  компонент  $\mathbf{y}$ .  $(D - l)$  переменных, ряды которых не могут быть получены из данных наблюдения, называют *скрытыми*. Наличие скрытых переменных сильно усложняет задачу, требуя использования специальных подходов.

В этой ситуации основная тяжесть задачи построения модели переносится на этап оценки параметров, причем в число искомых величин кроме параметров вводят начальные условия. Обычно для оценки параметров используется метод наименьших квадратов<sup>1</sup>, который формулируется в данной ситуации следующим образом. Нужно подобрать такие начальные условия модели  $\mathbf{y}^0$  и параметры  $\mathbf{c}$ , чтобы обеспечить минимальное отклонение решения модельных уравнений  $\mathbf{y}$  от данных экспериментального наблюдения  $\mathbf{y}_\eta^l$ . Сравнение проводится только по  $l$  нескрытым компонентам  $\mathbf{y}$ . То есть требуется минимизировать функцию:

$$S(\mathbf{y}^0, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}_i^l(\mathbf{y}^0, \mathbf{c}) - \mathbf{y}_\eta^l i)^2 = \min, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{y}_i^l(\mathbf{y}^0, \mathbf{c})$  —  $l$ -мерный вектор «нескрытой» части решения уравнений (1.1),  $\mathbf{y}_\eta^l i$  — аналогичные значения, полученные из ряда наблюдаемой. Минимизацию (1.2) проводят с помощью численных итерационных методов, отправляясь от некоторых *стартовых догадок* для искомых величин  $\mathbf{y}^0, \mathbf{c}$ .

В случае хаотических рядов траектория модели очень чувствительна к начальным условиям, поэтому «рельеф» целевой функции (1.2) при зна-

---

<sup>1</sup>Следует сказать, что более статистически предпочтительными были бы оценки, полученные методом максимального правдоподобия, но его использование на практике затруднительно из-за сложности функции максимального правдоподобия и в данной работе отвлекло бы от основной цели исследования. Отметим, что, если шум является аддитивным, нормальным и дельта-коррелированным, оба метода совпадают.

чительном  $N$  весьма изрезан и имеет множество локальных минимумов, а область сходимости в глобальный минимум, соответствующий наиболее точным оценкам, очень узка, то есть требуются исключительно удачные стартовые догадки, чтобы туда попасть. Обойти трудности обещает изящный технический «трюк» — алгоритм множественной стрельбы [31, 30]. Но, как показывает опыт, он требует дополнительных усилий для его успешной реализации. Эта проблема уже привлекала к себе внимание [15, 50], но систематический её анализ не проводился.

В данной главе введены количественные критерии эффективности процедуры оценки параметров и проводится анализ условий работоспособности наиболее продуктивных алгоритмов реализации метода множественной стрельбы (п. 1.2). В численном эксперименте на примере эталонных хаотических систем, в том числе при добавлении измерительных шумов, продемонстрировано, что для длинных рядов наиболее эффективен модифицированный алгоритм Бока, ослабляющий требование непрерывности фазовой траектории модели на интервале наблюдения (п. 1.3).

## **1.2 Методы оценки параметров при наличии скрытых переменных**

### **1.2.1 Метод начального условия**

Так называют метод оценки параметров, состоящий в минимизации непосредственно функции (1.2), где  $N$  — длина всего наблюдаемого временного ряда [51]. На практике чем  $N$  больше, тем более достоверны получаемые оценки. Во-первых, без достаточного количества точек при наличии шумов достоверность полученных оценок оказывается низкой, во-вторых, важно, чтобы используемый ряд отражал все временные масштабы объекта. Но метод начального условия, как правило, неприменим для достаточно больших  $N$ , особенно в случае хаоса, поскольку из-за экспоненциальной чувствительности траектории модели к начальным условиям  $\mathbf{y}^0$  область сходимости в глобальный минимум целевой функции (1.2) столь мала, что

в неё почти невероятно попасть<sup>2</sup>. Недостатки этого подхода в сравнении с другими (см. п. 1.2.2) наглядно показаны в литературе, в частности, в [30] и [48], поэтому подробное рассмотрение его нецелесообразно.

### 1.2.2 Метод множественной стрельбы

Название метод множественной стрельбы получил по аналогии с методом решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку множественная стрельба лежит в основе нескольких методов, первоначальный алгоритм, предложенный Боком, будем именовать «алгоритм Бока».

#### Алгоритм Бока

Увеличить допустимые значения  $N$  и погрешностей в стартовых догадках позволяет модификация метода начального условия<sup>3</sup>. Она направлена на то, чтобы хотя бы на промежуточных этапах минимизации целевой функции снизить чувствительность траектории модели к начальным условиям  $\mathbf{y}^0$ . Это достигается путем разбиения исходного ряда на  $L$  более коротких сегментов ( $n$  — длина сегмента,  $N = Ln$ ) и использования начальных условий на этих сегментах  $\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_{n+1}^0, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^0$  в качестве дополнительных искомых величин — аргументов целевой функции  $S$ :

$$S(\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^0, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^n \left( \mathbf{y}_{(i-1)n+j}^l(\mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0, \mathbf{c}) - \mathbf{y}_{\eta(i-1)n+j}^l \right)^2 = \min, \quad (1.3)$$

где нижний индекс  $\mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0$  соответствует первой точке  $i$ -того фрагмента. Чтобы избежать большого числа независимых неизвестных, увеличи-

<sup>2</sup>Если временной ряд периодический, проблема разбегания траекторий, хотя и не по экспоненциальному закону, тоже может иметь место, например, в ситуации, когда какой-либо из параметров связан с периодом: тогда небольшая ошибка в его задании на больших временах даст существенное расхождение.

<sup>3</sup>Иной подход к решению этой проблемы предлагают методы, основанные на хаотической синхронизации. Их принцип состоит в том, что наблюдаемая синхронизует модель, причём одновременно решаются эволюционные уравнения для параметров, которые таким образом подгоняются по экспериментальному временному ряду. Подробнее см. [29, 52, 53, 54].

вающего дисперсию оценок, вводится условие непрерывности траектории модели — «сшивания» фрагментов:

$$\mathbf{y}_{in+1}^0 = \mathbf{y}_{in+1} \left( \mathbf{y}_{(i-1)n+1}^0, \mathbf{c} \right), \quad i = 1, \dots, L - 1 \quad (1.4)$$

Минимизация (1.3) при условии (1.4) — это задача условной минимизации. При произвольном выборе стартовых догадок для всех искомых величин траектория модели, как правило, состоит из  $L$  нестыкующихся сегментов. Но в процессе работы итерационного метода сегменты всё лучше удовлетворяют условию (1.4), так что в итоге траектория модели оказывается непрерывной. При  $L = 1, n = N$  алгоритм Бока превращается в метод начального условия.

Хотя в [30] утверждается, что для эффективности алгоритма Бока не требуется стартовых догадок, близких к истинным значениям, *практика показывает, что это далеко не всегда так* (см. ниже, пп. 1.3.5, 1.3.6). Алгоритм только до некоторой степени расширяет возможности оценки параметров по хаотическому ряду по сравнению с «наивным» методом начального условия. Причина этого состоит в том, что итоговое условие (1.4) часто оказывается для хаотических систем слишком жёстким и при достаточно большой длине  $N$  удается попасть только в локальные минимумы целевой функции (1.3).

### Кусочные методы

Чтобы точнее оценить параметры проще всего разбить ряд на короткие сегменты ( $L$  штук) и проводить реконструкцию по каждому из сегментов отдельно, например, с помощью того же алгоритма Бока. Итоговая оценка получается как среднее арифметическое  $\bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{c}_i$ . Такой подход называют «кусочным» [50]; при использовании на отдельных сегментах алгоритма Бока будем говорить о *кусочном методе множественной стрельбы*. Проблема здесь состоит в том, что для короткого сегмента оценка может быть существенно смещенной (даже оценки максимального правдоподобия лишь асимптотически несмещены) и это смещение может не устраняться

при усреднении по  $L$  кускам. Поэтому погрешности оценок для кусочного метода больше, чем для исходного алгоритма Бока, если при использовании последнего удастся найти глобальный минимум.

### Модифицированный метод

Опираясь на статистические соображения [50], можно утверждать, что использование сразу всего объема данных позволяет получать оценки с меньшим смещением, чем при кусочных подходах. Поэтому мы предлагаем обратить внимание на модификацию алгоритма Бока (далее — *модифицированный метод*), которая фактически уже использовалась в работе [15] для нехаотических рядов и упоминалась в [50]. Она состоит в отказе от непрерывности траектории модели в некоторые моменты времени внутри интервала наблюдения, т.е. условие (1.4) не требуется для  $(\nu - 1)$  моментов времени. Это означает, что начальные условия модели в эти  $\nu$  моментов, включая начальный, становятся независимыми искомыми величинами. Мы выберем их распределёнными равномерно внутри интервала наблюдения. По сравнению с кусочным методом параметры  $\mathbf{c}$  всегда удерживаются одинаковыми на всех сегментах. Такой подход сочетает ослабление требований к непрерывности траекторий модели с использованием всего длинного ряда в целом для оценки параметров. Он имеет два свободных параметра:  $\nu$  — число сегментов с независимыми начальными условиями и  $L$  — число подсегментов, на которые делится каждый сегмент для реализации алгоритма Бока, где  $N = \nu Ln$ . При  $\nu = 1$  модифицированный метод сводится к алгоритму Бока. Этот подход, на наш взгляд незаслуженно, не получил до сих пор широкого распространения. Может быть, это связано с тем, что нарушение гладкости траектории на первый взгляд не сулит хорошей модели истораживает.

## 1.3 Сравнительный анализ в численном эксперименте

### 1.3.1 Методика сравнения

Чтобы охарактеризовать и сопоставить эффективность алгоритмов были введены специальные количественные меры. Во-первых, введены нормированные на истинные значения  $c_i^0$  параметры:

$$b_i = (c_i - c_i^0) / c_i^0 \quad (1.5)$$

Это сделано потому, что отклонение на одну и ту же абсолютную величину для разных параметров имеет существенно разные последствия для режима системы в зависимости от абсолютной величины этого параметра. Точка  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  соответствует глобальному минимуму, если пренебречь шумами, включая погрешности вычислений.

Во-вторых, было использовано наглядное графическое представление: на рис. 1.1 в сечении пространства параметров плоскостью  $b_{i_2}, b_{i_3}$  в шкале серого отмечены результаты выбора соответствующих стартовых догадок. Белым показаны стартовые точки, откуда достигается глобальный минимум, т.е. получаются очень точные оценки параметров. Оттенками серого — точки, позволившие при оптимизации достичь лишь локального минимума, из которых получается оценка, далекая от истинных значений параметров — чем хуже, тем темнее. Чёрным цветом обозначены значения стартовых догадок, при которых алгоритм расходится. Размер светлой области на рис. 1.1 характеризует эффективность метода — чем она больше, тем работоспособнее алгоритм.

Области хороших догадок в типичном случае сильно изрезаны, к тому же само по себе такое представление не даёт количественной меры успешности метода. В качестве таковой меры  $\mu$  можно использовать относительную площадь светлой области внутри круга с центром в точке  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  и радиусом  $r$ . Фактически,  $\mu$  можно интерпретировать как вероятность попадания в глобальный минимум, если ошибка в стартовых догадках не больше  $r$ .

Однако величина  $\mu$  не всегда удобна в применении, поскольку сходимость метода характеризуется не одним числом, а функцией  $\mu(r)$ . Более

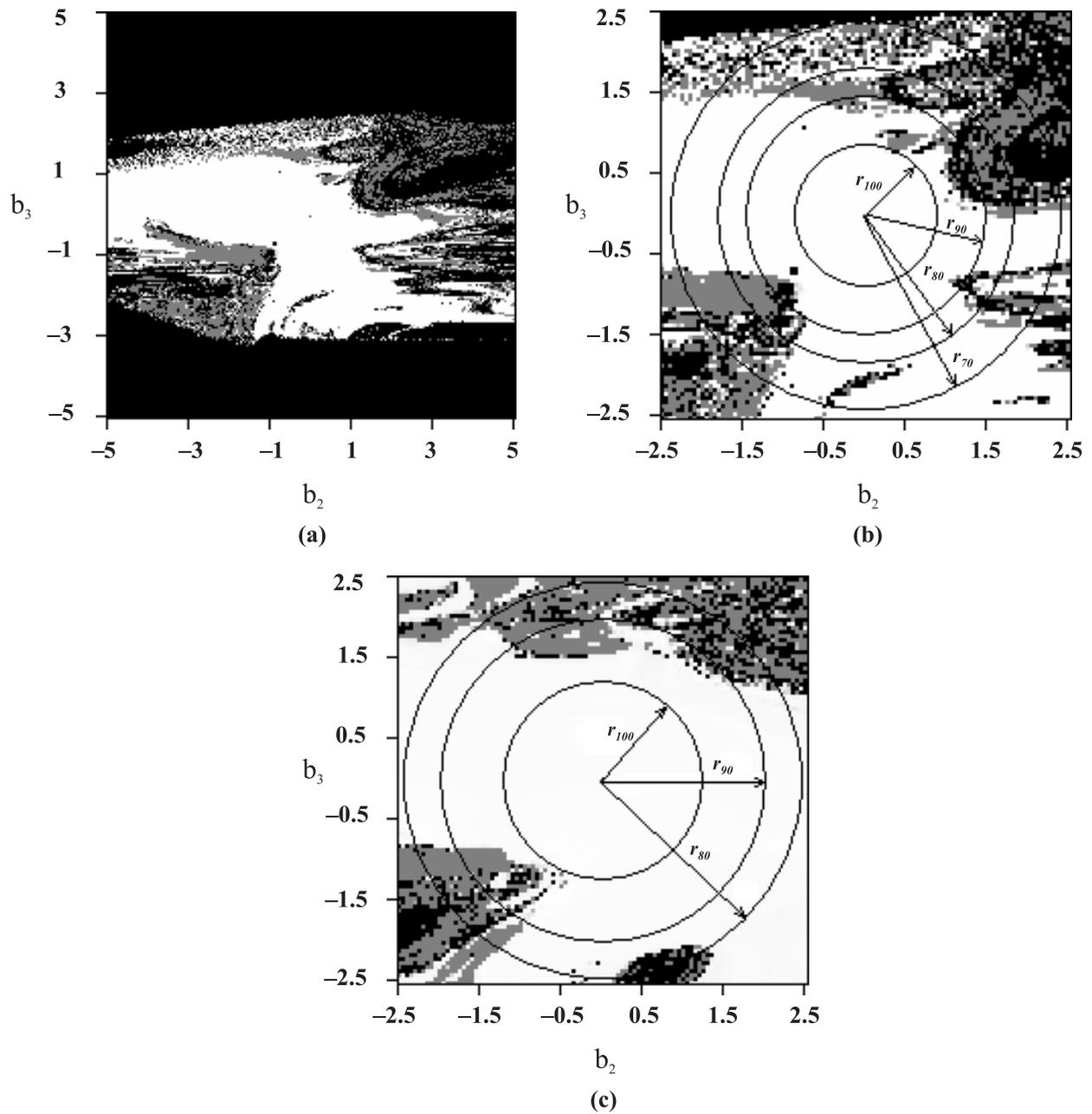


Рис. 1.1: плоскость нормированных стартовых догадок для параметров системы Лоренца (сечение пространства параметров плоскостью  $b_1 = 0$ ). Белым обозначены точки, откуда достигается глобальный минимум, оттенками серого — локальные минимумы (интенсивность зависит от их удалённости от глобального), чёрным — алгоритм минимизации расходится: (a), (b) алгоритм Бока при  $L = 30$ ,  $n = 35$  (рис. (b) представляет собою фрагмент из центральной части рисунка (a)), (c) модифицированный метод с  $L = 15$ ,  $n = 35$ ,  $\nu = 2$ .

простой интегральный критерий эффективности получается, если рассмотреть обратную зависимость  $r(\mu)$ . Терпимость метода к ошибкам в стартовых догадках усреднённо характеризуется величиной радиуса  $r_\mu$ , при которой вероятность попадания в глобальный минимум не меньше заданного  $\mu$  (см. рис. 1.1b,c). Для определенности далее будет в основном использоваться  $r_{100}$  — радиус 100%-ной сходимости<sup>4</sup>.

### 1.3.2 Оценка параметров системы Лоренца

В качестве первого объекта для исследования эффективности методов (работоспособности при длинных рядах и «терпимости» к стартовым догадкам) была выбрана система Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= c_1 (y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + y_1 (c_3 - y_3) \\ \dot{y}_3 &= -c_2 y_3 + y_1 y_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

с параметрами  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 46^5$  по решению, полученному при начальном условии  $y_1 = -7.60$ ,  $y_2 = -12.37$ ,  $y_3 = 38.66$ , произвольно выбранном на хаотическом аттракторе (старший ляпуновский показатель  $\lambda_1 = 1.23$  [30]). Уравнения интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.001, интервал выборки составлял 0.002 (около 280 точек на характерном периоде  $T$ ). В качестве ряда скалярной наблюдаемой использовалась последовательность значений переменной  $y_1$ . Для большей реалистичности к переменной аддитивно добавлялся нормальный шум:  $\eta = y_1 + \xi$ . Две остальные переменные  $y_2$  и  $y_3$  считались скрытыми, их временные ряды — неизвестными.

Угадать истинные (идеальные, наилучшие) стартовые догадки маловероятно, поэтому, следуя работам [30, 48], при оценке параметров в качестве стартовых догадок для всех переменных модели  $\mathbf{y}_1^0, \mathbf{y}_{n+1}^0, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^0, \dots, \mathbf{y}_{(\nu-1)Ln+(L-1)n+1}^0$  использовались значения наблюдаемой в соответствующие моменты времени. Такой подход неплохо зарекомендовал себя, хотя

<sup>4</sup>Вообще говоря, зависимость  $r(\mu)$  может быть неоднозначна, но при использовании  $r_{100}$  эта проблема снимается.

<sup>5</sup>В ряде случаев использовались также другие значения параметров, это всегда указывается особо.

и неидеален<sup>6</sup>. Для минимизации целевой функции использовался обобщенный метод Гаусса-Ньютона [30].

На рис. 1.1a,b в разных масштабах представлены результаты исследования сходимости в глобальный минимум для алгоритма Бока (п. 1.3.1) при различных стартовых догадках для параметров. Картины получены в случае длины ряда, при которой алгоритм Бока даёт максимальный радиус стопроцентной сходимости. На рис. 1.1 приведены сечения пространства параметров плоскостью  $b_1 = 0$ , поскольку в рассматриваемом случае ошибки в параметре  $b_1$  наименее критичны. Как видно из рис. 1.1a,b, область сходимости алгоритма Бока в случае незашумленного ряда достаточно широка — диаметр окружности  $r_{100}$  на плоскости нормированных параметров больше 0.7, т.е. допускаются ошибки в стартовых догадках больше 70%. Существуют и очень удалённые от истинных значений области, откуда также достигается сходимость в глобальный минимум (рис. 1.1a). Однако модифицированный метод ещё менее требователен к стартовым догадкам для параметров: сравните рис. 1.1b и рис. 1.1c, где значения  $r_{100}$ ,  $r_{90}$ ,  $r_{80}$  существенно больше, а соответствующая  $r_{100}$  белая область — шире.

### 1.3.3 Оценка влияния измерительного шума на результат реконструкции

На рис. 1.2 представлена зависимость меры  $\mu(r)$  при разных уровнях измерительного шума  $\xi$ , добавлявшегося к ряду аддитивно и имевшего нормальное распределение. Из рисунков видно, что даже весьма существенный по абсолютной величине шум — до 20% от амплитуды сигнала — тем не менее не приводит к качественному изменению зависимости  $\mu(r)$ . При некоторых значениях шума:  $\sigma_{noise}/\sigma_{signal} = 0.1$ , где  $\sigma_{noise}$  и  $\sigma_{signal}$  — среднеквадратичные отклонения шума и сигнала, величина  $\mu(r)$  может быть даже больше, чем в случае  $\sigma_{noise}/\sigma_{signal} = 0$  для отдельных реализаций

---

<sup>6</sup>Вариант использования идеальных стартовых догадок для скрытых переменных рассмотрен отдельно далее на частном примере, показывающем, что принципиально результаты ничем не отличаются от представленных далее.

шума, как в приведённом на рис. 1.2 примере<sup>7</sup>.

Рис. 1.3.3, где построены графики  $r_{100}(N)$  — радиуса 100%-ной сходимости в зависимости от длины ряда, показывает что низкая чувствительность алгоритма Бока к шумам является его общим свойством, поскольку выполняется для большого количества разных длин ряда. Графики для случая зашумлённых рядов качественно ничем не отличается от графика, соответствующего реконструкции без шума. Кроме того, рис. 1.3.3, как и рис. 1.2b, показывает, что модифицированный метод имеет столь же хорошие свойства устойчивости к шумам, как и оригинальный, несмотря на более низкие требования к непрерывности траектории (на рисунках показаны результаты применения модифицированного метода при  $\nu = 2$  и  $\nu = 4$ ).

#### 1.3.4 Оптимальный выбор параметров алгоритма: количества фрагментов и их длины

Общим правилом для большинства методов обработки экспериментальных данных, в том числе и методов реконструкции моделей по временным рядам, является стремление исследователя задействовать максимально большой объём имеющейся информации, то есть использовать максимально большой ряд. Однако, применяя метода Бока, мы сталкиваемся с необходимостью ограничить длину используемого ряда, чтобы увеличить вероятность попадания в глобальный минимум целевой функции (1.3).

На самом деле необходимо выбрать наилучшим образом не только длину ряда  $N$ , но и количество фрагментов  $L$ , на которые он делится. На практике удобнее задавать не  $N$  и  $L$ , а  $L$  и  $n$  — количество фрагментов и длину фрагмента. Чтобы охарактеризовать зависимость  $r_{100}(L, n)$  была проведена большая серия экспериментов с различными  $L$  и  $n$ , в каждом эксперименте строилось пространство стартовых догадок, как на рис. 1.1, и подсчитывался радиус 100%-ной сходимости. Результаты представлены на

---

<sup>7</sup>Хотя радиус сходимости может немного увеличиваться с ростом шума, точность полученных оценок параметров всегда снижается, т.е. значение параметров, соответствующее глобальному минимуму удаляется от истинных значений  $c^0$ .

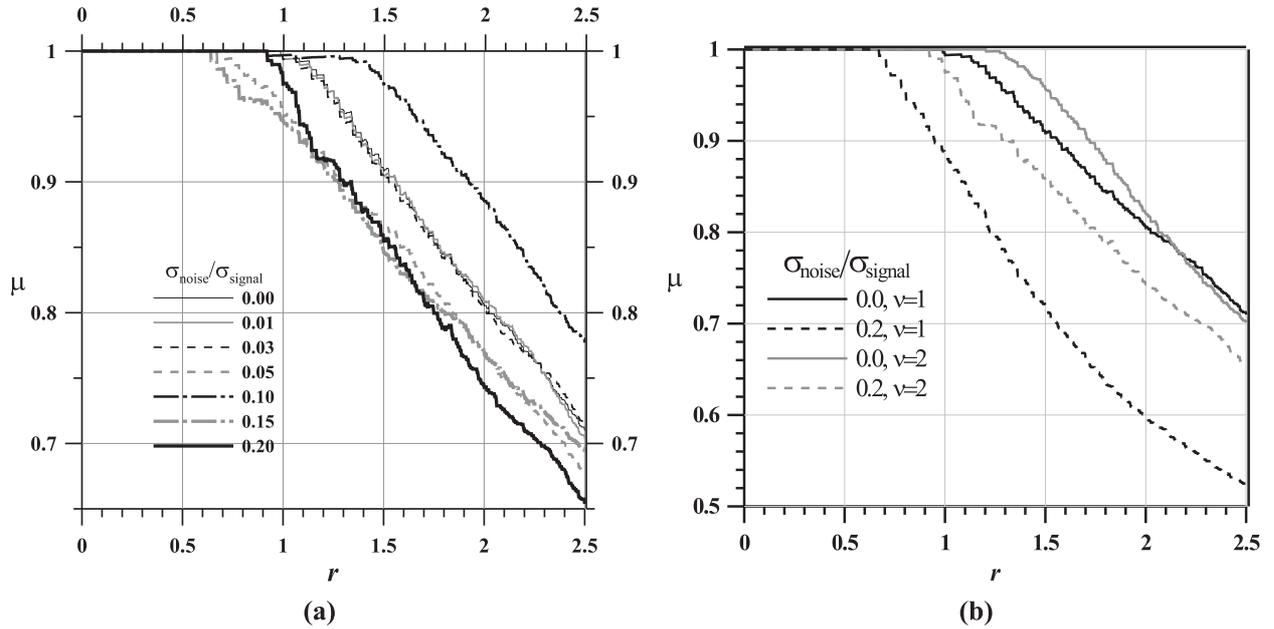


Рис. 1.2: Зависимость меры  $\mu$  от радиуса  $r$  при различных уровнях измерительного шума  $\xi$ , (a) — реконструкция методом Бока с параметрами  $L = 35$ ,  $n = 30$ , (b) реконструкция при разных значениях числа сегментов непрерывности:  $\nu = 1$  — метод Бока и  $\nu = 2$  — модифицированный метод.

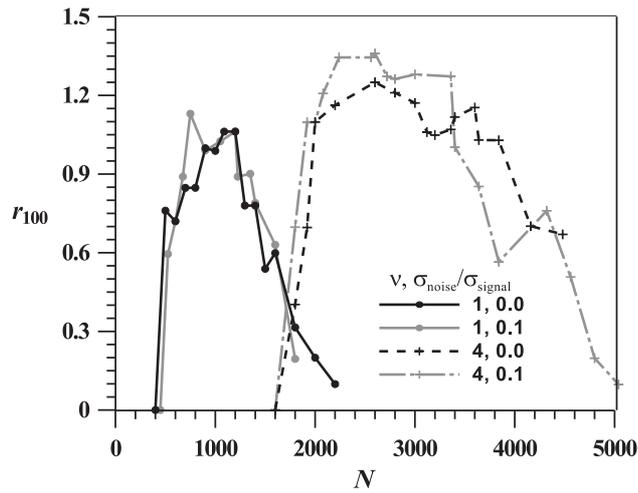


Рис. 1.3: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от общей длины ряда  $N$  при разных уровнях шума. Реконструкция при разных значениях числа сегментов непрерывности:  $\nu = 1$  — метод Бока и  $\nu = 4$  — модифицированный метод.

рис. 1.4, где  $L$  и  $n$  отложены по осям, в величина  $r_{100}$  изображена оттенками серого: чем светлее тон, тем больше  $r_{100}$ . Для удобства дополнительно проведены линии уровня  $r_{100} = 0.2$ ,  $r_{100} = 0.4$ ,  $r_{100} = 0.6$ ,  $r_{100} = 0.8$ ,  $r_{100} = 1.0$ .

Рис. 1.4 показывает, что искомая зависимость  $r_{100}(L, n)$  устроена достаточно сложно. При этом, однако, легко выделить одно или несколько значений  $(L, n)$ , при которых достигается наибольшее значение  $r_{100}$ . При удалении от этих значений величина  $r_{100}$  плавно снижается, оставаясь достаточно большою в значительном интервале общих длин ряда  $N$ . Общность этих выводов для достаточно широкого класса режимов подтверждается сравнением графиков 1.4а и 1.4б, соответствующих различным значениям параметров.

### 1.3.5 Преимущества модифицированного метода

Увеличить длину ряда без ущерба для статистических свойств получаемых оценок параметров  $\mathbf{c}$  можно, как уже упоминалось в 1.2.2, применяя модифицированный метод множественной стрельбы. Чтобы показать, что при этом радиус 100%-ной сходимости не только не уменьшается, но даже в среднем немного увеличивается по сравнению с оригинальным методом ботка, были построены аналогичные пункту 1.3.4 зависимости  $r_{100}(L, n)$  при тех же значениях параметров по тем же рядам для случая  $\nu = 2$ , т.е. с допуском одного разрыва в середине ряда (см. рис. 1.5).

О преимуществах модифицированного метода свидетельствует более светлый тон рис. 1.5 по сравнению с рис. 1.5. Также максимально достижимое значение  $r_{100}$  больше для модифицированного метода: не только область с  $r_{100} \geq 1$  больше, но и внутри неё выделяется область с  $r_{100} \geq 1$ . Кроме того, рассматривая белые гиперболы (линии  $N = \text{const}$ ) на рис. 3, можно сделать вывод, что преимущества модифицированного метода сильнее проявляются для более длинных рядов. Поскольку для реконструкции использовался модифицированный метод множественной стрельбы с  $\nu = 2$ , для приведённых зависимостей  $N = 2Ln$ .

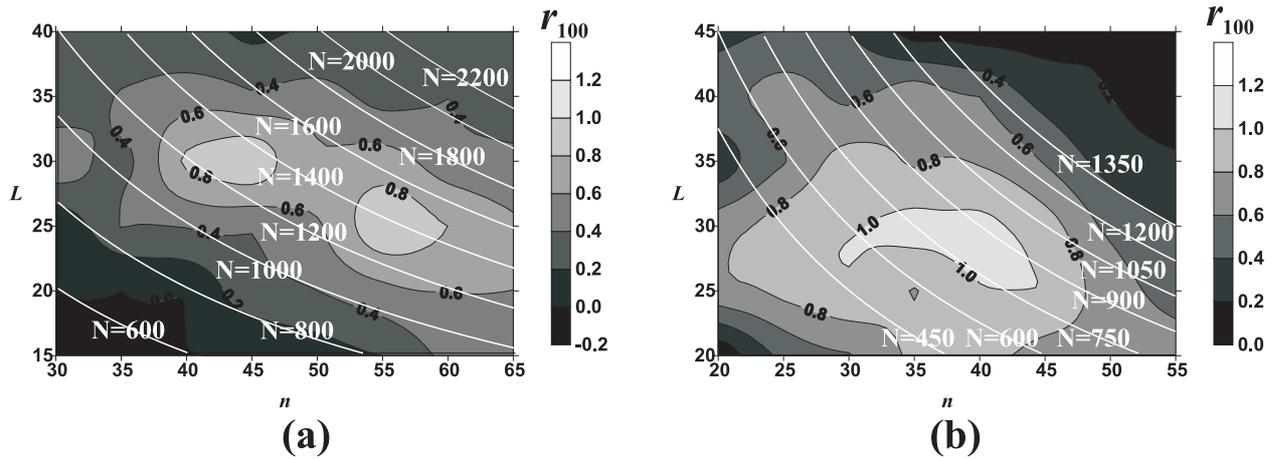


Рис. 1.4: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от количества фрагментов  $L$ , на которые делится ряд, и от длины фрагмента  $n$ . Величина  $r_{100}$  показана оттенками серого, чем светлее тон, тем больше  $r_{100}$ . Проведены линии уровня  $r_{100} = 0.2$ ,  $r_{100} = 0.4$ ,  $r_{100} = 0.6$ ,  $r_{100} = 0.8$ ,  $r_{100} = 1.0$ . Дополнительно на рисунок наложены белые гиперболы — линии, вдоль которых общая длина ряда  $N$  постоянна, и надписана величина  $N$  для каждой из них. Рис. (а) соответствует параметрам  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 28$ , рис. (б) — параметрами  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 46$ .

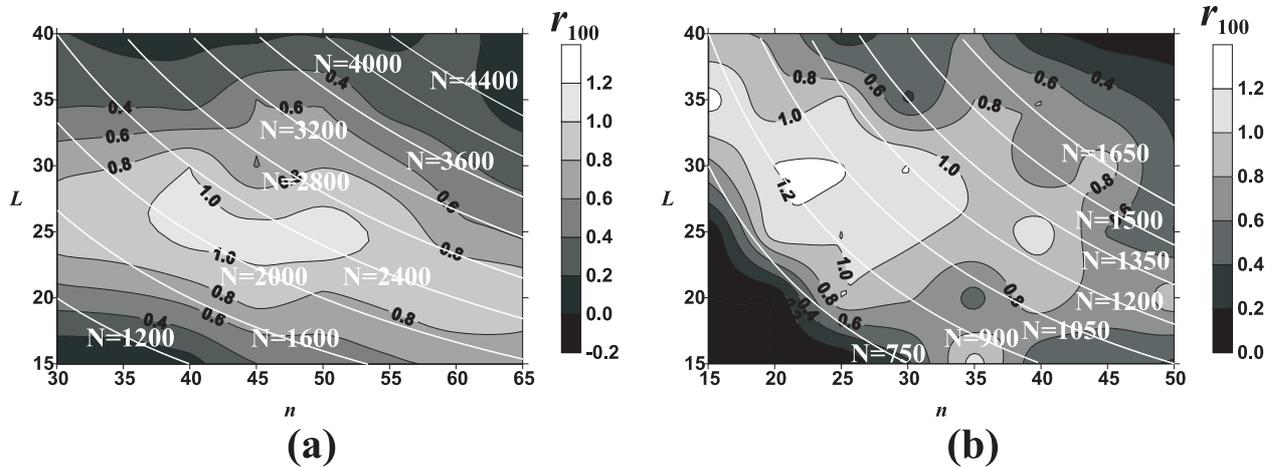


Рис. 1.5: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от количества фрагментов  $L$ , на которые делится ряд, и от длины фрагмента  $n$ . Величина  $r_{100}$  показана оттенками серого, чем светлее тон, тем больше  $r_{100}$ . Проведены линии уровня  $r_{100} = 0.2$ ,  $r_{100} = 0.4$ ,  $r_{100} = 0.6$ ,  $r_{100} = 0.8$ ,  $r_{100} = 1.0$ . Дополнительно на рисунок наложены белые гиперболы — линии, вдоль которых общая длина ряда  $N$  постоянна, и надписана величина  $N$  для каждой из них. Поскольку для реконструкции использовался модифицированный метод множественной стрельбы с  $\nu = 2$ , для приведённых зависимостей  $N = 2Ln$ . Рис. (а) соответствует параметрам  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 28$ , рис. (б) — параметрами  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 46$ .

### 1.3.6 Выбор оптимального количества разрывов

Из сопоставления рис. 1.4 и рис. 1.5 видно, что модифицированный метод при  $\nu = 2$  не всегда даёт результаты лучшие, чем оригинальный алгоритм Бока: для рядов коротких рядов ( $N < 1400$  для рис. (а) и  $N < 750$  для рис. (b)) наблюдается обратная картина, а для очень длинных рядов ( $N > 4000$  для рис. (а) и  $N > 1500$  для рис. (b)) методы дают почти одинаково плохие результаты. Последний результат можно объяснить таким образом, что допуск одного разрыва для таких длинных рядов недостаточен. Поэтому были построены интегральные кривые  $r_{100}(N)$  при различных  $\nu$ : от 1 (метод Бока) до 4. При этом в каждом случае первоначально строилась такая же зависимость  $r_{100}(L, n)$ , как на рис. 1.4 и рис. 1.5, а затем для каждой величины  $N$  (т.е. вдоль белой гиперболы) брались  $L$  и  $n$ , соответствующие наибольшему при этом  $N$  радиусу  $r_{100}$ . Результаты представлены на рис. 1.6.

Холмоподобная форма зависимостей  $r_{100}(N)$  определяется двумя факторами: при очень малых  $N$  не хватает точек для подгонки параметров, а при больших сказывается экспоненциальная чувствительность к начальным условиям — за время порядка  $\tau_{\Delta} = 1/\lambda_1$  малые возмущения достигают макромасштабов. Кривые, соответствующие большим значениям  $\nu$ , достигают бóльших значений  $r_{100}$  и сдвинуты вправо, в сторону более длинных рядов. При этом шире становятся и интервалы по оси  $N$  с ненулевыми значениями  $r_{100}$ , то есть с увеличением числа разрывов диапазон длин ряда, в котором можно получить хорошую модель, возрастает.

Чтобы показать общность этих выводов и типичность кривых на рис. 1.6, такие же кривые были построены для случая «идеальных» стартовых догадок для скрытых переменных, т.е. начальные условия  $\mathbf{y}_1^s, \mathbf{y}_{n+1}^s, \dots, \mathbf{y}_{(L-1)n+1}^s$  на первом же шаге алгоритма точно такие, какие соответствуют глобальному минимуму (1.3)<sup>8</sup> (см. рис. 1.7). Заметим, что

---

<sup>8</sup>Тем не менее, эти величины подгоняются прежним способом и, поскольку стартовые догадки для параметров  $\mathbf{c}^s$  как правило выбираются далёкими от их истинных значений  $\mathbf{c}^s$ , на промежуточных этапах подгонки начальные условия будут отличаться от идеальных.

кривые на рис. 1.7 существенно выше, чем на рис. 1.6, так при  $\nu = 4$  для реальных стартовых догадок максимум кривой  $r_{100}(N)$  составляет 1.36, для идеальных — 10. Также сами кривые являются существенно более плавными и максимум на них выражен более явно. Всё это является следствием более удачных стартовых догадок.

Несмотря на то, что рис. 1.7 и рис. 1.6 хорошо демонстрируют влияние длины ряда на оптимальный выбор  $\nu$ , на основе их непосредственного анализа сложно сформулировать какие-либо практические рекомендации по выбору количества разрывов. Поскольку экспоненциальное разбегание хаотических траекторий с близкими начальными условиями является главной причиной неэффективности метода Бока, представляется разумным связать оптимальное значение  $\nu$  с ляпуновским временем  $\tau_\Lambda$ , где  $\tau_\Lambda = 1/\Lambda$ ,  $\Lambda$  — старший ляпуновский показатель. Для этого графики рис. 1.7 и рис. 1.6 были перестроены таким образом, что теперь по горизонтальной оси отложена не общая длина ряда  $N$ , а длина сегмента непрерывности  $Ln = N/\nu$  (см. рис. 1.8). Для удобства введена вторая ось абсцисс сверху, по которой время отложено не в отсчётах, а в величинах ляпуновского времени  $\tau_\Lambda$ .

Из рис. 1.8 видно, что для случаев  $\nu = 1 \div 4$  оптимальные длины  $Ln$  соответствуют 1–3 ляпуновским временам, немного смещаясь в сторону меньших значений с ростом  $\nu$ . Такой эффект можно объяснить со следующих позиций. Шансы на успех реконструкции зависят от допустимой длины сегмента  $Ln$ , на которой малые возмущения начальных условий ещё не слишком возрастают, а также от числа  $P + \nu D$  свободных параметров, которые нужно подогнать по ряду. Увеличивая число разрывов, мы ослабляем чувствительность к начальным условиям, но одновременно увеличиваем количество подгоняемых величин. В приведённом примере при  $\nu = 1$  их всего 6, при  $\nu = 2$  — 9, а при  $\nu = 4$  — уже 15. Поэтому с ростом общего количества подгоняемых величин результат реконструкции более критичен к ошибкам в начальных условиях и интервал значений  $Ln$  с ненулевым  $r_{100}$  сужается.

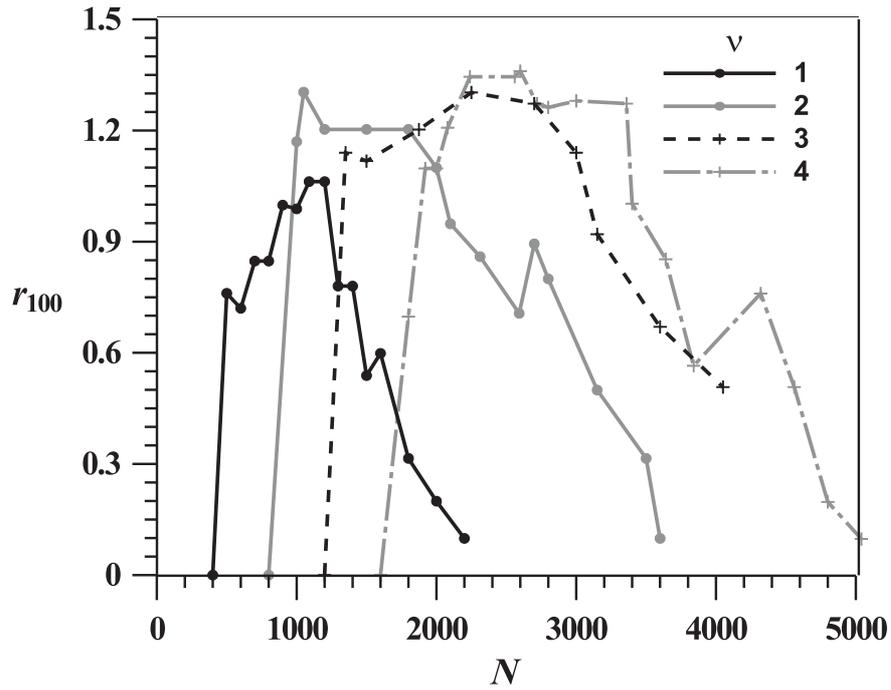


Рис. 1.6: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от общей длины используемого ряда  $N$  при различном числе разрывов ( $\nu - 1$ ).

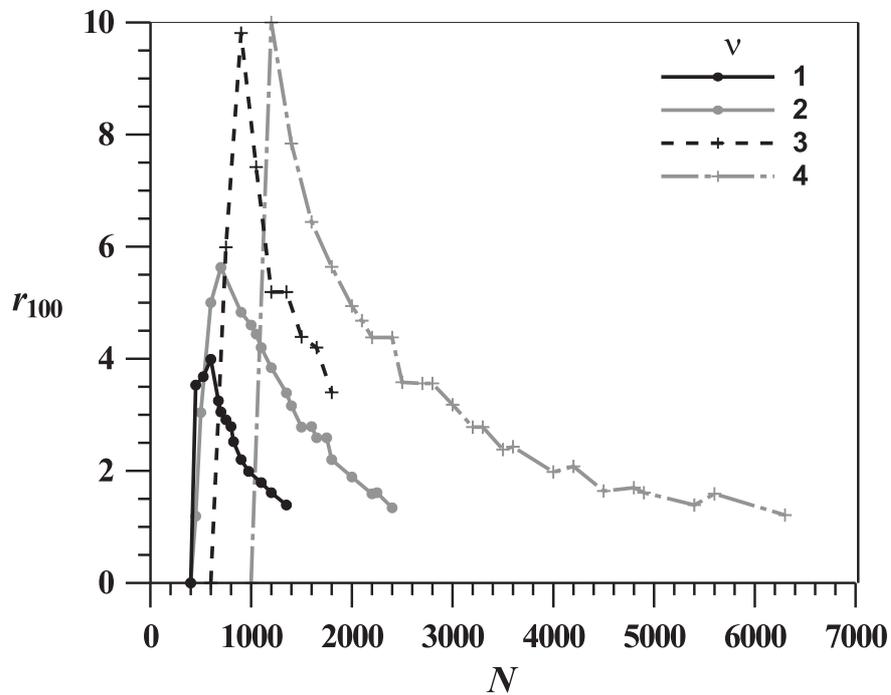


Рис. 1.7: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от общей длины используемого ряда  $N$  при различном числе разрывов ( $\nu - 1$ ). Использованы идеальные стартовые догадки для скрытых переменных.

### 1.3.7 Универсальность оптимального выбора числа подсегментов $L$ при различном числе сегментов непрерывности $\nu$

Решение на основе оценки ляпуновского времени вопроса об оптимальном выборе числа сегментов непрерывности  $\nu$  для модифицированного метода множественной стрельбы не снимает вопрос об оптимальном выборе количества подсегментов  $L$ , на которые этот сегмент делится и для которых условие (1.4) выполняется. При построении графиков на рис. 1.6, 1.7 и 1.8 оптимальное  $L$  выбралось перебором, что весьма трудоёмко. В то же время, рис. 1.4 и рис. 1.5 показывают, что при одном и том же  $N$  успех моделирования решающим образом зависит от количества подсегментов  $L$ : при изменении  $L$  всего в два раза величина  $r_{100}$  может измениться в 5 и более раз.

Составить для величины  $L$  какую-либо оценку из общих соображений о природе сигнала, подобно оценке для  $\nu$ , затруднительно. Однако некоторые общие свойства алгоритма множественной стрельбы, относящиеся к величине  $L$ , можно выявить, если построить зависимость  $r_{100}(L)$  при различных  $\nu$  и при оптимальном выборе длины сегмента непрерывности  $L_n$  (см. рис. 1.3.7).

Рис. 1.3.7 показывает, что оптимальное значение  $L$  для любого  $\nu$  одно и то же (в данном случае равно 20). Аналогичные результаты были получены при других значениях параметров:  $c_1^0 = 10$ ,  $c_2^0 = 8/3$ ,  $c_3^0 = 28$ , а также при использовании идеальных стартовых догадок для скрытых переменных. Это свойство можно использовать, например, в следующей ситуации. Если удалось подобрать величину  $L$  при реконструкции по сравнительно короткому ряду и получить оценки искомых параметров  $c$ , но эти оценки желательно уточнить, используя более длинный ряд, тогда используя метод множественной стрельбы с существенно большим  $\nu$  можно воспользоваться уже подобранным  $L$ , которое и для этого более длинного ряда будет по крайней мере близко к оптимальному.

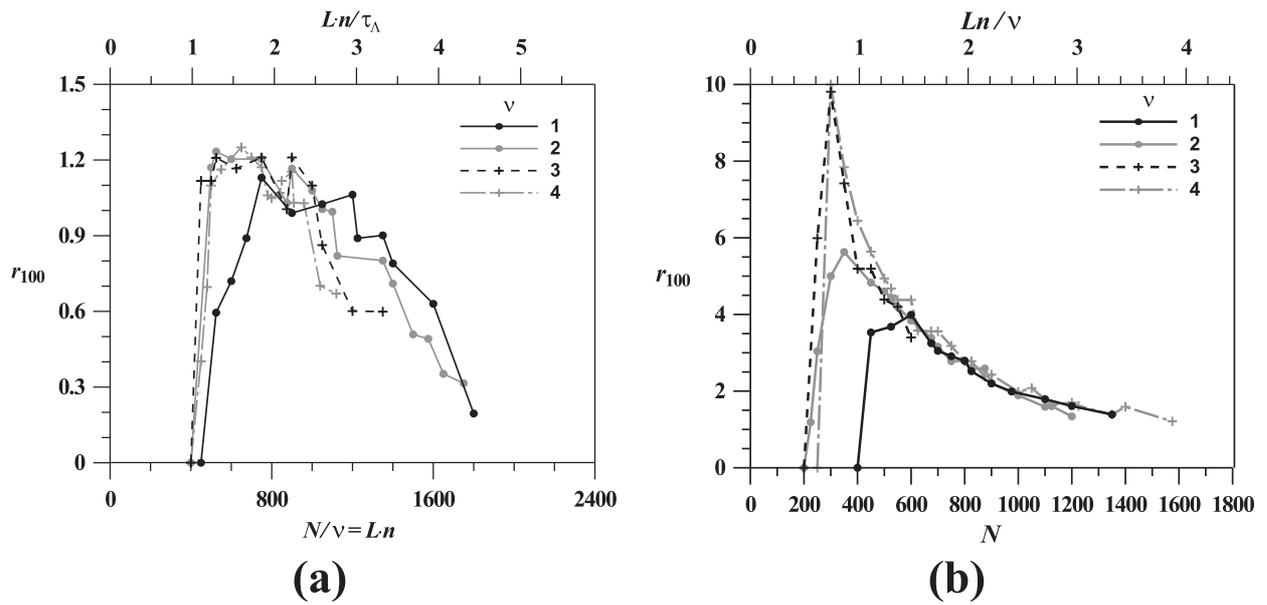


Рис. 1.8: зависимости радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от длины сегмента непрерывности  $Ln = N/\nu$  при различном числе разрывов ( $\nu - 1$ ): (a) при использовании реальных стартовых догадок для скрытых переменных, (b) — при использовании идеальных стартовых догадок.

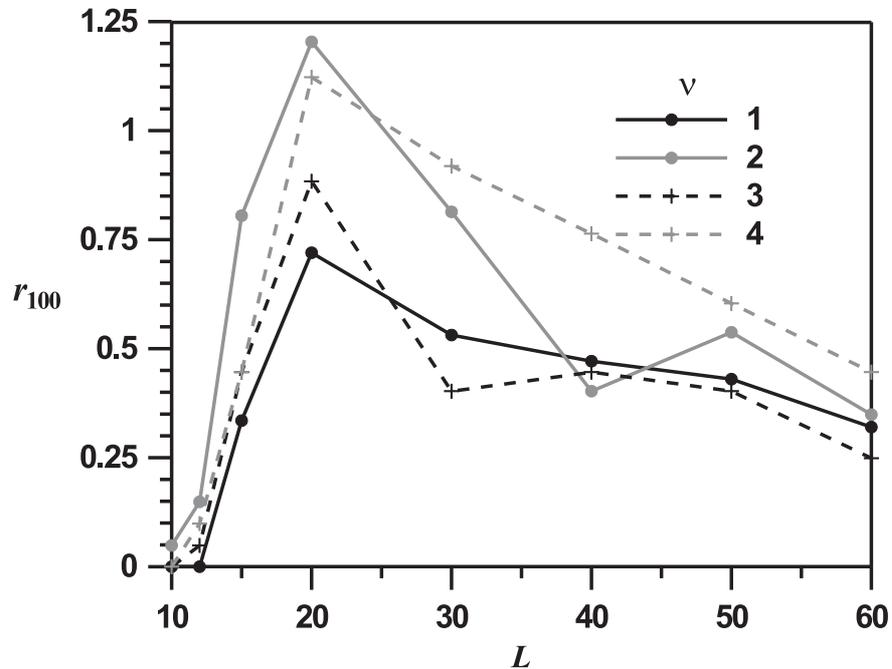


Рис. 1.9: зависимости радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от длины подсегмента  $L$  при различном числе разрывов ( $\nu - 1$ ) и при оптимальном выборе длины сегмента непрерывности  $Ln$ .

### 1.3.8 Реконструкция системы Рёсслера

Чтобы показать общность полученных в пп. 1.3.2–1.3.7 на примере системы Лоренца результатов аналогичные исследования были проведены для системы Рёсслера

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_2 - y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + c_1 y_2 \\ \dot{y}_3 &= c_2 + y_3 (y_1 - c_3),\end{aligned}\tag{1.7}$$

при значениях параметров  $c_1 = 0.2$ ,  $c_2 = 0.15$ ,  $c_3 = 10$ , что соответствует хаотическому режиму, и начальных условиях  $y_1 = 0.21$ ,  $y_2 = 6.5$ ,  $y_3 = 0.22$ . Основной средний «период» колебаний<sup>9</sup> составляет примерно 6.0, старший ляпуновский показатель  $\Lambda = 0.1$ . Система 1.7 решалась численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.002 и интервалом выборки 0.01. В качестве единственной наблюдаемой использовалась переменная  $y_1$ , остальные две переменные считались скрытыми.

Данная система была выбрана в качестве тестового примера, поскольку, являясь как и система Лоренца 1.6 эталонным объектом нелинейной динамики, она имеет принципиально иную форму аттрактора. В системе Лоренца колебания происходят вокруг двух симметрично расположенных в плоскости  $(y_1, y_2)$  неустойчивых точек [39]. Огрубляя динамику, можно сказать, что колебания происходят вблизи плоскости, перпендикулярной  $(y_1, y_2)$  и пересекающей её примерно по диагонали  $y_1 = y_2$ . Таким образом, одновременные значения  $y_1$ ,  $y_2$  весьма близки друг к другу. В то же время система Рёсслера имеет спиральный аттрактор с одним центром вращения, причём основная динамика происходит в плоскости  $(y_1, y_2)$ , а переменные  $y_1$  и  $y_2$  сдвинуты друг относительно друга на примерно четверть характерного периода.

Проще всего восстановить систему 1.7 используя идеальные стартовые догадки для скрытых переменных. Рис. 1.10 аналогичен рис. 1.1 и показы-

---

<sup>9</sup>Хотя режим, соответствующий выбранным значениям параметров, хаотический, вследствие наличия явного пика в спектре [40] и возможности легко ввести фазу колебаний как угол поворота на плоскости  $y_1, y_2$  основной период колебаний можно выделить.

вает область сходимости в глобальный минимум целевой функции (1.3) в пространстве нормированных стартовых догадок (1.5) для параметров (в сечении плоскостью  $b_3 = 0$ ) при использовании оригинального метода Бока (а) и модифицированного метода с допуском одного разрыва (б).

Видно, что при использовании модифицированного метода удаётся добиться существенного роста области сходимости (светлая область на рис. 1.10b существенно больше, чем на рис. 1.10a).

Чтобы более общим образом охарактеризовать влияние количества разрывов на сходимость метода, на рис. 1.11 построены зависимости радиуса стопроцентной сходимости от длины ряда  $r_{100}(N)$  при различных  $\nu$  (от 1 до 3) и оптимальном подборе  $L$ . Сравнение рис. 1.11 и рис. 1.7 показывает, что качественно результаты для систем Рёсслера и Лоренца одинаковы и показывают преимущества использования модифицированного метода. Так, максимальный  $r_{100}$  составляет 0.9 при  $\nu = 1$  (метод Бока), 0.95 при  $\nu = 2$  и уже 1.05 при  $\nu = 3$ . При этом преимущества большего числа допустимых разрывов проявляются для длинных рядов, как это было и в примерах из п. 1.3.6.

Однако подобрать идеальные стартовые догадки для скрытых переменных на практике не удастся. Поэтому стоит задача подбора достаточно хороших, но реалистичных стартовых догадок, т.е. таких, которые можно составить на основе самого сигнала наблюдаемой с привлечением минимума дополнительной информации о рассматриваемой системе кроме уже используемой для построения модели.

### 1.3.9 Подбор стартовых догадок для скрытых переменных

При моделировании системы Лоренца в пп. 1.3.2–1.3.7 мы пользовались подходом к формированию стартовых догадок, предложенным в [30]. Согласно ему стартовые для скрытых переменных выбираются в точности равными значениям из ряда наблюдаемой:  $y_{2,j}^s = \eta_j^s$ ,  $y_{3,j}^s = \eta_j^{s10}$ , где

---

<sup>10</sup>Двойной индекс внизу обозначает первое число — номер переменной, второе число — номер момента времени.

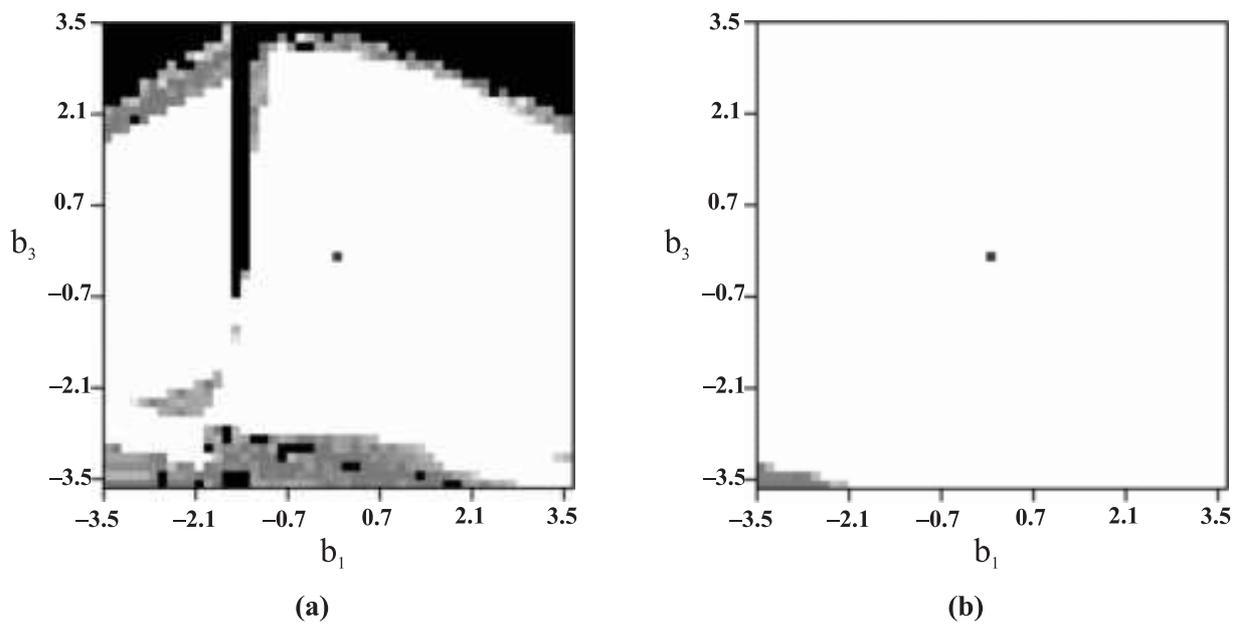


Рис. 1.10: плоскость нормированных стартовых догадок для параметров системы Рёсслера (сечение пространства параметров плоскостью  $b_3 = 0$ ). Белым обозначены точки, откуда достигается глобальный минимум, оттенками серого — локальные минимумы (интенсивность зависит от их удалённости от глобального), чёрным — алгоритм минимизации расходится: (a), алгоритм Бока при  $L = 25$ ,  $n = 30$ , (b) модифицированный метод с  $L = 25$ ,  $n = 30$ ,  $\nu = 2$ . Использованы идеальные стартовые догадки для скрытых переменных.

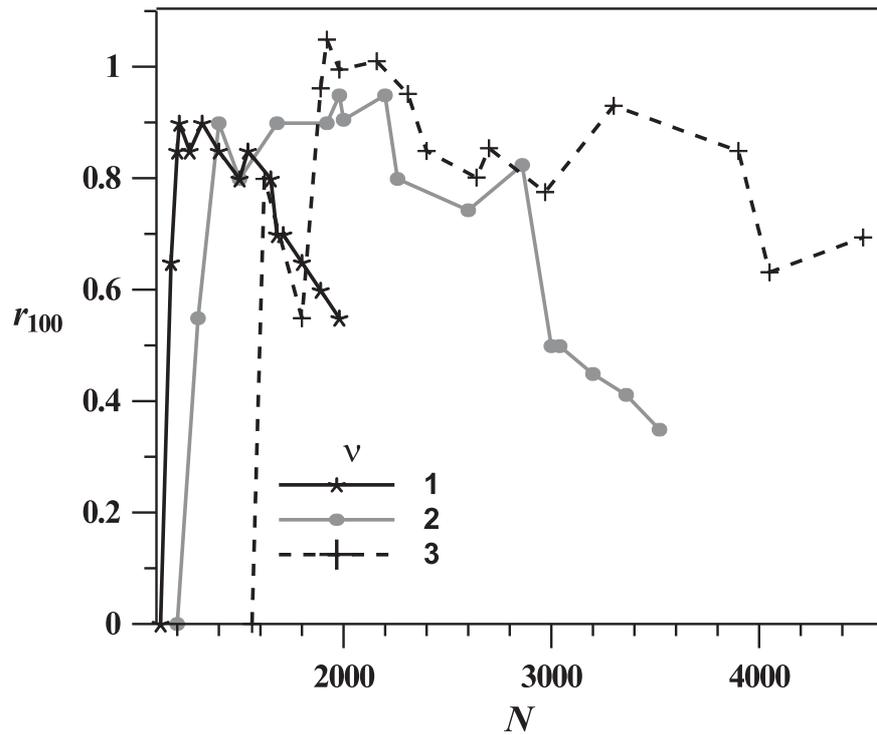


Рис. 1.11: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от общей длины используемого ряда  $N$  при различном числе разрывов  $(\nu - 1)$  и оптимальном подборе  $L$  — реконструкция системы Рёсслера. Использованы идеальные стартовые догадки для скрытых переменных.

$j = 1, (n + 1), \dots, ((L - 1)n + 1)$  — начальные моменты каждого подсегмента. Как уже упоминалось в п. 1.3.8, для системы Лоренца переменные  $y_1$  и  $y_2$  очень близки по абсолютным величинам и практически синфазны. Поэтому для этой системы, в ситуации, когда с точностью до шума наблюдений  $y_1 = \eta$ , такой способ задания стартовых догадок зарекомендовал себя как весьма эффективный.

Однако попытка переноса такого подхода на систему Рёсслера ведёт к полному провалу: радиус сходимости получается нулевым (см. рис. 1.12а). Причина этого, как представляется, кроется в том, что в системе Рёсслера переменные  $y_1$  и  $y_2$  хотя и похожи качественно и имеют примерно одинаковую амплитуду колебаний, однако их одновременные значения существенно различны.

Выход из такой ситуации заключается в том, чтобы при составлении стартовых догадок максимально учесть специфику модели. Для системы Рёсслера это достигается следующим образом. Переменные  $y_1$  и  $y_2$  в ней похожи, но сдвинуты примерно на четверть характерного периода колебаний. Следовательно, в качестве стартовых догадок для  $y_2$  нужно взять ряд  $\eta$ , но не одновременный, а сдвинутый на примерно  $T/4$  вперёд (в нашем случае  $T \approx 6.0$ ). Величину характерного периода можно определить по пику в спектре колебаний или введя фазу как угол поворота радиус вектора на плоскости  $(y_1, y_2)$  и подсчитав среднее время, за которое она нарастает на  $2\pi$ . В то же время для переменной  $y_3$  в качестве стартовых догадок следует взять тождественный ноль, поскольку основное движение на аттракторе происходит вблизи плоскости  $(y_1, y_2)$ , при эпизодических и кратковременных выбросах по переменной  $y_3$ . Хотя в некоторых редких точках погрешность в выборе  $y_{3,j}^s$  будет велика, в большинстве точек и, следовательно, в среднем она будет достаточно мала.

Результат использования составленных таким образом стартовых догадок представлен на рис. 1.12с. Видно, что появилась довольно существенная область, где достигается сходимость в глобальный минимум целевой функции 1.3, хотя это область существенно меньше, чем при использова-

нии идеальных догадок (см. рис 1.12b).

Теперь с использованием подобранных таким образом стартовых догадок легко повторить результаты п. 1.3.8. На рис. 1.13 показаны в сравнении результаты при использовании метода Бока при  $L = 25$ ,  $n = 30$  и модифицированного подхода при  $L = 25$ ,  $n = 30$ ,  $\nu = 2$ . Модифицированный метод, как и ранее, даёт заметно лучшие результаты (светлая область на рис. 1.13b существенно шире, чем на рис. 1.13a).

На рис. 1.14(a) подтверждаются выводы, сделанные по рис. 1.6 и рис. 1.7 для системы Лоренца как при идеальных, так и при реальных стартовых догадках для скрытых переменных, а также по рис. 1.11 для системы Рёсслера при идеальных стартовых догадках. А именно, модифицированный метод даёт существенно больший максимальный радиус 100%-ной сходимости: для  $\nu = 2$   $r_{100} = 0.097$  против  $r_{100} = 0.068$  для  $\nu = 1$ . Также преимущества модифицированного метода становятся существенными при больших длинах ряда: для  $\nu = 1$  максимуму  $r_{100}$  соответствует  $N = 900$ , а для  $\nu = 2$  —  $N = 1500$ .

Рис. 1.14(b) соответствует рис. 1.8. Видно, что оптимальная длина сегмента непрерывности  $Ln$  примерно равна, как и для системы Лоренца,  $\tau_\Delta$  или несколько меньше его, что может быть обусловлено индивидуальными характеристиками аттрактора. При этом происходит небольшое смещение максимума зависимости  $r_{100}(Ln)$  в сторону меньших  $Ln$  с ростом  $\nu$ , что, как уже объяснялось в п. 1.3.6, обусловлено отрицательным влиянием увеличения количества независимых искомых параметров: их 6 (три собственно параметра  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  и три начальных условия  $y_{1,1}$ ,  $y_{2,1}$  и  $y_{3,1}$ ) для  $\nu = 1$  и уже 9 (появляются дополнительно начальные условия  $y_{1,(Ln+1)}$ ,  $y_{2,(Ln+1)}$  и  $y_{3,(Ln+1)}$ ) для  $\nu = 2$ .

## 1.4 Выводы

С помощью введённого количественного критерия проведено сравнение работоспособности различных реализаций метода множественной

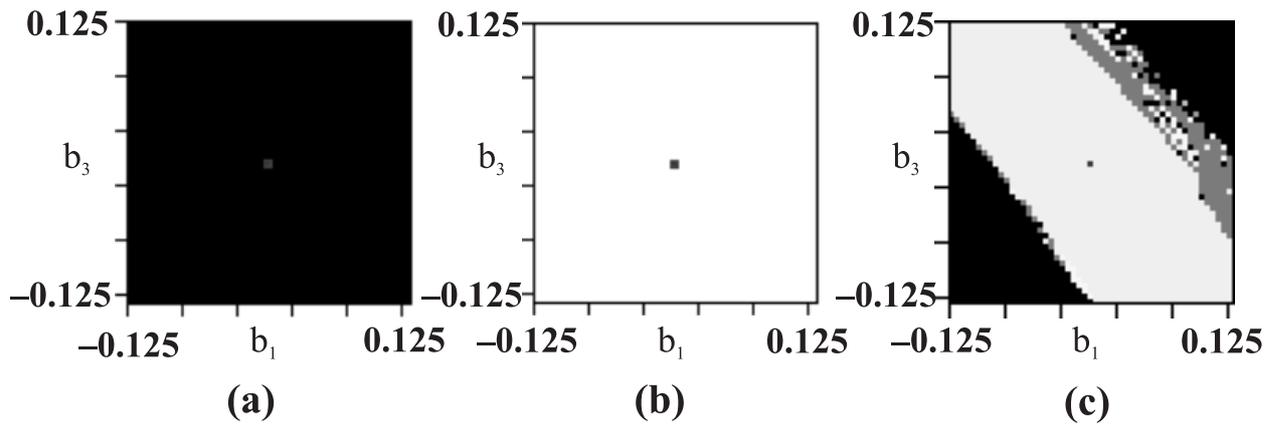


Рис. 1.12: плоскость нормированных стартовых догадок для параметров системы Рёсслера (сечение пространства параметров плоскостью  $b_3 = 0$ ). Белым обозначены точки, откуда достигается глобальный минимум, оттенками серого — локальные минимумы (интенсивность зависит от их удалённости от глобального), чёрным — алгоритм минимизации расходится: (a), алгоритм Бока при  $L = 25$ ,  $n = 30$ , (b) модифицированный метод с  $L = 25$ ,  $n = 30$ ,  $\nu = 2$ .

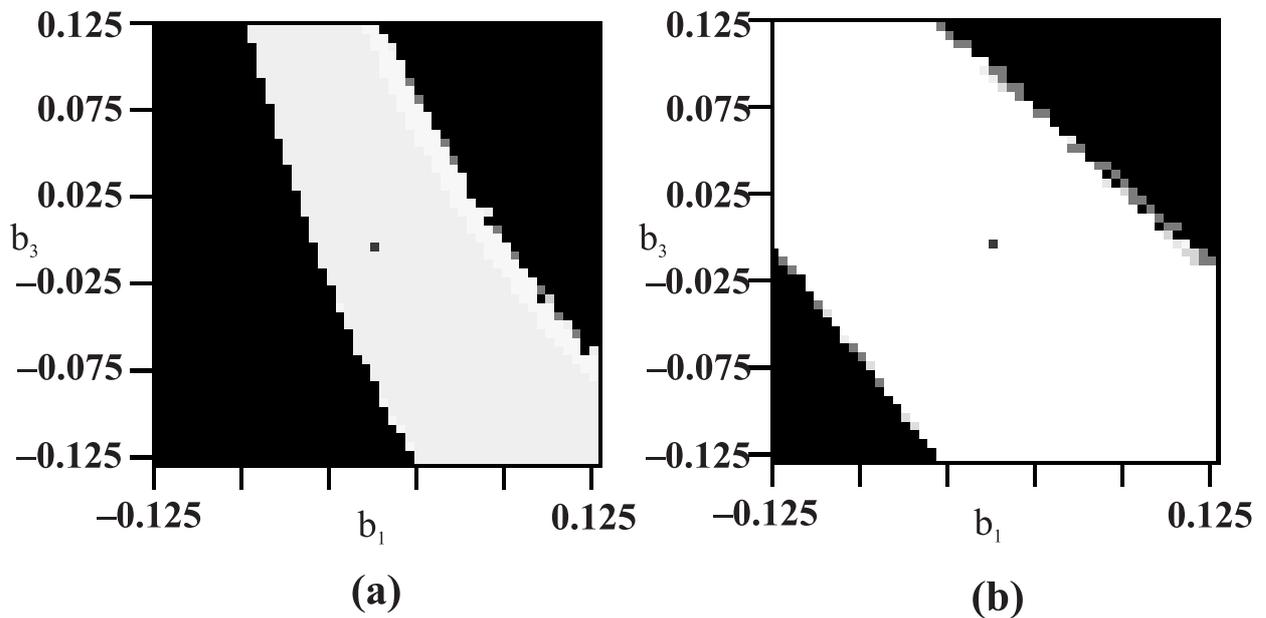


Рис. 1.13: плоскость нормированных стартовых догадок для параметров системы Рёсслера (сечение пространства параметров плоскостью  $b_3 = 0$ ). Белым обозначены точки, откуда достигается глобальный минимум, оттенками серого — локальные минимумы (интенсивность зависит от их удалённости от глобального), чёрным — алгоритм минимизации расходится: (a), алгоритм Бока при  $L = 25$ ,  $n = 30$ , (b) модифицированный метод с  $L = 25$ ,  $n = 30$ ,  $\nu = 2$ . Использованы реалистичные специально составленные стартовые догадки для скрытых переменных.

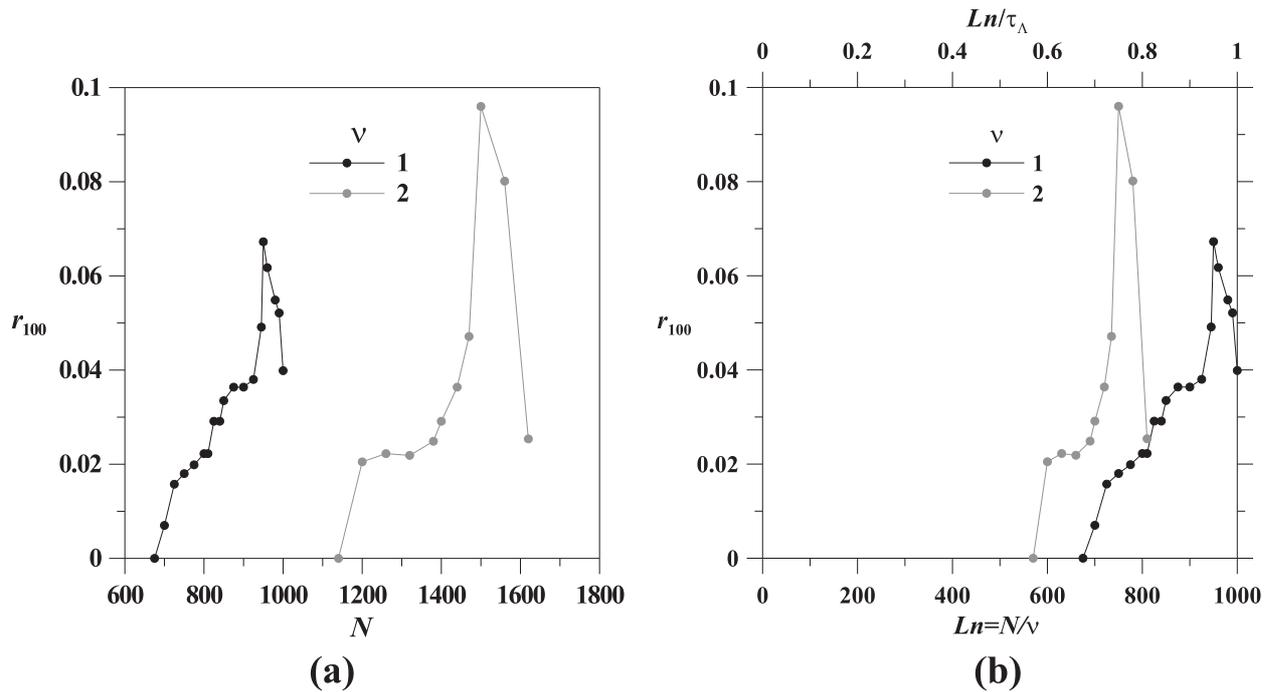


Рис. 1.14: зависимость радиуса стопроцентной сходимости  $r_{100}$  от общей длины используемого ряда  $N$  (а) и от длины сегмента непрерывности  $Ln = N/\nu$  (б) при различном числе разрывов  $(\nu - 1)$  и оптимальном подборе  $L$  — реконструкция системы Рёсслера. Использованы реалистичные специально составленные стартовые догадки для скрытых переменных.

стрельбы для оценки параметров при наличии скрытых переменных. На примере реконструкции параметров системы Лоренца показано, что исходный алгоритм Бока уступает его модификации, заключающейся в допуске разрывов траектории модели при сохранении единых значений параметров.

Продемонстрирована степень влияния на результат оценивания параметров длины используемого ряда, количества его сегментов, выбора наблюдаемой и способа задания стартовых догадок для скрытых переменных. Показано, что шансы на успех оценки значений параметров возрастают с увеличением длины ряда, если одновременно увеличивается число допустимых разрывов траектории модели. При этом длина сегмента, на котором соблюдается требование непрерывности траектории, должна быть тем меньше и ближе к ляпуновскому времени, чем больше количество разрывов.

Модифицированный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с алгоритмом Бока, поскольку он свободен от ограничений, связанных с высокой чувствительностью к начальным условиям: накапливающиеся вдоль фазовой траектории невязки отбрасываются в разрешенных этим подходом разрывах. Во-первых, он позволяет использовать ряды большой длины, что даёт возможность уточнить оценки параметров за счёт введения в рассмотрение дополнительного объёма данных, причём такие оценки статистически предпочтительнее, чем получаемые с помощью кусочного метода множественной стрельбы. Во-вторых, при использовании рядов фиксированной длины он в большинстве случаев предъявляет меньшие требования к стартовым догадкам для искомым параметров, а иногда позволяет получить достаточно точные оценки, когда с помощью алгоритма Бока это невозможно сделать ни при каких стартовых догадках, даже равных истинным значениям.

Продемонстрировано, что стартовые догадки для скрытых переменных необходимо выбирать основываясь на свойствах объекта, учитывая наиболее общие характеристики аттрактора. Игнорирование свойств объекта

может привести, как показано в п. 1.3.9, к полному провалу, когда метод расходится даже для идеальных стартовых догадок для параметров.

Показано, что влияние шума (вплоть до 0.2 от уровня сигнала) на процесс моделирования несущественно для обеих методик. Следует сказать, что точность оценки параметров при условии попадания в глобальный минимум целевой функции и для выбранной длины ряда наибольшая для алгоритма Бока, предъявляющего самые жёсткие требования при подгонке, меньше для модифицированного метода, и ещё меньше для кусочного метода множественной стрельбы. Если же учесть, что попасть в глобальный минимум гораздо проще при использовании модифицированного метода, то он в итоге имеет практические преимущества даже в смысле точности оценок. Но следует учитывать и то, что, так как модифицированный метод предъявляет меньшие требования к адекватности используемой модели, существует опасность при слишком малом размере сегментов успешно подогнать под наблюдаемый ряд «чужую» модель.

Основные результаты первой главы изложены в работах [84, 85, 86, 87, 88, 89]

## Глава 2

# Реконструкция систем под регулярным воздействием

### 2.1 Введение

Системы под внешним воздействием — широко распространённый в природе класс. Большинство изучаемых нами объектов каким-либо образом связаны с окружающей средой: одни либо могут принимать сигналы, подвергаясь её воздействию, либо сами влияют на неё, либо эта связь двуполуправленная. Такая связь не всегда напрямую отражается в структуре модельных уравнений. Например, все представители весьма популярного в нелинейной динамике класса автогенераторных систем являются по форме автономными, хотя и получают энергию извне (через «отрицательное трение»). Однако и неавтономные по форме модели также весьма распространены (см., например, в приложении к радиофизике [11, 57, 58]). В этой связи важным оказывается вопрос о выборе структуры модели при реконструкции по временным рядам, если есть сведения о неавтономности моделируемого объекта: предпочесть ли структуру, в явном виде содержащую внешнее воздействие, или автономную структуру.

Универсальные подходы, ориентированные на возможно более широкий класс объектов, получили широкое распространение. В случае, когда измерению доступна лишь одна наблюдаемая величина  $\eta$ , такой стандартной структурой обычно является (см. [27]) система дифференциальных урав-

нений (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ &\dots \\ \frac{dx_D}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_D) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где в качестве  $x_1$  берется сама скалярная наблюдаемая  $\eta$ , а функция  $f$  представляется в виде степенного полинома порядка  $K$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K c_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=1}^D x_j^{l_j}, \quad \sum_{j=1}^D l_j \leq K \tag{2.2}$$

Претензии таких моделей на общность теоретически обоснованы, поскольку в виде (2.1) может быть представлена почти любая система ОДУ (подробнее см. [28]) и любая непрерывная функция  $f$  в (2.1) может быть сколь угодно точно равномерно приближена алгебраическим полиномом (2.2) (теорема Вейерштрасса). Однако случаи успешного применения стандартного подхода на практике единичны, особенно если велики  $D$  и  $K$ , т. е. велико количество коэффициентов и многократное дифференцирование приводит к резкому возрастанию шумов.

Причина неудачи стандартного подхода применительно к неавтономным системам в значительной степени состоит в том, что если в нашем распоряжении имеется единственный скалярный временной ряд, необходимо восстанавливать пространство состояний каким-либо известным способом<sup>1</sup> за изменение структуры приходится платить значительным ростом размерности: согласно теореме Таккенса [63] размерность до 2 раз.

Работоспособность стандартного подхода можно повысить за счет частичного отказа от универсальности и разработки методик (технологий), ориентированных на сравнительно узкий класс объектов. В данной работе такая методика предлагается для систем, находящихся под регулярным (имеющим дискретный спектр) внешним воздействием. Это могут быть произвольные по форме периодические или квазипериодические изменения параметров или внешней силы. Предпосылками для моделирования

---

<sup>1</sup>Можно использовать последовательное дифференцирование [59, 60], интегрирование [61] или метод временных задержек [10, 62].

объекта в виде системы ОДУ с регулярным внешним воздействием могут быть физические соображения, например, наличие дискретных пиков в спектре мощности наблюдаемого ряда<sup>2</sup>, или априорная информация. Методика опирается на введение явной зависимости от времени в структуру модельных уравнений, аналогично тому, как это делается для уменьшения  $D$  в [11, 36] при гармоническом воздействии, а также на использование, наряду со степенными полиномами (2.2), тригонометрических рядов.

## 2.2 Методика реконструкции

Пусть имеется временной ряд наблюдаемой величины  $\{\eta_i\}$ , спектр мощности которой имеет дискретные пики на частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  и их комбинационные составляющие. Ограничимся для начала при моделировании предположением о силовом характере воздействия на объект и стандартной структурой (2.1), которую модифицируем путем замены:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_D) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_D) + g(t) \quad (2.3)$$

где функция  $g(t)$  представляет внешнее воздействие. Если она известна, либо известна её форма и нужно определить только некоторые параметры, её можно непосредственно ввести в (2.3). Иначе её можно представить в виде суммы тригонометрических полиномов:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k_1} \left( a_{j,1} \cos\left(\frac{2\pi jt}{T_1}\right) + b_{j,1} \sin\left(\frac{2\pi jt}{T_1}\right) \right) + \dots \\ &\dots + \sum_{j=1}^{k_m} \left( a_{j,m} \cos\left(\frac{2\pi jt}{T_m}\right) + b_{j,m} \sin\left(\frac{2\pi jt}{T_m}\right) \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $T_j = 2\pi/\omega_j$ . Для периодического случая  $m = 1$  и формула (2.4) преобразуется к более простому виду:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k \left( a_j \cos\left(\frac{2\pi jt}{T_1}\right) + b_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{T_1}\right) \right) \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>Данный признак не является достаточным: многие автоколебательные системы имеют ярко выраженный один или несколько пиков в спектре.

А квазипериодическом —  $m$  равно числу несоизмеримых частот.

Примем за переменную  $x_1$  самую скалярную наблюдаемую  $\eta$ , а временные ряды величин  $x_2(t_i), \dots, x_D(t_i), \frac{dx_D(t_j)}{dt}$  получим путем последовательного дифференцирования ряда  $\eta(t_j)$  после фильтрации шума. Для нахождения коэффициентов полинома  $f$  и функции  $g$  используем метод наименьших квадратов (МНК), минимизируя средний квадрат ошибки аппроксимации<sup>3</sup>:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{dx_D(t_j)}{dt} - f(x_1(t_i), \dots, x_D(t_i)) - g(t_i) \right)^2 = \min \quad (2.6)$$

Использование структуры (2.1, 2.3, 2.5) вносит специфику в процедуру расчета коэффициентов модели по сравнению со стандартным подходом — в рассматриваемом случае параметры  $T_j$  входят в выражение для воздействия  $g$  *нелинейно*. Поэтому приходится искать минимум погрешности аппроксимации  $\varepsilon^2$  как функции многих переменных с помощью итерационных методов. Мы использовали метод Левенберга–Марквардта, но при этом значения линейно входящих параметров на каждом шаге рассчитывали линейным МНК. Согласно этому методу выбираются начальные приближения для всех неизвестных коэффициентов; функции  $f$  и  $g$  линеаризуются по этим коэффициентам в окрестности этих приближений; решением задачи на линейный МНК находятся поправки к сделанным приближениям. Алгоритм повторяется, пока не будет достигнут минимум (2.6), в общем случае — локальный. Чтобы найти глобальный минимум, необходимо перебирать различные начальные приближения. В качестве начального приближения значений  $T_j$  удобно использовать экспериментальную оценку этих величин по спектру.

---

<sup>3</sup>В общем случае для оценки параметров по данным используют метод максимального правдоподобия, частным случаем которого является МНК. В работе [55] показано, что в общем случае МНК-оценки могут быть сильно смещены, но при рассматриваемых нами малых уровнях данным эффектом можно пренебречь. Поэтому далее используется только МНК, при котором сильно упрощаются расчеты.

## 2.3 Численный эксперимент

Для апробации метода в качестве тестового объекта был выбран нелинейный неавтономный осциллятор Тоды:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - r \frac{dx}{dt} - 1 + e^{-x} = \varphi(t) \quad (2.7)$$

где  $r = 0.5$  — параметр диссипации, а  $\varphi(t)$  — внешнее воздействие. Уравнения (2.7) решались численно методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с шагом  $\Delta t = 0.01$  и таким же интервалом выборки. При выбранном значении управляющего параметра  $r$  и рассмотренных ниже типах воздействия в системе реализовывался хаотический режим. В каждой ситуации восставливались модели как в стандартной форме (2.1, 2.2), так и в модифицированном виде (2.1, 2.3, 2.5).

Для изучения работоспособности изложенного алгоритма реконструкция проводилась при четырёх различных формах регулярного воздействия (рис. 2.1). При этом воздействие последовательно усложнялось: сначала было рассмотрено периодическое гладкое, затем периодическое треугольное, более сложное для разложения в ряд, затем при наличии субгармоник и, наконец, квазипериодическое.

### 2.3.1 Реконструкция при гладком периодическом воздействии

Первое воздействие представляло собою гауссовы импульсы переменной полярности, описываемые формулой (2.8)

$$\varphi(t) = A \left( \exp \left( - \left( \frac{\tau(t)}{\sigma} \right)^2 \right) - \exp \left( - \left( \frac{\tau(t + T/2)}{\sigma} \right)^2 \right) \right), \quad (2.8)$$

где  $A$  — амплитуда воздействия,  $T$  — его период,  $\sigma$  — эффективная ширина импульса, а вспомогательная функция  $\tau(t)$  соотношением (2.9):

$$\tau(t) = (t + t_0) \bmod T - \frac{T}{2}, \quad (2.9)$$

где  $t_0$  — начальный сдвиг по времени (начальная фаза воздействия). Такое воздействие было выбрано, поскольку в отличие от гармонического, рассмотренного в [36], оно имеет богатый набор кратных гармоник основной

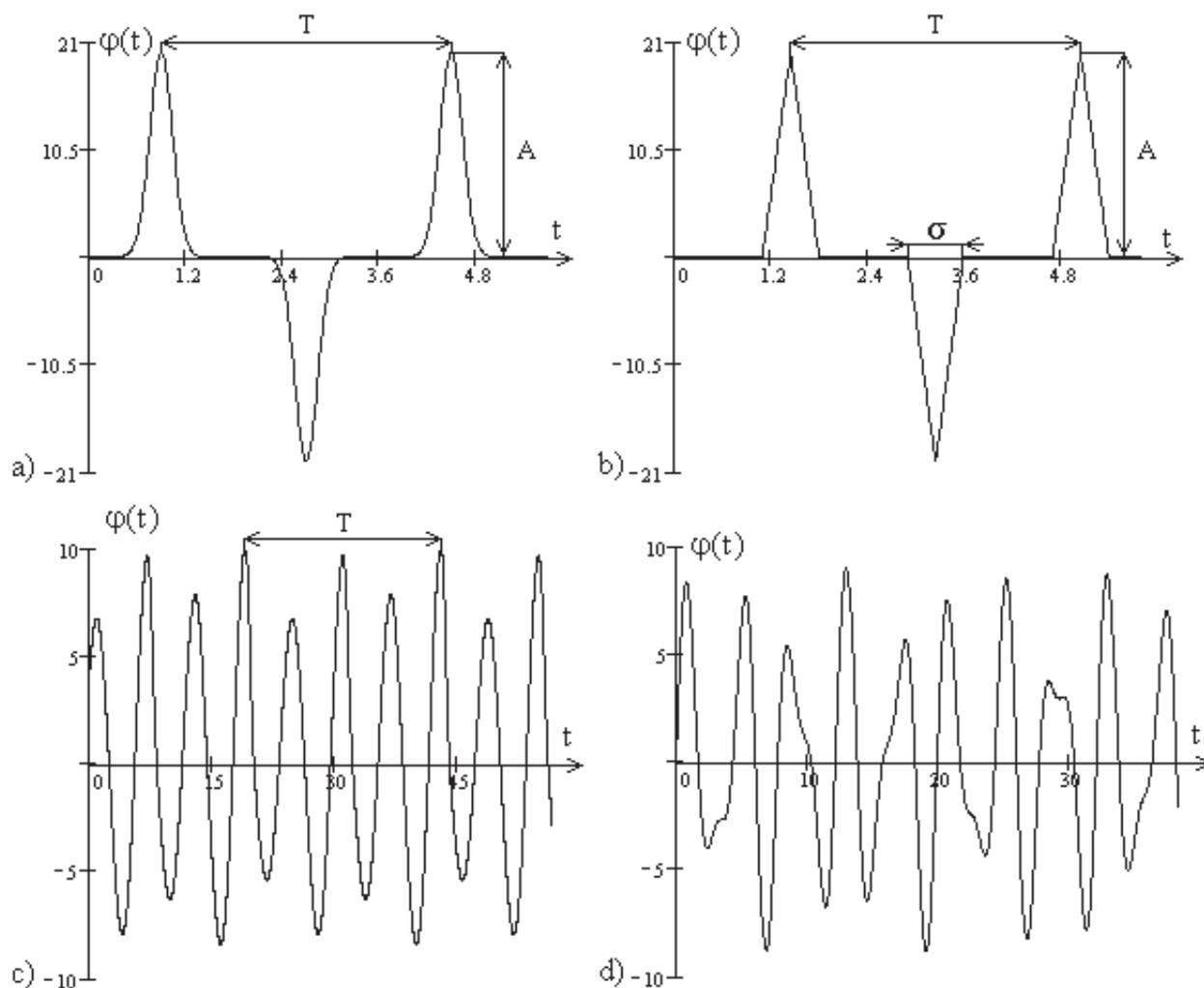


Рис. 2.1: рассмотренные виды внешнего воздействия: периодические (а) гауссовы импульсы, (б) треугольные импульсы; (с) сигнал с субгармониками (получен решением системы Рёсслера (1.7) при значениях параметров  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.2$ ,  $c_3 = 5.7$ , что соответствует режиму периода 4); (д) квазигармонический двухчастотный сигнал.

частоты, но, в то же время, также является гладким. Величины  $A$ ,  $T$  и  $\sigma$  варьировались в различных экспериментах в широких пределах:  $A \in [10, 25]$ ,  $T \in [2, 5]$ ,  $\sigma \in [0.15, 0.2]$ .

Величины  $D$ ,  $K$  и  $k$  подбирались оптимальным образом. Критериями качества моделей выступали погрешности аппроксимации  $\varepsilon$ , дальность прогноза  $\tau_{pred}$  и сходство фазовых портретов модели и объекта. Дальность прогноза  $\tau_{pred}$  рассчитывалась как временной интервал, на котором ошибка прогноза не превышала 5% от стандартного отклонения; этот интервал сравнивался с характерным временным масштабом воздействия — его периодом  $T$  (или одним из «периодов» в квазипериодическом случае) или предельно возможной дальностью прогноза  $\tau_{limit}$ , определяемой величиной старшего ляпуновского показателя. Для анализа влияния шума к исходному временному ряду добавлялся нормальный шум; тогда для расчета производных использовался  $m$ -точечный сглаживающий полином (фильтр Савицки–Голэя [56]) второго порядка, величина  $m$  подбиралась.

При моделировании весь имеющийся в распоряжении временной ряд разбивался на две неравные части: по одной из них строилась модель, этот ряд был назван тренировочным, его длина составляла  $N_{trn}$ , другая часть называлась тестовым рядом с длиной  $N_{test}$ , на нем проверялась адекватность полученной модели, подсчитывались ошибка аппроксимации  $\varepsilon^4$  и дальность прогноза  $\tau_{pred}$ . Заметим, что хорошее соответствие модели объекту на тренировочном ряде вовсе не означает, что эта модель «хорошая», поскольку она может описывать не процесс как таковой, а данную конкретную реализацию, с присущими только её особенностями и шумами (подробнее см. [36, 59]).

Стандартный алгоритм (2.1, 2.2) не дает удовлетворительных результатов даже в отсутствие шумов. Наилучшая из полученных моделей (при использовании  $D = 3$  и  $K = 2$ ) демонстрирует хаотический режим в той же области, что и объект, но фазовый портрет её не похож на портрет объекта (ср. рис. 2.2a и рис. 2.2b), ошибка аппроксимации при этом очень

---

<sup>4</sup>При вычислении тестовой ошибки аппроксимации использовался ряд такой же длины, как и тренировочный.

велика  $\varepsilon = 86.9\%$ , а дальность прогноза очень низкая  $\tau_{pred} = 0.078T$ . При этом предельно возможная дальность прогноза с точностью  $5\%$ , определяемая старшим ляпуновским показателем составляет для рассматриваемой системы в данном режиме  $\tau_{limit} \approx 60T$ , т.е. в 800 раз больше. Следует отметить, что данная модель получилась при минимально возможных значениях размерности модели  $D = 3$  и степени аппроксимирующего полинома  $K = 2$ : взять меньшую размерность нельзя, поскольку исходный сигнал хаотический и, следовательно, не может описываться двумерной моделью, а при  $K = 1$  получилась бы система линейных уравнений, которая не имеет автоколебательных решений. В то же время согласно теореме Такенса [63] только размерность модели  $D_{max} = 2D_0 + 1$ , где  $D_0$  — размерность объекта, гарантирует точное и однозначное воспроизведение моделью реализации объекта<sup>5</sup>. В нашем случае  $D_0 = 3$ , следовательно  $D_{max} = 7$ , но попытки построить модели с размерностью  $D = 4$  и выше неизбежно заканчивались неудачей: такие модели не только демонстрировали огромную ошибку аппроксимации  $\varepsilon > 60\%$  по тренировочному ряду и очень низкое время предсказания  $\tau_{pred} < 0.03T$ , но их поведение даже качественно не согласовывалось с экспериментально наблюдаемым: в качестве решения получался предельный цикл, устойчивое состояние равновесия (как правило с переходным процессом, который и описывал тренировочный ряд) или вовсе расходилось на бесконечность. К аналогичным последствиям приводило увеличение  $K > 2$ . Причина этого кроется как в росте влияния шумов при формировании рядов переменных, что препятствует увеличению размерности, так и в быстром росте числа лишних коэффициентов с увеличением степени полинома, так как эти коэффициенты учитывают не динамику объекта в данном режиме вообще, а особенности конкретной реализации.

В то же время модернизированная структура (2.1, 2.3, 2.5) при  $D = 2$  и  $K = 8$  и достаточном количестве учтённых гармоник  $k$  (уже начиная с  $k = 8$ ) обеспечивает хорошее качество реконструкции (см. рис. 2.3). Каче-

---

<sup>5</sup>Условие  $D_{max} = 2D_0 + 1$  является достаточным, но не необходимым, на практике часто более адекватными оказываются модели относительно невысокой размерности

ственно фазовые портреты объекта и модели идентичны, ошибка аппроксимации составляет менее 0.1% и время предсказания  $\tau_{pred} = 19.24T$  (при  $k = 15$ ). При наличии измерительных шумов амплитуды до 1% результаты сохраняются (ср. рис. 2.3b и 2.3c). Успех модифицированного метода обусловлен как уменьшением количества численных производных (с трёх и более для стандартной модели до двух), так и более удачным выбором аппроксимирующей функции (2.3) по сравнению с (2.2), что привело к снижению количества лишних коэффициентов.

Существенным фактором успешности модифицированного метода является правильный выбор количества членов тригонометрического полинома. На рис. 2.4 представлены графики зависимостей ошибки аппроксимации  $\varepsilon$  и времени предсказания  $\tau_{pred}$  от степени тригонометрического полинома  $k$ . Из графика видно, что существует оптимальное с точки зрения  $\tau_{pred}$  значение  $k$ . При меньших  $k$  количество членов ряда Фурье ещё недостаточно для описания формы воздействия (2.8), а при больших  $k$  новые гармоники оказываются уже лишними: точности данных не хватает, чтобы оценить их коэффициенты и они отражают только индивидуальные характеристики тренировочного ряда. Ступенчатый характер зависимостей  $\varepsilon(k)$  и  $\tau_{pred}(k)$  определяется видом исходного внешнего воздействия, которое не содержит чётных гармоник, следовательно все они являются лишними коэффициентами и их учёт несущественно улучшает модель.

### 2.3.2 Влияние шума на результат реконструкции

Цель данного раздела — показать влияние измерительного шума на результат реконструкции, что уже было начато в п. 2.3.1. Для этого мы добавляли к временным рядам наблюдаемой нормальный шум с нулевым средним и различным среднеквадратичным отклонением  $\sigma_n$ . Модель восстанавливалась только в модифицированном виде, поскольку, как показано в п. 2.3.1, стандартная структура (2.1, 2.2) была неэффективна даже при нулевом шуме. Поскольку в наибольшей степени влияние шума сказывается на качестве модели вследствие необходимости получать все перемен-

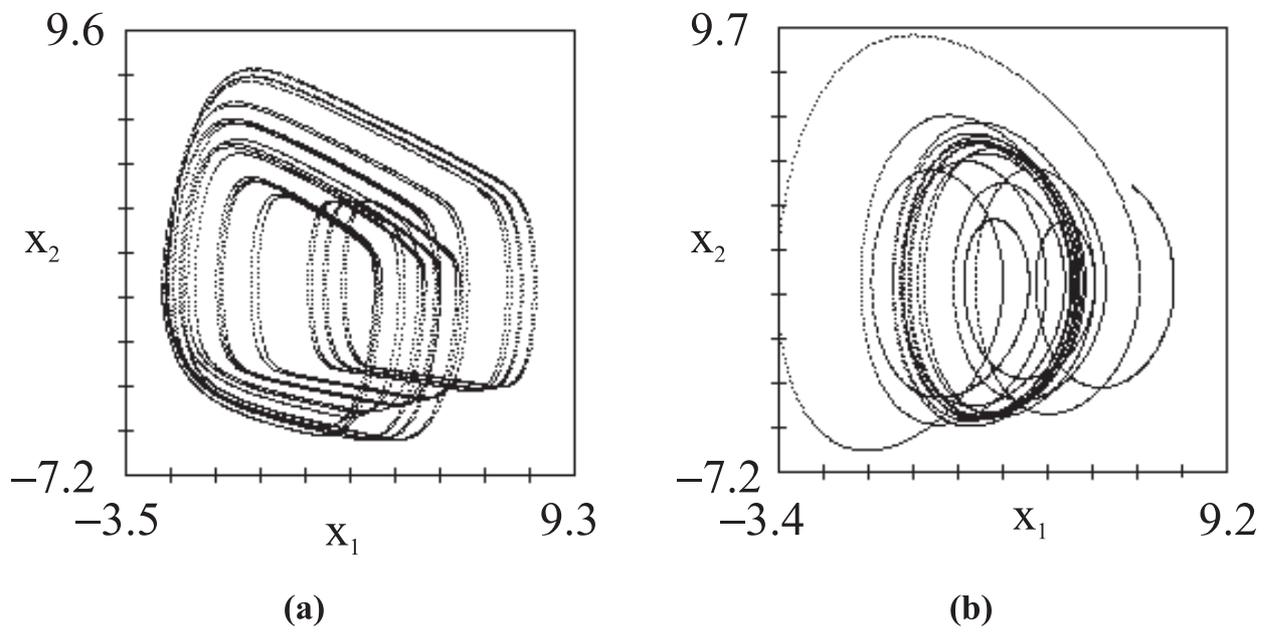


Рис. 2.2: Фазовые портреты объекта (а) и модели, построенной с использованием стандартной структуры (2.1, 2.2.) с  $D = 3$  и  $K = 2$ .

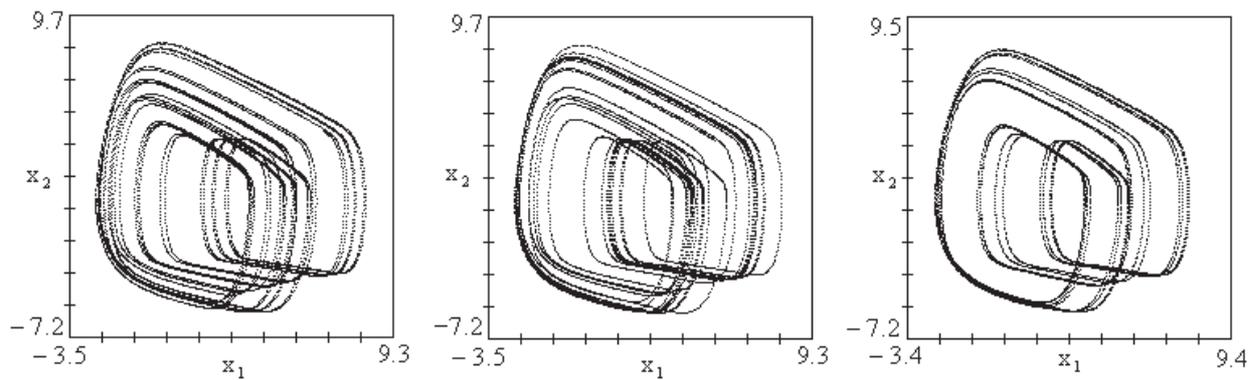


Рис. 2.3: Фазовые портреты объекта (а) и модели с использованием модифицированной структуры (2.1, 2.3, 2.5)  $k = 8$  без добавленного шума (б) и с 1%-ным шумом (с) при  $k = 15$ .

ные кроме первой численным дифференцированием ряда наблюдаемой  $\eta$ , мы использовали при дифференцировании сглаживающий полином второго порядка (фильтр Савицки–Голэя [56]). При этом количество точек  $\nu$ , по которым проводилось усреднение, подбиралось для каждого уровня шума отдельно.

Чтобы охарактеризовать величину подаваемого шума мы ввели величину  $\Xi = \lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_s}\right)$ , где  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  — среднеквадратичные отклонения шума и сигнала соответственно. Зависимости  $\tau_{pred}(\Xi)$  и  $\tau_{limit}(\Xi)$  приведены на рис. 2.5.

Из приведённых графиков видно, что, хотя с ростом шума дальность прогноза снижается (при  $\Xi = 4$   $\tau_{pred} = 7.1$ , а при  $\Xi = 2$  — уже  $\tau_{pred} = 1.5$ ), предельно возможное время прогноза также снижается ( $\tau_{limit} = 18.4$  и  $\tau_{limit} = 4.8$ ) и относительное значение  $\tau_{pred}/\tau_{limit}$  остаётся примерно таким же:  $\tau_{pred}/\tau_{limit} = 0.38$  при  $\Xi = 4$  и  $\tau_{pred}/\tau_{limit} = 0.32$  при  $\Xi = 2$ . Таким образом, можно говорить о том, что при разумных уровнях шума до 1% по амплитуде (отношению среднеквадратичных отклонений) модифицированный метод вполне работоспособен. Главное — разумно выбрать количество точек  $\nu$  при использовании сглаживающего полинома: малое усреднение приведёт к росту влияния шумов, а слишком сильное — исказит сигнал. Так, для  $\Xi = 4$  мы использовали  $\nu = 5$ , а при  $\Xi = 2$  —  $\nu = 13$ .

### 2.3.3 Реконструкция при треугольном периодическом воздействии

Второе рассмотренное нами воздействие аналогично первому, но использованы не гауссовы импульсы, а треугольные (см. рис. 2.1b). Такая «угловатая» функция существенно сложнее для аппроксимации тригонометрическим полиномом, поскольку приходится учитывать существенно большее, чем для (2.9) количество членов. Цель данного численного эксперимента — подтвердить общность полученных в п. 2.3.1 выводов и выяснить, насколько предлагаемый модифицированный метод устойчив к росту степени тригонометрического полинома. В представленном примере ампли-

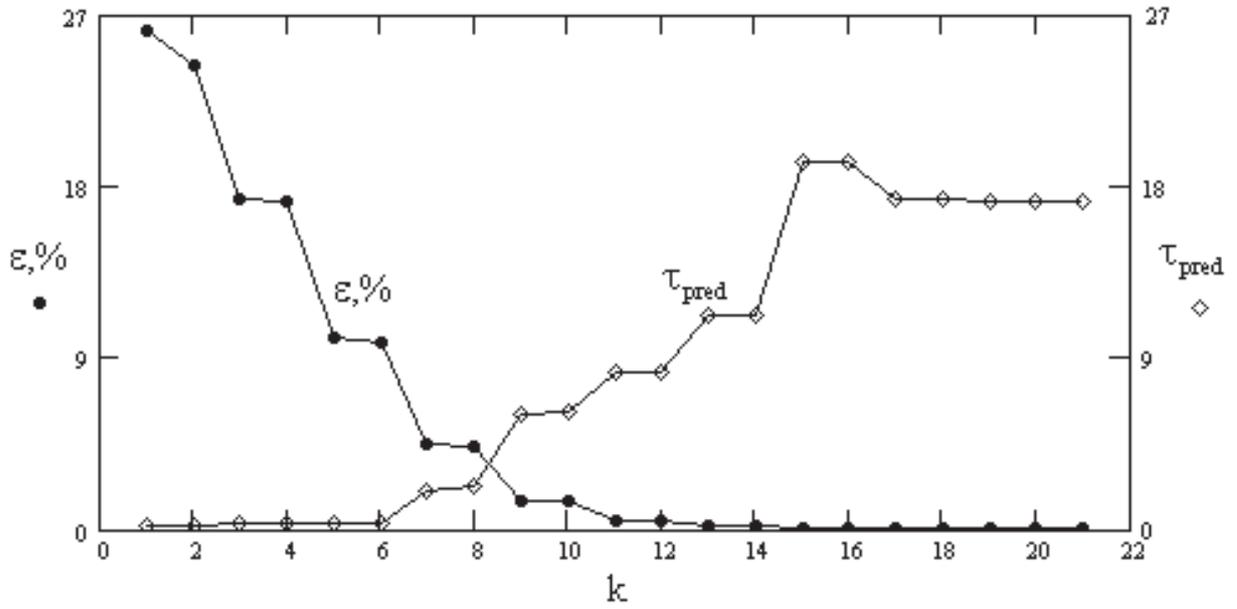


Рис. 2.4: зависимости  $\varepsilon$  (в %) и  $\tau_{pred}$  (в периодах внешнего воздействия  $T$ ) от числа гармоник  $k$  в аппроксимации внешней силы, при воздействии гауссовыми импульсами с  $T = 3.6$ ,  $A = 20$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\sigma = 0.2$

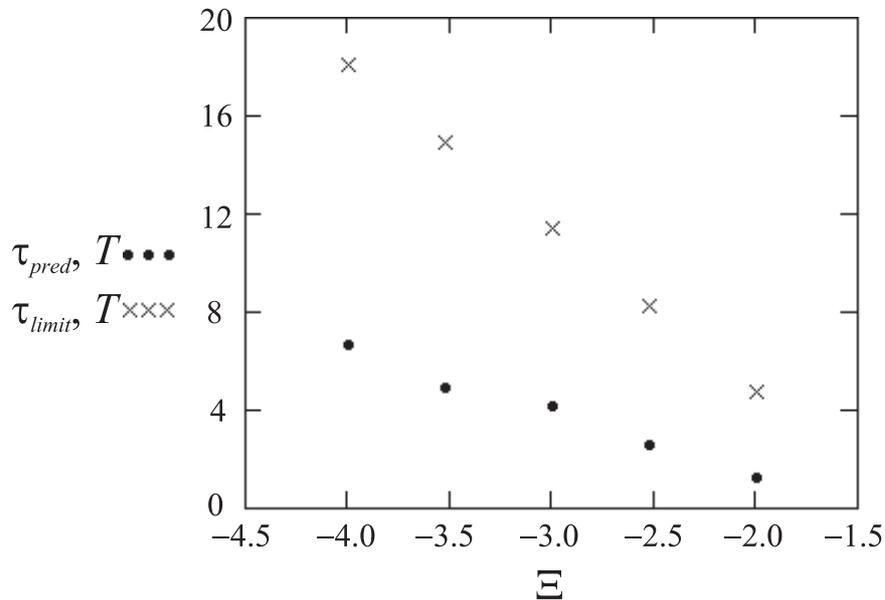


Рис. 2.5: зависимости дальности прогноза  $\tau_{pred}$  построенной с использованием модифицированного алгоритма модели и предельно возможной дальности прогноза  $\tau_{limit}$  (в периодах внешнего воздействия  $T$ ) от уровня аддитивного шума  $\Xi = \lg\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_s}\right)$ , где  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  — среднеквадратичные отклонения шума и сигнала соответственно.

туда воздействия  $A = 20$  (это амплитуда униполярного импульса, соответственно общая амплитуда в 2 раза больше), период  $T = 3.6$ , общая ширина импульсов  $\sigma = 0.7$ .

Несмотря на то, что при использовании стандартного подхода как размерность, так степень полинома варьировались при построении модели в широких пределах: перебирались всевозможные  $D$  от 3 до 6 и  $K$  от 2 до 8, построить модель, которая демонстрировала бы хаотическое поведение, не удалось. Все построенные модели имели в качестве аттрактора либо предельный цикл, либо устойчивую точку, либо вовсе не имели аттрактора, а тренировочный временной ряд описывался за счёт переходного процесса.

Модифицированный метод дал удовлетворительный результат: при оптимальных значениях  $D = 2$ ,  $K = 8$  и  $k = 40$  ошибка аппроксимации составила  $\varepsilon = 0.2\%$ , а дальность прогноза  $\tau_{pred} = 13.7T$  при максимально возможном  $\tau_{limit} \approx 70T$ . Несколько худшие, чем в предыдущем примере результаты объясняются сложностью аппроксимации воздействия тригонометрическим полиномом.

На рис. 2.6 приведены аналогичные рис. 2.4 зависимости ошибки аппроксимации  $\varepsilon$  и дальности прогноза  $\tau_{pred}$  от количества использованных членов разложения  $k$ . В целом, она имеет аналогичный вид, но насыщение происходит при существенно больших значениях  $k$ : при  $k = 35$  для величины  $\tau_{pred}$  против  $k = 15$  в предыдущем случае и при  $k = 85$  для  $\varepsilon$  (хотя  $\varepsilon(k = 35)$  и  $\varepsilon(k = 85)$  отличаются всего в 1.3 раза) при том же  $k = 15$  для гауссовых импульсов. Разный порядок насыщения для  $\tau_{pred}$  и  $\varepsilon$  объясняется, по-видимому, тем, что первая величина вычисляется по существенно более длинному тренировочному ряду, т.е. аттрактор «охватывается» более полно и, как следствие, коэффициенты при высоких гармониках, вычисленные не достаточно достоверно из-за точности представления данных, приводят к большим ошибкам в более удалённых от тренировочного ряда областях аттрактора.

Модифицированный подход показал большую устойчивость к росту количества коэффициентов тригонометрического полинома. Как показано на

рис. 2.6, при  $k = 100$  полученная модель почти ничем не хуже модели, соответствующей оптимальному выбору  $k = 35$ . Мы использовали и более длинные полиномы — до 500 гармоник (т.е. 1000 коэффициентов). При этом нет никаких проблем с неустойчивостью полученного решения, свойственных моделям в стандартной форме при высоких степенях полинома (2.2). Это обусловлено, по нашему мнению, принципиальной ограниченностью тригонометрических функций в отличие от полиномиальных.

### 2.3.4 Реконструкция при воздействии с субгармониками

В представленных в пп. 2.3.1 и 2.3.3 примерах спектр внешнего воздействия содержал только гармоники основной частоты, что обусловило простоту аппроксимации функции  $\varphi(t)$  тригонометрическим полиномом (2.5). Но на практике может встретиться такое воздействие, которое имеет не только высшие гармоники, но и субгармоники. Мы сконструировали такой пример, в котором в качестве сигнала воздействия выступала переменная  $y_1$  системы Рёсслера (1.7) при значениях параметров  $c_1 = 0.15$ ,  $c_2 = 0.2$  и  $c_3 = 5.7$ , что соответствует режиму периода 4 (см. рис. 2.1с).

Стандартный подход, как и в случае воздействия треугольными импульсами (см. п. 2.3.3) не позволяет построить удовлетворительную модель: ни одна из полученных моделей не демонстрировала хаотическое поведение. Модифицированный подход позволяет добиться хороших результатов, но для этого в качестве основного периода в (2.5) получается период, соответствующий наименьшей из субгармоник. Величина  $T_1$  в (2.5) подгоняется по ряду, как и другие коэффициенты, но при этом она входит в аппроксимирующую функцию (2.3) нелинейно, следовательно, если неудачно задать стартовую догадку для  $T_1$ , можно попасть в локальный минимум целевой функции (2.6). Именно это и происходит, если в качестве стартовой догадки  $T_1^s$  использовать значение частоты, соответствующее пику в спектре мощности наблюдаемого сигнала. Следовательно, если есть основания полагать, что сигнал воздействия может содержать субгармоники, необходимо пробовать различные стартовые догадки для периода воздействия, в

первую очередь значения  $T_1^s$ , кратные значению периода, соответствующего основному пику в спектре мощности наблюдаемой.

На рис. 2.7 представлены фазовые портреты объекта (а) и модели (b), построенной с использованием модифицированной структуры (2.1, 2.3, 2.5) при  $D = 2$ ,  $K = 10$  и  $k = 42$ . Видно, что они практически неотличимы. Ошибка аппроксимации в представленном случае составляет  $\varepsilon = 0.013\%$ , дальность прогноза —  $\tau_{pred} = 18T$  при максимально возможном  $\tau_{limit} = 28.1T$ . Необходимость использовать тригонометрический полином высокого порядка ( $k = 42$ ) следует из того, что первая гармоника аппроксимирующей функции  $g(t)$  соответствует наименьшей субгамонике исходного воздействия  $\varphi(t)$ , следовательно, чтобы учесть, скажем, десятую гармонику  $\varphi(t)$  требуется использовать 40-ую гармонику  $g(t)$ . Впрочем, относительно приемлемый результат получается уже при  $k = 8$ :  $\varepsilon = 1.8\%$  и  $\tau_{pred} = 9.8T$ .

Зависимости ошибки аппроксимации  $\varepsilon$  и дальности прогноза  $\tau_{pred}$  от количества использованных членов разложения  $k$  приведены на рис. 2.8. Зависимость  $\varepsilon(k)$  плавная и выглядит аналогично зависимости, приведённой на рис. 2.6. А вот зависимость  $\tau_{pred}$  имеет колебательный характер и насыщается только в среднем. Это можно объяснить на основе следующих соображений. Известно, что аттрактор системы Рёсслера в режиме спирального хаоса, а также в предшествующих ему периодических режимах имеет хорошо выраженный центр вращения в плоскости  $(y_1, y_2)$ , вблизи которой и происходит основное движение. Эта же черта оказалась присуща и осциллятору Тоды (2.7) под воздействием системы Рёсслера, что хорошо видно по фазовому портрету на рис. 2.7. При этом основной период вращения почти тот же, что и в воздействующей системе. Локальные максимумы зависимости  $\tau_{pred}(k)$  имеются при учёте 11-ой, 22-ой, 34-ой и 42-ой гармоник, что примерно соответствует каждый раз учёту в тренировочном ряде одного дополнительного периода внешнего воздействия. При этом с увеличением  $k$  относительная величина этих максимумов падает и периодичность следования постепенно разрушается. Следовательно, появление

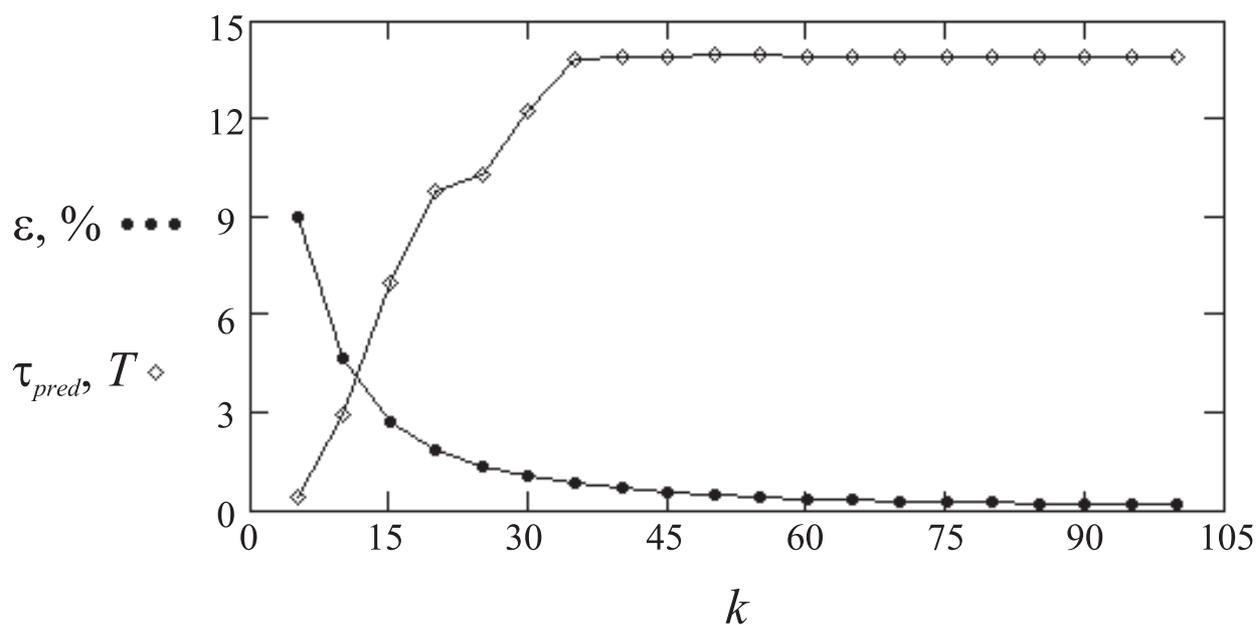


Рис. 2.6: зависимости  $\varepsilon$  (в %) и  $\tau_{pred}$  (в периодах внешнего воздействия  $T$ ) от числа гармоник  $k$  в аппроксимации внешней силы, при воздействии треугольными импульсами с  $T = 3.6$ ,  $A = 20$ ,  $\sigma = 0.7$

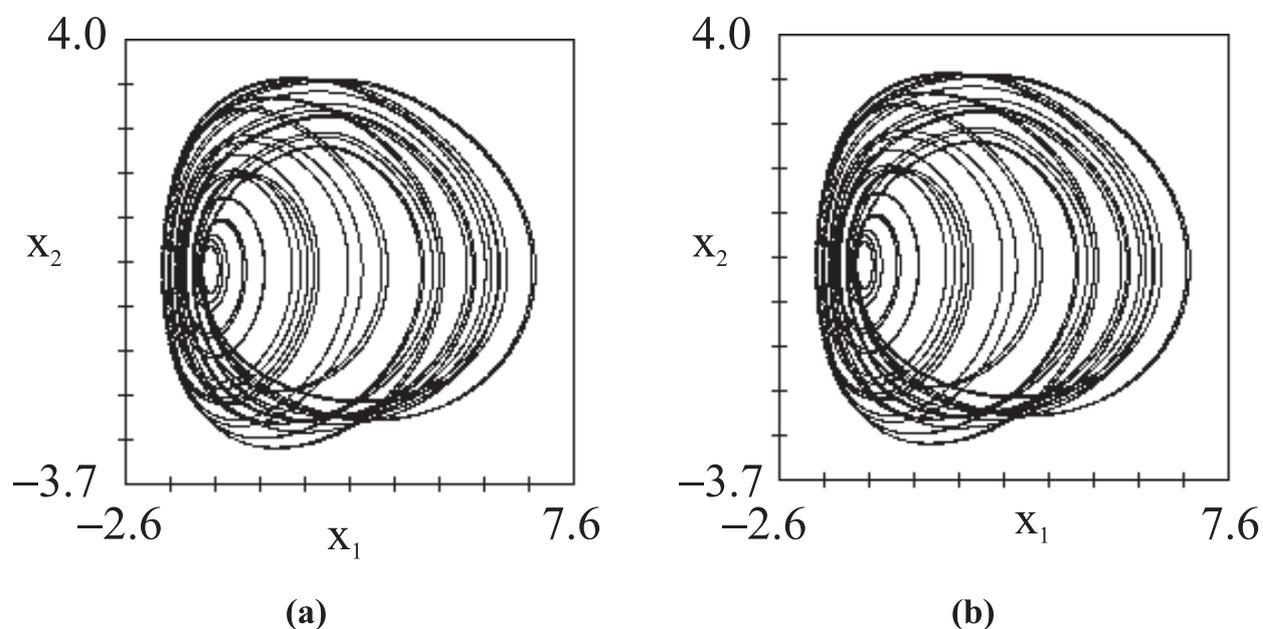


Рис. 2.7: Фазовые портреты объекта (а) и модели с использованием модифицированной структуры (2.1, 2.3, 2.5) при  $D = 2$ ,  $K = 10$  и  $k = 42$  (б). Случай внешнего воздействия, содержащего в спектре субгармоники основной частоты.

этих максимумов связано с тем, что модель при соответствующих значениях  $k$  более равномерно отражает характеристики периодичности движения на аттракторе, но при использовании высоких  $k$  этот эффект постепенно нивелируется, так как движение всё же не строго периодически.

### 2.3.5 Реконструкция при квазипериодическом воздействии

В рассмотренных в пп. 2.3.1–2.3.4 примерах для аппроксимации периодического внешнего воздействия, как бы оно ни было сложно, было вполне достаточно одного тригонометрического полинома (2.5). Однако если внешнее воздействие квазипериодическое (см. рис. 2.1d), приходится использовать два и более тригонометрических полинома, что, как показано ниже, может приводить к специфическим трудностям. В данном разделе мы ограничимся наиболее простым случаем, когда внешнее воздействие было двухчастотным и задавалось формулой (2.10)

$$\varphi(t) = A_1 \left( \frac{2\pi}{T_1} (t + t_0) \right) + A_2 \left( \frac{2\pi}{T_2} (t + t_0) \right), \quad (2.10)$$

где амплитуды гармоник  $A_1$  и  $A_2$  в рассмотренном примере принимали значения  $A_1 = 6$ ,  $A_2 = 3$ , а их периоды —  $T_1 = 4$  и  $T_2 = 2(\sqrt{5} - 1)$ , начальная фаза  $t_0$  варьировалась произвольно.

Стандартный алгоритм (2.1, 2.2) не позволяет получить сколько-нибудь приемлемую модель: все построенные с его помощью модели имели нехарактерный аттрактор или не имели его вовсе. В то же время, используя модифицированный метод (2.1, 2.3, 2.4) с двумя тригонометрическими полиномами ( $m = 2$ ), удалось добиться удовлетворительных результатов: аттрактор модели почти полностью повторяет аттрактор объекта моделирования (см. рис. 2.9). Ошибка аппроксимации по тестовому ряду составила  $\varepsilon = 0.016\%$ , дальность прогноза  $\tau_{pred} = 19.7T_1$  при предельно возможном  $\tau_{limit} \approx 64T_1$ .

Исследование зависимостей  $\tau_{pred}(k_1)$  и  $\tau_{pred}(k_2)$  показывает, что их насыщение наблюдается уже при  $k_{1,2} = 1$ , что логично, поскольку исходное воздействие (2.10) было гармоническим по обеим частотам. При увеличе-

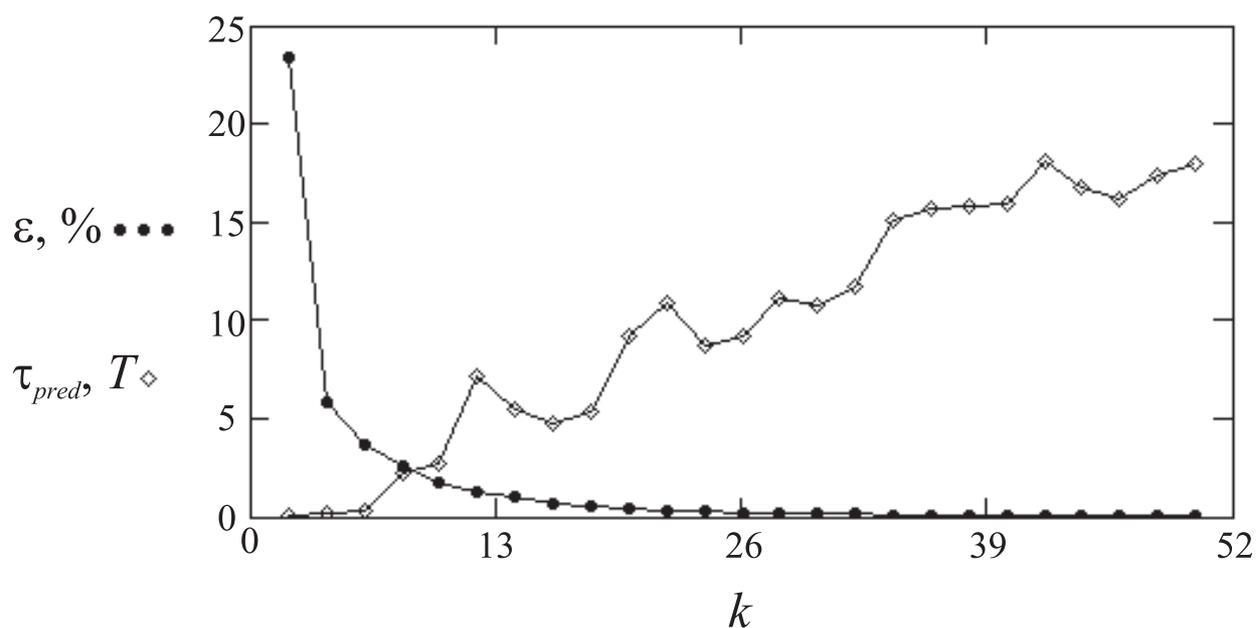


Рис. 2.8: зависимости  $\varepsilon$  (в %) и  $\tau_{pred}$  (в периодах внешнего воздействия  $T$ ) от числа гармоник  $k$  в аппроксимации внешней силы, при воздействии сигналом системы Рёслера (переменная  $y_1$ ) при значениях параметров  $c_1 = 0.15$ ,  $c_2 = 0.2$  и  $c_3 = 5.7$ , что соответствует режиму периода 4

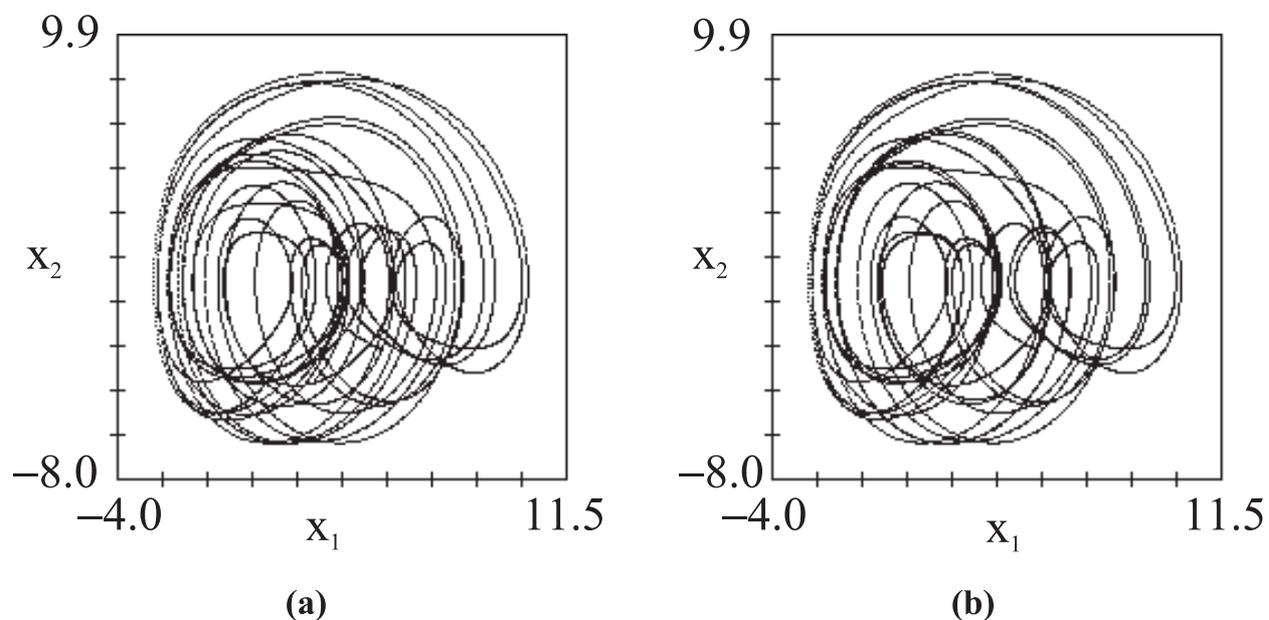


Рис. 2.9: Фазовые портреты объекта (а) и модели с использованием модифицированной структуры (2.1, 2.3, 2.4) при  $D = 2$ ,  $K = 10$ ,  $m = 2$ ,  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 1$  (б). Случай квазипериодического внешнего воздействия.

нии  $k_1$  и  $k_2$  в несколько раз получается столь же хорошая модель, как и при  $k_1$  и  $k_2$ . Однако при достаточно больших  $k$  (начиная в некоторых случаях с  $k = 10$ ) модифицированный подход не сходится: возникает ошибка, связанная с тем, что на некотором шаге алгоритма оптимизации (см. п. 2.2) при расчёте линейно входящих параметров матрица значений базисных функций в точках тренировочного ряда становится плохо определённой (что с точки зрения численной схемы равносильно её вырожденности) и поправки к коэффициентам не могут быть найдены. Это происходит от того, что в процессе подгонки какие-либо две высокие гармоники обеих основных частот почти совпадают и, следовательно, коэффициенты при них оказываются линейно связанными. Данный эффект проявляется при более высоких  $k_{1,2}$ , если стартовые догадки для периодов  $T_1^s$  и  $T_2^s$  достаточно близки к их истинным значениям: модель удаётся получить и при  $k = 25$ . Очевидно, что при необходимости использования большего количества тригонометрических полиномов, т.е. при  $m = 3$  и больше, данная проблема усугубится и подбор хороших значений стартовых догадок  $T_1^s, T_2^s, \dots, T_m^s$  станет в решающей степени влиять на успех моделирования. Другим способом борьбы с данным эффектом может стать устранение некоторых, особо близких по абсолютной величине гармоник из части тригонометрических полиномов.

## 2.4 Выводы

Результаты проведённых экспериментов по реконструкции динамических систем при различных видах воздействия позволяют заключить следующее.

- Стандартный алгоритм (2.1, 2.2) не дает удовлетворительных результатов ни при одном из приведенных видах воздействия даже в отсутствие шумов, тогда как модернизированная структура (2.1, 2.3, 2.4) при достаточном количестве учтённых гармоник обеспечивает хорошее качество реконструкции, в том числе и при наличии шумов, хотя получение оптимальной модели в этом случае требует значительно

большей длины тренировочного ряда.

- Усложнение формы воздействия заставляет увеличивать число членов тригонометрического полинома (2.5), но это остается без негативных последствий, тогда как глобальная неустойчивость стандартных моделей с алгебраическими полиномами высоких порядков была главной причиной неудач стандартного подхода. Так, воздействие в виде треугольных импульсов потребовало учесть весьма большое, порядка 80-90, число членов ряда. Проводились успешные эксперименты с использованием даже 300-500 гармоник.
- Присутствие субгармоник во внешнем воздействии не представляет никаких новых трудностей, если в качестве базовой частоты принять наименьшую из частот субгармоник. Чтобы найти эту частоту необходимо перебирать стартовые догадки для периода воздействия, в качестве которых следует в первую очередь брать величины, кратные периоду, соответствующему основному пику в спектре наблюдаемой.
- При квазипериодическом воздействии (2.10) неавтономная модель демонстрирует очень хорошее соответствие объекту — фазовые траектории объекта и модели визуально неотличимы. Основная сложность работы с несколькими тригонометрическими полиномами состоит в том, что периоды двух высоких гармоник из разных полиномов на некотором этапе итерационной процедуры могут оказаться столь близкими, что это приведёт к вырожденной или очень плохо обусловленной матрице при решении задачи оценки линейно входящих параметров. Поэтому приходится уменьшать числа членов ряда и очень точно задавать начальные догадки.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [90, 91, 92, 93, 94, 95]

## Глава 3

# Восстановление внешнего воздействия методами работы со скрытыми переменными

### 3.1 Введение

В данной главе предлагается принципиально новая методика восстановления сигнала воздействия по записям колебаний неавтономного объекта. Причём искомое воздействие может быть как регулярным, так и хаотическим и даже шумовым. В отличие от известных подходов [34, 36], мы отказываемся от аппроксимации воздействия явной функцией времени, а представляем его в виде дополнительной скрытой переменной, что расширяет возможности реконструкции на случай сколь угодно сложных нерегулярных (но достаточно гладких) воздействий. Для выделения воздействия в структуру модели (эта структура предполагается известной) включается дополнительное дифференциальное уравнение первого порядка. Предлагаемая методика имеет преимущества перед известными подходами в части объёма априорной информации об объекте и открывает дополнительные прикладные возможности.

Прежние работы по моделированию неавтономных систем, включающие в себя и восстановление внешнего воздействия состояли в следующем. В случае неавтономных систем под гармоническим [36] или произвольным регулярным (периодическим, квазипериодическим) внешним воздействием

[90] (см. п. 2.2) в структуру модельных уравнений вводилась явная функциональная зависимость от времени. Эта зависимость либо задавалась в специфическом для рассматриваемого объекта виде, либо аппроксимировалась тригонометрическим полиномом. Однако с усложнением вида воздействия решение задачи затрудняется (см., например, п. 2.3.5) и становится невозможным, если воздействие нерегулярное (например, хаотическое).

Другой подход изложен в работах [32, 33]: считается, что структура модели известна, но, кроме того, доступны ряды моделируемой системы в автономном режиме при тех же значениях параметров. При этом по реализации автономной системы решается задача оценки неизвестных параметров, а потом по ряду неавтономной восстанавливается воздействие. Хотя такой подход лишён ряда недостатков, присущих работам [36, 90], поскольку не накладывает требований на тип воздействия (оно не обязано быть регулярным), однако предположение о доступности рядов автономной системы существенно ограничивает возможности его применения.

Предлагаемая новая методика выделения внешнего воздействия основана на использовании методов реконструкции при наличии *скрытых переменных* (см. [30, 31], п. 1.2). Она требует знания структуры модели<sup>1</sup>, но при этом никакие предположения о виде воздействия кроме его достаточной гладкости не закладываются. *Реализуемая нами идея заключается в представлении воздействия в виде дополнительной скрытой переменной и преобразовании структуры модели к специальному виду, причём искомая временная реализация воздействия восстанавливается вместе с подгонкой коэффициентов в процессе реконструкции.* Хотя такой подход приводит к увеличению размерности искомой модели (подробнее см. п. 3.2), но освобождает от необходимости знания временного ряда автономной системы. Естественно, все проблемы реконструкции уравнений по рядам и осложнения, сопутствующие наличию скрытых переменных, при таком подходе остаются и требуют своего решения известными методами (см. [30, 84], также раздел 1.3 настоящей работы).

---

<sup>1</sup>Структура может быть известна из общих соображений, либо может стоять задача проверки и сопоставления нескольких различных моделей одного и того же объекта.

Дополнительно следует отметить, что в ситуации, когда часть модельных переменных не измеряется, т.е. в ситуации наличия дополнительных (кроме воздействия) скрытых переменных, все изложенные в [32, 33, 36, 90] методы неприменимы, потому в такой ситуации новый предложенный подход остаётся единственным.

Работоспособность и возможности предложенной методики в различных ожидаемых ситуациях доказывается решением демонстрационных задач, сложность которых последовательно увеличивается. В п. 3.3.1 восстанавливается хаотическое воздействие на динамическую систему с регулярной автономной динамикой в наиболее простой ситуации, когда структура модели заведомо известна (бралась система Рёсслера) и при подгонке коэффициентов доступны ряды всех переменных (скрытые переменные отсутствуют). Далее рассматриваются ситуации наличия измерительного шума (п. 3.3.2), хаотичности автономной системы (п. 3.3.3) и шумового воздействия — реализации случайного процесса — (п. 3.3.4). Случай дефицита данных, когда имеются дополнительные скрытые переменные, анализируется в п. 3.3.5. В п. 3.3.6 для подтверждения общности полученных результатов объект меняется — реконструируются уравнения радиотехнического генератора с 1,5 степенями свободы. Интерес именно к этой системе вызван тем, что она рекомендуется специалистами как основной элемент построения систем телекоммуникации на хаотической несущей [41, 42]. В разделе 3.4.1 обсуждаются перспективы применения предложенного метода, приводится пример его использования для организации защищенного канала передачи информации.

## 3.2 Методика реконструкции

Уравнения, описывающие произвольную неавтономную динамическую систему в достаточно общем виде, могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ &\dots \\ \dot{y}_q &= f_q(\mathbf{y}, \mathbf{c}, g(t)) \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= f_D(\mathbf{y}, \mathbf{c}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $y_i$  — динамические переменные, компоненты вектора  $\mathbf{y}$ , ряды которых получают из рядов наблюдаемых,  $\mathbf{c}$  — вектор параметров,  $f_i$  — известные функции,  $g(t)$  — искомое внешнее воздействие<sup>2</sup>. Пусть  $q$ -тое уравнение, в которое входит воздействие, однозначно разрешимо относительно него:

$$g(t) = \Phi(\dot{y}_q, \mathbf{y}, \mathbf{c}) \tag{3.2}$$

Представим  $g(t)$  в виде новой,  $(D + 1)$ -ой переменной  $g(t) = y_{D+1}(t)$ , которая, так как воздействие неизвестно, является скрытой. Для этой новой переменной необходимо задать оператор эволюции, для чего продифференцируем (3.2) по времени. Наиболее просто это делается, если воздействие аддитивное и выражение (3.2) принимает вид:

$$g(t) = \dot{y}_q - f_q(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \tag{3.3}$$

В таком случае (3.1) преобразуется к виду (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= f_D(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ \dot{y}_{D+1} &= \ddot{y}_q - \frac{df_q(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{dt} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Именно в таком виде и будем восстанавливать модель. Несмотря на то, что последнее уравнение (уравнение для исходного внешнего воздействия

---

<sup>2</sup>Метод применим без изменений в случае, когда одно и то же внешнее воздействие входит в несколько уравнений. Кроме того, его можно обобщить и на случай нескольких сигналов воздействия при наличии соответствующих наблюдаемых.

$g(t) = y_{D+1}(t)$ ) имеет первый порядок, оно может иметь сложное решение, поскольку является неавтономным, а роль внешнего воздействия играет теперь  $\ddot{y}_q$ .

Для подгонки параметров требуются временные ряды величин  $\dot{y}_q$  и  $\frac{df_q(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{dt}$ . Ряд  $\dot{y}_q$  можно получить двукратным численным дифференцированием ряда переменной  $y_q$ , при этом для борьбы с увеличением влияния шумов следует использовать специальные процедуры: фильтрацию, дифференцирование с помощью сглаживающего полинома и др. (подробнее см., например, [56]). Величина же  $\frac{df_q(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{dt}$  выражается аналитически через заданные при выборе структуры уравнений функции  $f_i(\mathbf{y}, \mathbf{c})$  следующим образом:

$$\frac{df_q(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{dt} = \sum_{i=1}^D \frac{\partial f_i(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{\partial y_i} f_i(\mathbf{y}, \mathbf{c}) \quad (3.5)$$

Для случая параметрического воздействия, если правая часть  $q$ -того уравнения может быть переписана в форме  $f_q(\mathbf{y}, \mathbf{c}) = f_{q1}(\mathbf{y}, \mathbf{c}) + g(t) f_{q2}(\mathbf{y}, \mathbf{c})$ , выражение (3.2) преобразуется к виду

$$g(t) = \frac{\ddot{y}_q - f_{q1}(\mathbf{y}, \mathbf{c})}{f_{q2}(\mathbf{y}, \mathbf{c})} \quad (3.6)$$

Возможны также другие варианты, а также и использование функции  $\Phi$  в неявном виде, главное, чтобы она была однозначна. Последнее представляется достаточно типичным случаем<sup>3</sup>.

Основной принцип реконструкции — общий для многих методов: проводится поиск таких параметров и начального состояния модели, чтобы ее реализация была наиболее близка к наблюдаемому ряду в смысле наименьших квадратов. Поскольку ряд значений переменной  $y_{D+1}$  отсутствует, для решения задачи в рассматриваемой ситуации подходит метод множественной стрельбы (см. подробнее в п. 1.2), облегчающий поиск глобального минимума целевой функции — суммы квадратов отклонений наблюдаемого

---

<sup>3</sup>Вопрос о *типичности* или *нетипичности* того или много предположения, вообще говоря, зависит от класса рассматриваемых задач. Однако даже если случай является нетипичным, но важным с практической точки зрения, он заслуживает специального рассмотрения и построения специализированных методик.

ряда от реализации модели. Мы использовали модифицированный метод множественной стрельбы, в соответствии с которым весь временной ряд делится на  $\nu$  сегментов, которые в свою очередь на  $L$  подсегментов по  $n$  точек в каждом. Задаются стартовые догадки для искомым параметров и начальные состояния модели на каждом сегменте. Рассчитываются поправки к текущим догадкам, обеспечивающие минимум целевой функции и непрерывность траектории модели за исключением избранных  $\nu$  точек в линеаризованной задаче на наименьшие квадраты. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока величина поправок не станет меньше заранее заданной величины.

### 3.3 Численные примеры реконструкции

В качестве тестового примера рассмотрим систему Рёсслера, когда воздействие входит аддитивно в первое уравнение, все три переменные или только некоторые из них доступны измерению:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3 + g(t) \\ \dot{y}_2 &= y_1 + c_1 y_2 \\ \dot{y}_3 &= c_2 + y_3 (y_1 - c_3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $y_i$  — динамические переменные модели,  $\mathbf{c}$  — неизвестные параметры,  $g(t)$  — искомое внешнее воздействие. В пп. 3.3.1–3.3.4 будем восстанавливать воздействие в ситуациях различной степени сложности: автономная система — периодическая, затем хаотическая; интенсивность шума наблюдений меняется от нуля до больших величин; воздействие — детерминированное хаотическое или случайный процесс с достаточно «гладкими» реализациями. В п. 3.3.5 рассмотрим случай, когда есть дополнительные скрытые переменные, кроме воздействия. В каждом примере оптимальным образом будем выбирать количество сегментов  $\nu$  и подсегментов  $L$ , способ задания стартовых догадок для начальных значений скрытых переменных. Будем использовать следующие критерии качества реконструкции:

1. относительная среднеквадратичная *ошибка аппроксимации*  

$$\varepsilon_{app} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^d \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^N [y^k(t_j) - \eta^k(t_j)]^2,$$
 где  $\eta^k(t_j)$  — значение  $k$ -той наблюдаемой в  $j$ -тый момент времени, а  $y^k(t_j)$  — соответствующее ему значение переменной модели,  $\sigma_k^2$  — дисперсия  $k$ -той наблюдаемой;
2. относительная *ошибка оценки параметров*, рассчитываемая по формуле  $\varepsilon_{par} = \sum_{i=1}^P |c_i^0 - c_i^m| / c_i^0$ ;
3. относительная среднеквадратичная *погрешность восстановления воздействия*  $\varepsilon_{drv} = \frac{1}{N\sigma_g^2} \sum_{j=1}^N [y_{D+1}(t_j) - g(t_j)]^2$ , где  $\sigma_g^2$  — дисперсия сигнала воздействия.

### 3.3.1 Автономный режим периодический, воздействие хаотическое

Рассмотрим (3.7) с параметрами  $\mathbf{c}^0 = (0.15, 0.2, 3.2)^4$ , при которых автономная система имеет периодическое решение — цикл периода 1. Хаотическое внешнее воздействие  $g(t) = kz_1$  — временная реализация неавтономного осциллятора Тоды (3.8) с коэффициентом передачи  $k$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2\alpha_1 z_2 - 1 + \exp -z_1 + \alpha_2 \sin(t), \end{aligned}$$

где параметры  $\alpha_1 = 0.25$ ,  $\alpha_2 = 7$ ,  $k = 0.1$ . Обе системы интегрировались совместно численно методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с шагом  $2 \cdot 10^{-3}$  и интервалом выборки  $10^{-2}$ .

Согласно предложенному подходу модель восстанавливалась в виде (3.8):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3 + y_4 \\ \dot{y}_2 &= y_1 + c_1 y_2 \\ \dot{y}_3 &= c_2 + y_3 (y_1 - c_3) \\ \dot{y}_4 &= y_1 + c_1 y_2 + c_2 - (c_3 - y_1) y_3 + \zeta(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

---

<sup>4</sup>Индексом 0 сверху будем далее обозначать «истинные» значения параметров; значения, полученные в результате реконструкции, будем обозначать индексом  $m$  как модельные, а стартовые догадки — индексом  $s$ .

где  $\zeta(t)$  — вторая численная производная наблюдаемой  $y_1$ . Стартовые догадки для скрытой переменной  $y_4$ , т.е. для искомого внешнего воздействия, выбирались двумя способами: либо в виде тождественного нуля, либо в виде периодической функции  $y_4^s(t_i) = A \sin(\Omega t_i)$ , где параметры  $A$  и  $\Omega$  подбирались. В большинстве приведённых примеров использовались  $A = 1$  и  $\Omega = 1$ , поскольку характерный период сигнала наблюдаемой составлял  $T_b \approx 6.0$ .

Были сгенерированы 20 различных стартовых догадок для вектора параметров  $\mathbf{c}^s$ , которые варьировались в широких пределах от  $\mathbf{c}^s = (0.0, 0.0, 0.0)$  до  $\mathbf{c}^s = 1.7\mathbf{c}^0$ . Использовались временные ряды различной длины: от 300 до 4500 точек при количестве сегментов  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  и количестве подсегментов  $L$  от 10 до 135.

Из рис. 3.1 сопоставлены временные реализации  $g(t)$  и результат реконструкции. Видно, что восстановленное воздействие визуально неотличимо от достаточно сложного исходного. При использовании  $\nu = 1$ ,  $L = 30$ ,  $n = 150$  модель была успешно построена для всех 20 стартовых догадок  $\mathbf{c}^s$ , среднеквадратичная ошибка восстановления составила  $\varepsilon_{dri} = 9.1 \cdot 10^{-4}$ , т.е. меньше процента. Неизвестные параметры также удалось восстановить с высокой степенью точности: их ошибка восстановления —  $\varepsilon_{pri} = 1.47 \cdot 10^{-2}$ , т.е. примерно полтора процента. Для других значений  $\nu$ ,  $L$  и  $n$  результаты оказались сходными, хотя не всегда удавалось восстановить модель при некоторых больших отклонениях  $\mathbf{c}^s$  от  $\mathbf{c}^0$ .

### 3.3.2 Реконструкция по зашумлённым данным

Поскольку метод предполагает использование второй численной производной наблюдаемой, его важно протестировать на чувствительность к шумам. Мы добавили ко всем рядам наблюдаемых нормальный шум со среднеквадратичным отклонением  $\sigma_n$  в пределах от  $10^{-4}\sigma_s$  ( $\sigma_s$  — среднеквадратичное отклонение сигнала) до  $2 \cdot 10^{-1}\sigma_s$  (20%-ный шум). Для борьбы с шумом использовался сглаживающий полином — фильтр Савицки-Голэя [56]. На рис. 3.3.1 показано, как ведут себя ошибка восстановления

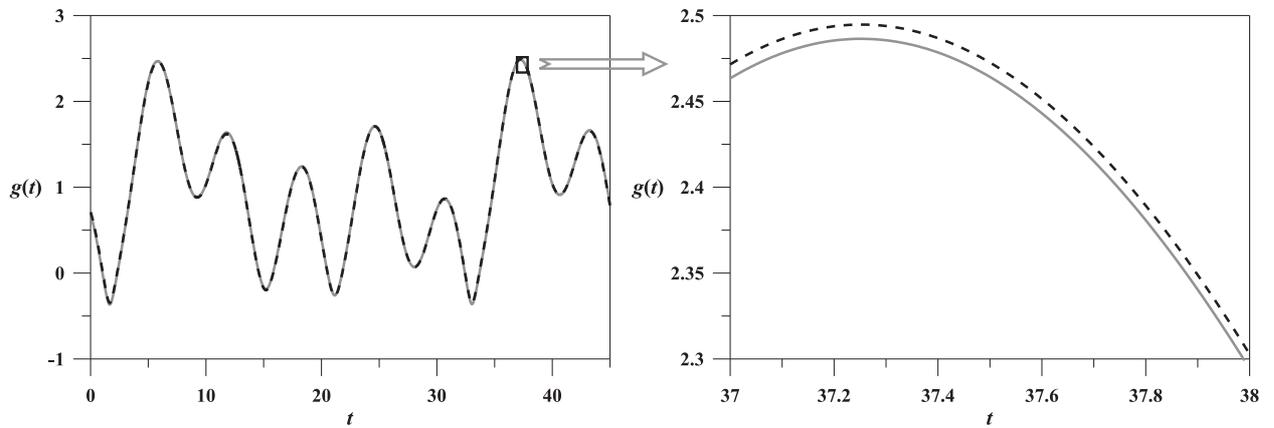


Рис. 3.1: временные ряды внешнего воздействия: исходного (чёрный пунктир) и восстановленного (серая сплошная). Для удобства просмотра увеличен фрагмент — (b).

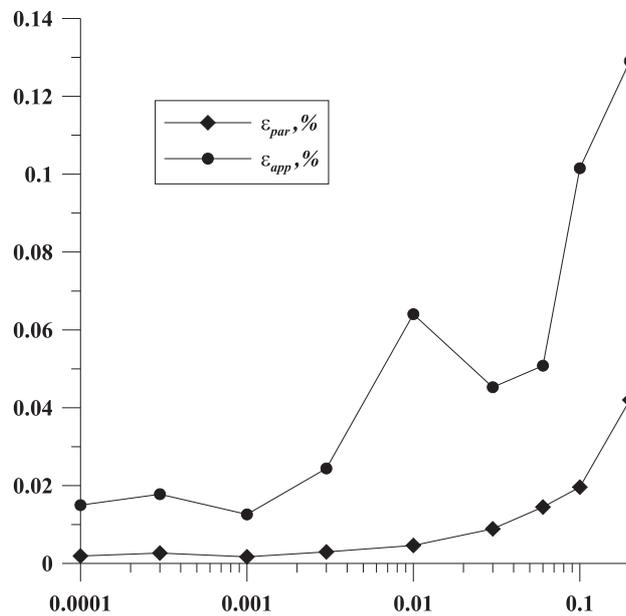


Рис. 3.2: зависимости ошибки аппроксимации  $\varepsilon_{app}$  и ошибки в оценке параметров  $\varepsilon_{par}$  от уровня измерительного шума  $\sigma_n/\sigma_s$ ,  $\sigma_s$  — среднеквадратичное отклонение сигнала,  $\sigma_n$  — среднеквадратичное отклонение шума. Автономная система находилась в периодическом режиме.

параметров и среднеквадратичная ошибка аппроксимации в зависимости от амплитуды шума. Представленные результаты показывают, что предложенный метод устойчив к разумным весьма значительным уровням шумов (до 20%) и даёт хорошие результаты как с точки зрения точности определения параметров — менее 0.5% для  $\sigma_n/\sigma_s < 10^{-2}$ .

На рис. 3.3 представлены одна из наблюдаемых (зашумлённая переменная  $y_1$ ) (а), а также внешнее воздействие (б): восстановленное (сплошная серая линия) и исходное (чёрный пунктир) внешнее воздействие при уровне шума  $\sigma_n/\sigma_s = 0.1$ . Восстановленное воздействие дополнительно отфильтровано фильтром низких частот. Видно, что несмотря на существенный уровень шума, внешнее воздействие реконструируется достаточно точно.

### 3.3.3 Автономный режим хаотический, воздействие хаотическое

Боле сложной для реконструкции является ситуация, когда в системе присутствует собственная хаотическая динамика, а она чувствительна к малым воздействиям. Рассмотрим ту же систему под тем же воздействием, но при значении вектора параметров  $\mathbf{c}^0 = (0.15, 0.2, 10)$ , что соответствует хаосу в автономной системе. Зависимости ошибки аппроксимации  $\varepsilon_{app}$  и ошибки в оценке параметров  $\varepsilon_{par}$  от уровня шума, аналогичные зависимостям на рис. 3.3.1 представлены на рис. 3.3.3. Хотя из сравнения этих зависимостей видно, что в целом они поднялись и качество реконструкции несколько ухудшилось, в целом метод остаётся работоспособным при данных уровнях шумов (до 20%).

Графики одной из наблюдаемых  $\eta_1$  (зашумлённой переменной  $y_1$ , уровень шума  $\sigma_n/\sigma_s = 0.1$ ) и внешнего воздействия: исходного и восстановленного представлены на рис. 3.5. Хотя в ряде случаев отличие восстановленного воздействия от оригинального заметно, в целом при столь существенном шуме достигнутый результат можно признать хорошим. Таким образом, показано, что нерегулярная собственная динамика воздействуемой системы хотя и затрудняет реконструкцию, принципиально на результат не влияет.

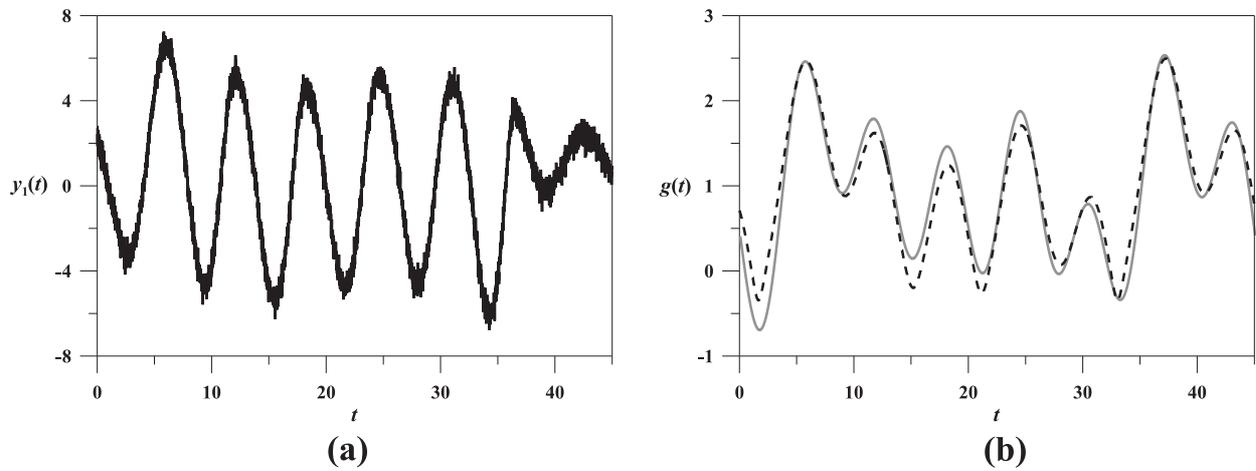


Рис. 3.3: временной ряд наблюдаемой  $\eta_1$  (а) и временные ряды внешнего воздействия: исходного (чёрный пунктир) и восстановленного (серая сплошная) — (b).

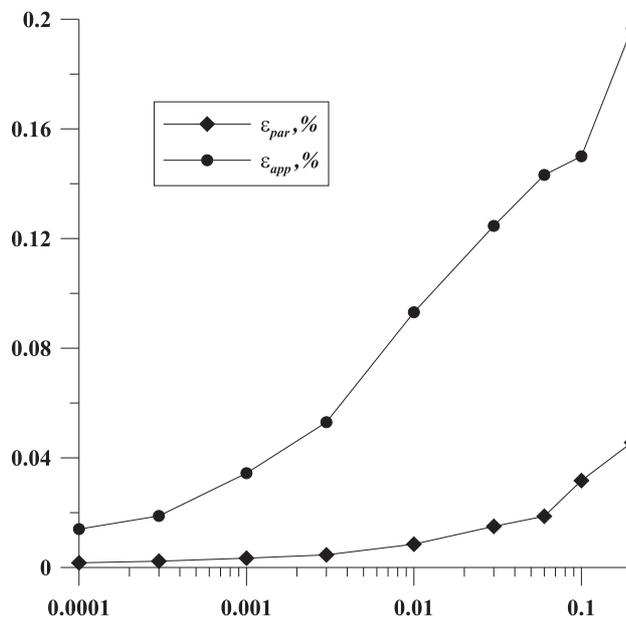


Рис. 3.4: зависимости ошибки аппроксимации  $\epsilon_{app}$  и ошибки в оценке параметров  $\epsilon_{par}$  от уровня измерительного шума  $\sigma_n/\sigma_s$ ,  $\sigma_s$  — среднеквадратичное отклонение сигнала,  $\sigma_n$  — среднеквадратичное отклонение шума. Автономная система находилась в хаотическом режиме

### 3.3.4 Автономный режим хаотический, воздействие шумом

Данный пример призван показать, что для применения предлагаемого метода не требуется предположение о динамическом характере внешнего воздействия, хотя модель в виде (3.4, 3.5) и представляет собою динамическую систему. Требуется только, чтобы это воздействие было достаточно гладким.

В качестве объекта исследования выступала система Рёсслера (3.7) при значениях параметров  $\mathbf{c}^0 = (0.15, 0.2, 10)$ , что соответствует в автономном режиме хаотической динамике, а внешнее воздействие представляло собою нормальный белый шум, пропущенный через фильтр низких частот с частотой отсечки 0.3; график воздействия приведён на рис. 3.6.

Стартовые догадки для неизвестных параметров задавались случайным образом из области  $c_i^s \in [0.6c_i^0, 1.4c_i^0]$  для каждого из трёх параметров. Всего было выбрано 20 различных  $\mathbf{c}^s$ . При использовании  $N = 4500$ ,  $\nu = 1$ ,  $L = 150$  удалось достигнуть глобального минимума при всех 20 стартовых догадках. Ошибка аппроксимации составила  $\varepsilon_{app} = 0.22\%$ , а ошибка оценки параметров —  $\varepsilon_{par} = 0.7\%$ . Таким образом, можно сделать вывод, что получен результат примерно с той же точностью, что и в случае, когда воздействие представляло собою детерминированный сигнал.

### 3.3.5 Ситуация большого числа скрытых переменных

В приведённых ранее примерах главными осложняющими реконструкцию факторами были наличие измерительного шума и собственная нерегулярная динамика. Ещё одним существенным и распространённым на практике затруднением является доступность не всех переменных модели (кроме сигнала воздействия). Усложним рассмотренный в п. 3.3.3 вариант тем, что измеряются только две переменные из трёх:  $y_1$  и  $y_2$ . Опираясь на ранее проведённые исследования (см. п. 1.3.9), стартовые догадки для скрытой переменной  $y_3$  задавались в виде тождественного нуля.

Проведённые исследования показали, что увеличение числа скрытых переменных за счет внешнего воздействия, как и следовало ожидать, сужа-

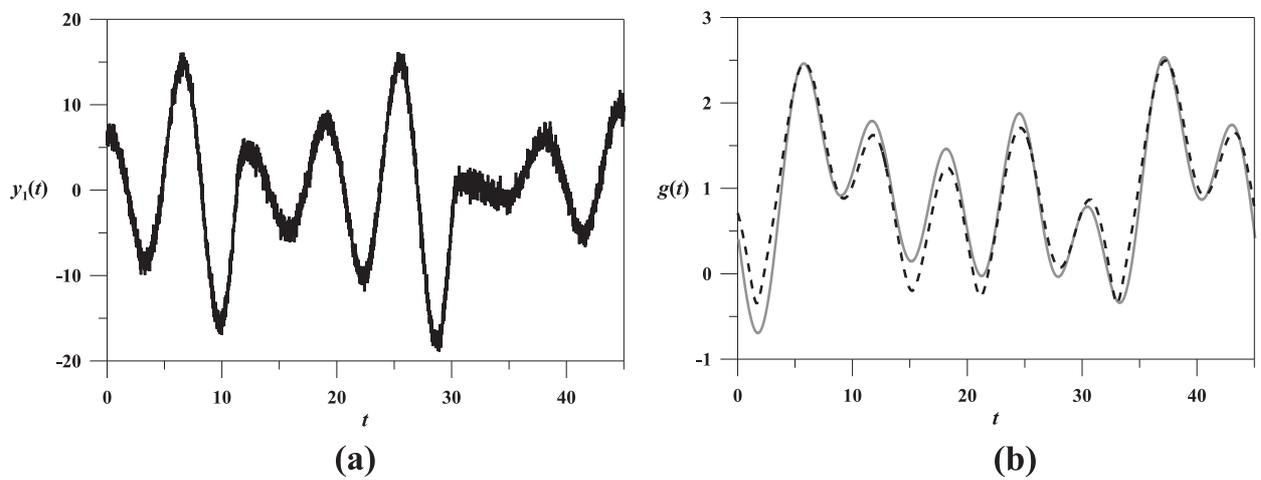


Рис. 3.5: временной ряд наблюдаемой  $\eta_1$  (а) и временные ряды внешнего воздействия: исходного (чёрный пунктир) и восстановленного (серая сплошная) — (б). Реконструкция при параметрах, когда автономная система находилась в хаотическом режиме.

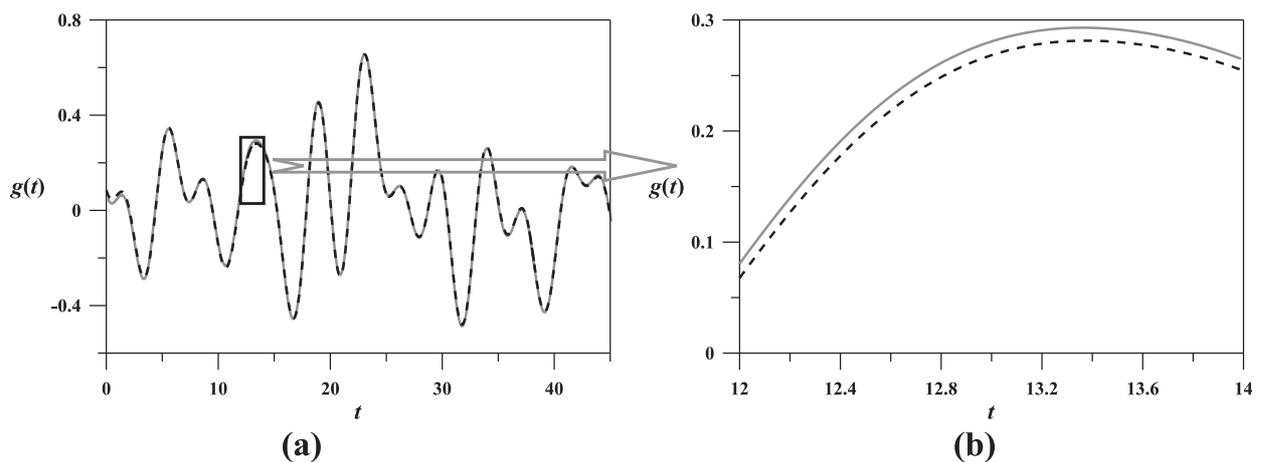


Рис. 3.6: временные ряды внешнего воздействия: исходного (чёрный пунктир) и восстановленного (серая сплошная). Для удобства просмотра увеличен фрагмент — (б).

ет область допустимых стартовых догадок, но не является непреодолимым препятствием при реконструкции. Например, реконструировать систему (3.7) удастся только при одном неизвестном параметре  $c_1$ , а не трёх, как было в автономном случае (параметры  $c_2$  и  $c_3$  приходится зафиксировать). Зато полученная область стартовых догадок  $c_1^s$  оказывается очень широкой:  $c_1^s \in [-3.0, 2.6]$  при  $c_1^0 = 0.15$ , то есть ошибка в стартовых догадках может достигать 20 раз.

На рис. 3.7 представлены графики наблюдаемой  $\eta_1$  (соответствующей переменной  $y_1$ ) (а) и внешнего воздействия исходного и реконструированного (по зашумлённым данным с уровнем шума 1%). Таким образом, несмотря на существенный дефицит данных, когда для трёхмерной неавтономной системы известны только зашумлённые ряды двух переменных, удалось достоверно оценить один из параметров и восстановить ряды воздействия  $g(t)$  и недостающей переменной  $y_3$ , причём при больших допущениях для стартовых догадок для параметров.

### 3.3.6 Реконструкция уравнений генератора с 1,5 степенями свободы

Общность полученных результатов подтверждается положительными результатами экспериментов на других системах. Рассмотрим пример, в котором восстанавливались уравнения неавтономного радиотехнического генератора с 1,5 степенями свободы, рекомендуемого специалистами (см. [41, 42]) в качестве базового элемента систем передачи информации:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (F(y_3) - y_1)/T \\ \dot{y}_2 &= \omega^2 (y_1 - y_3) \\ \dot{y}_3 &= y_2 - \alpha y_3 + g(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Внешнее воздействия  $g(t)$  представлено на рис. 3.8а. Нелинейная функция имеет вид:

$$F(y_3) = M y_3 \exp(-y_3^2) \quad (3.10)$$

Параметр  $\alpha = 0.22$  был зафиксирован. Таким образом, по временному ряду в уравнениях 3.9, 3.10 необходимо оценить три параметра:  $c_1 = M$ ,

$c_2 = \omega$ ,  $c_3 = T$ . Рассматривался случай, когда автономная система находится в хаотическом режиме, что соответствует значениям параметров  $c^0 = (12, 1, 3)$ . В качестве наблюдаемых выступали все три переменные модели:  $\eta_k = y_k + \xi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где  $\xi_k$  — добавленный шум измерений.

Согласно предложенному методу уравнения модели (3.4, 3.5) принимают в данном случае вид:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (c_1 y_3 \exp(-y_3^2) - y_1) / c_3 \\ \dot{y}_2 &= c_2^2 (y_1 - y_3) \\ \dot{y}_3 &= y_2 - 0.22 y_3 + y_4 \\ \dot{y}_4 &= \zeta(t) - c_2^2 (y_1 - y_3) + 0.22 (y_2 - 0.22 y_3 + y_4), \end{aligned} \tag{3.11}$$

где  $\zeta(t)$  — вторая численная производная  $\eta_3$ , подсчитанная с использованием сглаживающего полинома.

Реконструировать эту систему по её собственному решению оказалось несложно даже при стартовых догадках для искомым параметров очень далёких от истинных значений, таких как, например  $c^s = 0.1c^0$ ,  $c^s = 2.0c^0$ . В качестве стартовых догадок для неизвестного воздействия использовался тождественный ноль. Присутствие измерительного шума умеренных амплитуд — ко всем трём наблюдаемым был подмешан 1%-ный по среднеквадратичному отклонению нормальный шум — не сказывалось существенно на результатах реконструкции. Исходное и восстановленное воздействия показаны на рис. 3.8b.

### 3.4 Возможные приложения метода

Задаче реконструкции внешнего воздействия и оценки неизвестных параметров системы может быть, как уже обсуждалось, актуальна сама по себе, когда воздействие и/или параметры представляют непосредственную ценность. Однако предложенный метод, вообще говоря, может быть использован также для решения ряда смежных задач.

Одно из возможных приложений — *косвенное измерение* величин, недоступных прямому измерению вследствие дороговизны специализированной

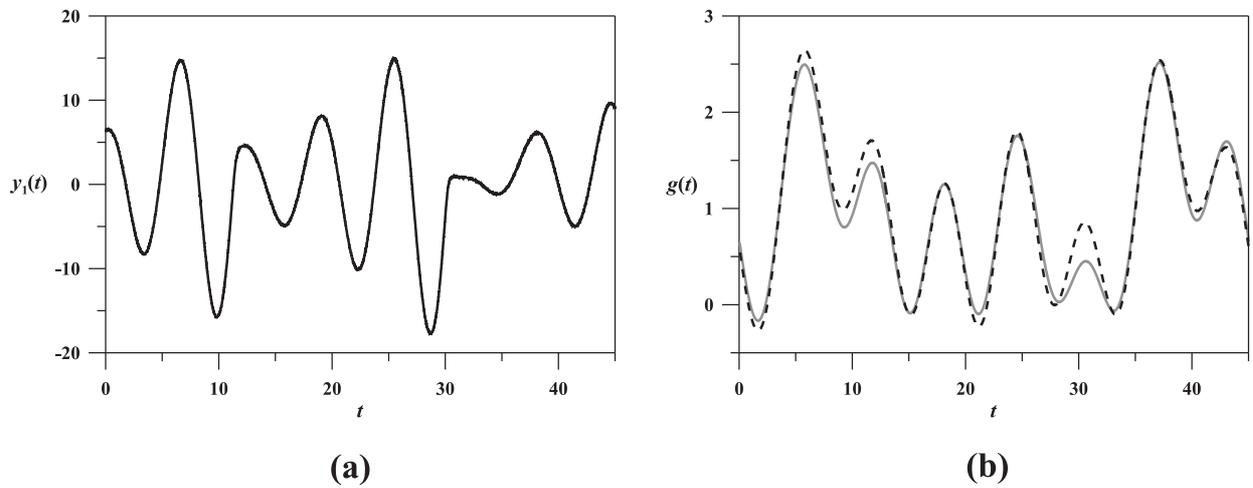


Рис. 3.7: временной ряд наблюдаемой  $\eta_1$  (а) и временные ряды внешнего воздействия: исходного (чёрный пунктир) и восстановленного (серая сплошная) — (б). Реконструкция при параметрах, когда автономная система находилась в хаотическом режиме.

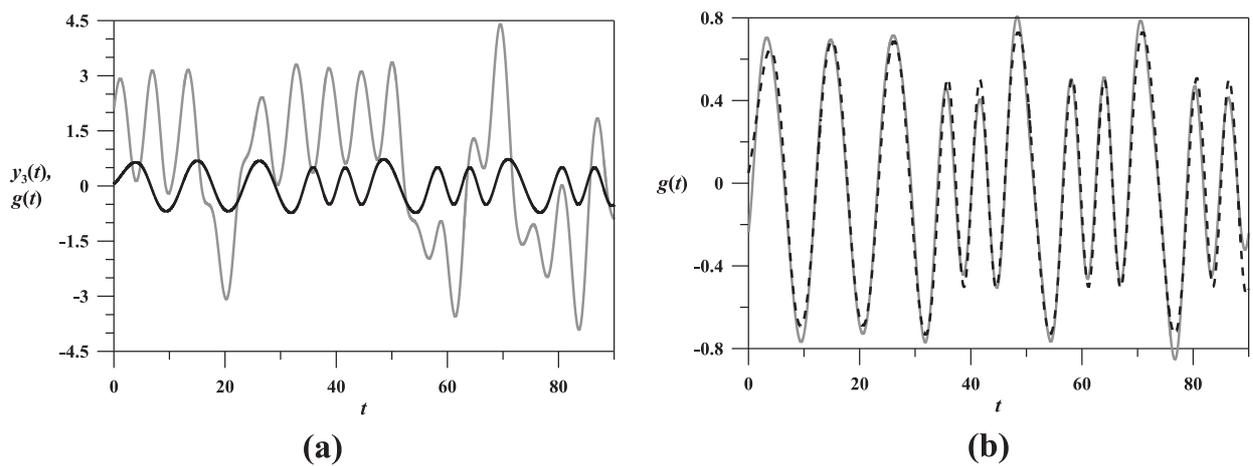


Рис. 3.8: (а) Переменная  $y_3(t)$  — одна из наблюдаемых (серым) и внешнее воздействие (чёрным); (б) исходный сигнал воздействия (чёрная штриховая линия) и восстановленный (серая сплошная).

аппаратуры, высокого уровня шумов или хрупкости самой исследуемой системы, которая может быть разрушена непосредственным вмешательством, что наиболее характерно для биологических систем. В такой ситуации в качестве измерителя выступает объект моделирования, а внешнее воздействие — измеряемый сигнал. Поскольку такой измеритель — объект моделирования — может иметь индивидуальные особенности, которые учитываются в его модели как параметры, возможность одновременно с поиском внешнего воздействия подобрать параметры является очевидным преимуществом метода перед рассмотренным в [32, 33].

Другое потенциальное приложение — *определение наличия связи* (воздействия): если важно выяснить, влияет ли на исследуемую систему некоторая другая система, и примерно известно в какую часть исследуемой системы это воздействие может подаваться. В такой ситуации можно восстановить это воздействие и если оно окажется существенно отличным от нуля, сделать заключение о наличии и направленности воздействия.

Наконец, метод может быть использован для построения системы *скрытой передачи или кодирования информации* либо для приёма сигнала на хаотической несущей.

### 3.4.1 Скрытая передача и кодирование информации

Подробнее рассмотрим этот последний пример. Общая схема выглядит следующим образом: передающее или кодирующее устройство является генератором хаотических колебаний, в который информационный сигнал подаётся в качестве внешнего воздействия. При этом амплитуда информационного сигнала невелика по сравнению с амплитудой собственных колебаний генератора (порядка 0.1–0.02 от неё), а частоты спектра лежат в той же области, что и частоты передаваемого информационного сигнала. Поэтому возможность спектрально разделить несущий и информационный сигналы отсутствует. Принимающей стороне может быть известна структура передающей системы, а параметры — только приблизительно. В такой ситуации затруднительно или вообще невозможно распознавание сигнала

с использованием синхронного хаотического отклика, поскольку такие системы требуют высокой степени идентичности приёмника и передатчика [42].

С другой стороны, в [41] и [42] неоднократно подчёркивалось, что при построении систем связи на хаотической несущей важно добиться высокой идентичности между элементами приёмника и передатчика, без чего корректное выделение информационного сигнала существенно затрудняется. Однако изготовление идентичных нелинейных устройств — трудная практическая задача. Поскольку предлагаемый алгоритм позволяет одновременно с выделением внешнего воздействия оценивать параметры, его в принципе можно использовать, чтобы подстраивать приёмник под параметры конкретного передатчика.

В модельном численном эксперименте в качестве передающей системы использовалась та же система Рёсслера (3.7) при значениях параметров  $\mathbf{c}^0 = (-0.15, 0.2, 10)$ . Она интегрировалась численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом  $h = 0.002$  и интервалом выборки  $\Delta t = 0.01$ . Принимающей стороне были доступны ряды всех трёх переменных. Для реконструкции сигнала воздействия использовался ряд длиной  $N = 9000$  точек, при  $\nu = 1$ ,  $L = 300$ <sup>5</sup>. Стартовые догадки для скрытых переменных задавались в виде тождественного нуля. Стартовые догадки для параметров выбирались из области  $c_i^s \in [0.5c_i^0, 1.5c_i^0]$  случайным образом, всего было проверено 10 различных  $\mathbf{c}^s$ .

Информационный сигнал представлял собою последовательность длинных и коротких импульсов, означающих 1 и 0 соответственно (см. рис. 3.9а). Воздействие подавалось в первое уравнение, а в канале связи передавались все три. К ряду был добавлен нормальный 1%-ный шум, моделирующий помехи в канале передачи. Восстановленный и исходный ряды воздействия показаны на рис. 3.9б. В продемонстрированном примере узкие импульсы соответствуют нулю, широкие (и высокие одновременно) — единице. Зная это, легко прочитать сообщение — 11100100100. Оно было успешно восста-

---

<sup>5</sup>Длина ряда  $N$  определяется длиной полезного сигнала, считалось, что она известна, величины  $\nu$  и  $L$  подбирались.

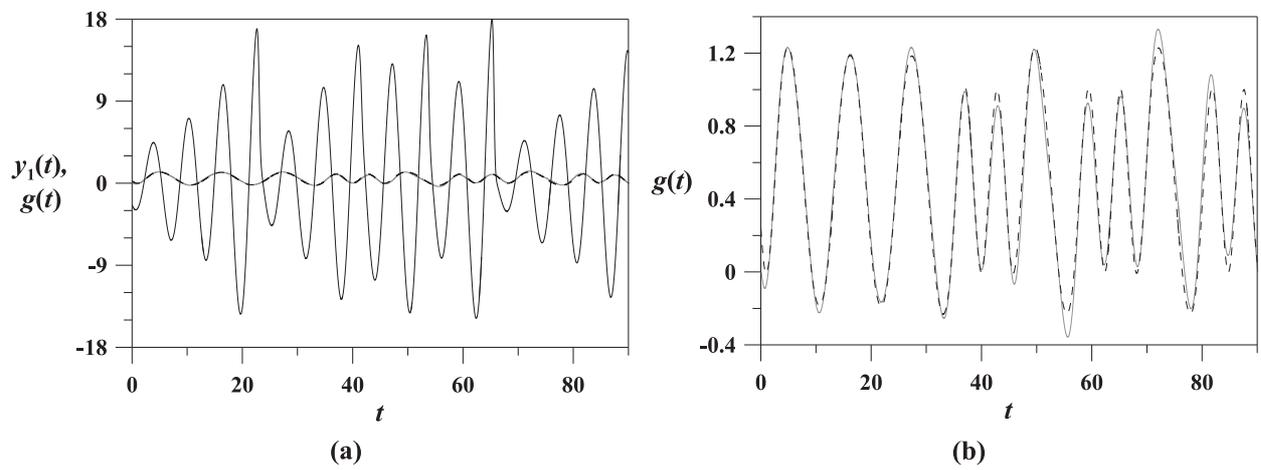


Рис. 3.9: Сигнал хаотической несущей  $y_1(t)$  и информационный сигнал  $g(t)$  — (а), (б) — информационный сигнал: исходный (чёрный пунктир) и выделенный (серая сплошная).

новлено для всех использованных наборов  $\mathbf{c}^s$ .

### 3.5 Выводы

В данной главе предложен метод реконструкции произвольного, в том числе хаотического и шумового, воздействия на динамическую систему. Метод основан на представлении внешнего воздействия в виде дополнительной переменной модели, составлении для этой переменной эволюционного уравнения и использовании одного из алгоритмов работы со скрытыми переменными — метода множественной стрельбы. Предложенный подход позволяет оценить параметры системы и получить сигнал внешнего воздействия, если известна структура объекта моделирования и наблюдаются некоторые (не обязательно все) переменные. В последнем случае восстанавливаются также ряды недостающих переменных. Обязательной является доступность для наблюдения только той переменной, в уравнение для которой входит внешнее воздействие.

Работоспособность предложенного подхода продемонстрирована на примерах реконструкции эталонных систем в различных ситуациях. Показано, что метод успешно работает при различной собственной динамике изучаемой системы: при периодической и хаотической, а также при различных видах воздействия: хаотическом (сигнал детерминированной системы) и шумовом (реализация случайного процесса).

Хотя при использовании метода необходимо численно рассчитывать по ряду вторую производную, что приводит к увеличению влияния шумов, этот негативный эффект удаётся значительно снизить, если применять к исходному ряду фильтрацию, проводить дифференцирование с использованием сглаживающего полинома, а восстановленное воздействие дополнительно фильтровать. Такой подход позволяет получать соответствие между восстановленным и исходным сигналом воздействия даже при 10%-ном шуме.

Дополнительно показано, что предложенный подход может работать и

в ситуации, когда не все переменные исследуемой системы доступны измерению, хотя, конечно, шансы на успех в таком случае заметно снижаются. Однако сложности, возникающие в такой ситуации, являются общими для всех методов работы со скрытыми переменными и их преодолению посвящены отдельные исследования (см. главу 1).

Обсуждается возможность применения предложенного метода для решения ряда задач, таких как:

- *косвенное измерение* величин, недоступных прямому измерению.
- *определение наличия связи* между системами или внешнего воздействия на изучаемую систему.
- *скрытая передача или кодирование информации* либо приём сигнала в системах связи на хаотической несущей.

Последнее приложение демонстрируется на эталонном примере.

Результаты, представленные в третьей главе, опубликованы в работах [96, 97, 98].

## Глава 4

# Приложение методов реконструкции

### 4.1 Введение

Развитие методов нелинейной динамики позволяет по-новому взглянуть на практически важные задачи, решение которых ранее было затруднительно или невозможно. Подходы, основанные на реконструкции моделей по экспериментальным временным рядам также постепенно находят своё приложение. Как уже отмечалось, наибольшего успеха можно достигнуть тогда, когда априорная информация об объекте учитывается наиболее полно. Поэтому большинство известных успешных приложений (см. [11, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 15, 16, 17]) основаны на применении специализированных методик, адаптированных под конкретную задачу. В данной главе рассматриваются три примера, в которых использование разработанных и модифицированных в диссертации подходов: методов работы со скрытыми переменными (главы 1 и 3) и реконструкции неавтономных систем (главы 2, 3) является ключевым в достижении успеха.

В разделе 4.2 методы реконструкции нелинейных неавтономных систем по их экспериментальным временным рядам были использованы нами для разработки способа определения характеристик нелинейных устройств, иллюстрируемого на радиотехническом примере — анализе диодов с p-n переходом. Согласно нему в модель из уравнений Кирхгофа, записанных на основе выбранного эквивалентного представления, закладываются искомые характеристики; на изучаемое устройство подаётся внешнее воздействие,

соответствующее реальному режиму эксплуатации, затем снимаются ряды токов и напряжений, по которым модель реконструируется.

В разделе 4.3 исследуется возможность с помощью методов работы со скрытыми переменными проверки адекватности моделей голосовых связей человека, а также оценки их параметров по экспериментальным данным, что может быть полезно для ранней нетравматической диагностики. Решение задачи затрудняется большим количеством скрытых переменных, большим количеством параметров и сложностью измерительной функции. Чтобы повысить шансы на успех, согласно разработанным в разделе 1.3.9 рекомендациям проводится краткое исследование самой популярной модели.

В разделе 4.4 представлены результаты приложения метода множественной стрельбы (см. п. 1.2.2) для проверки адекватности модели другой биологической системы — функциональной единицы почки (нефрона). Сложности решения поставленной задачи те же, что и в разделе 4.3: из шести переменных модели измеряется только одна — давление в ближней тубуле  $P_t$  (см. п. 4.4.1) при 20 неизвестных параметрах, значения которых также необходимо оценить по экспериментальному ряду. Несмотря на отсутствие полного успеха — удаётся реконструировать модель только по некоторым коротким рядам, соответствующим регулярному режиму, пример имеет важное методическое значение: позволяет оценить возможности и ограничения предложенных методов на конкретной практически важной задаче.

## **4.2 Способ определения характеристик нелинейных устройств**

Суть предложенного способа заключается в следующем. Составляется эквивалентное представление исследуемого устройства таким образом, чтобы в него непосредственно вошла искомая характеристика. Например, для диодов с p-n переходом, а также для некоторых типов транзисторов и других

устройств это может быть схема из параллельно и последовательно соединённых нелинейных и линейных элементов: ёмкостей, сопротивлений, индуктивностей, источников тока или напряжения и т.п. Затем для составленного эквивалентного представления на основе законов Кирхгофа необходимо записать уравнения. Эти уравнения представляют собою модель. Одновременно на исследуемое устройство подаётся воздействие, в точности совпадающее с воздействием в его реальном режиме функционирования. Далее снимаются и оцифровываются ряды протекающих через него токов и напряжений на нём — они выступают в роли экспериментальных временных рядов (наблюдаемых). С помощью методов реконструкции уравнения модели восстанавливаются по этим рядам.

Способ обладает двумя неоспоримыми преимуществами перед ранее известными: он позволяет измерять искомые характеристики непосредственно в режиме эксплуатации, а также получать величины, недоступные прямому измерению.

#### 4.2.1 Выбор объекта и постановка эксперимента

В качестве объекта для апробации подхода были выбраны кремниевые выпрямительные диоды КД202Р, имевшиеся в большом количестве. Как известно, в цепи переменного тока такие элементы демонстрируют сдвиг между током и напряжением, т.е. обладают реактивными свойствами, зависящими от частоты подаваемого сигнала. Кроме того, как активная, так и реактивная компонента их сопротивления зависят от приложенного напряжения [65], таким образом, имеет место нелинейность.

В поставленном нами эксперименте (см. рис. 4.1) с генератора (1) (или нескольких генераторов в случае многочастотного воздействия)<sup>1</sup> через усилитель (2) (использовался стандартный усилитель У7-5) сигнал подавался на цепь, состоящую из регулируемого резистора (3) и изучаемого устройства (4) — в нашем случае диода. С помощью 14-ти разрядного двухканаль-

---

<sup>1</sup>В различных экспериментах использовались различные генераторы, какие — указано в соответствующем разделе.

ного АЦП ADM214-60 (7) с максимальной частотой оцифровки 60 МГц и уровнем собственного шума  $\sim 16$  единиц младшего разряда и операционных усилителей MAX414EPD (6) со скоростью нарастания выходного напряжения 4.6В/мкс, частотой единичного усиления 28 МГц и уровнем шума 2.4нВ/Гц фиксировались временные ряды тока  $I(t)$  через диод (4) и напряжения  $U(t)$  на нём. Резистор  $R_1$  (5) предназначен для регулирования амплитуды входного сигнала на второй вход АЦП, чтобы максимально использовать диапазон последнего. Оцифрованные данные вводились в компьютер (8).

Для тестирования измерительной аппаратуры вместо диода (4) в измерительную схему вставлялись другие элементы (см. рис. 4.2): эталонные резистор (1), конденсатор (2) и параллельно соединённые резистор и конденсатор (3). Модельное уравнение для узла для всех перечисленных вариантов сводится к виду (4.1), причём отсутствия в схеме конденсатора (1) просто приравнивалось к случаю, когда истинное значение  $C_0 = 0$ , а в отсутствие резистора (2) считалось, что модель должна дать коэффициент проводимости  $\frac{1}{R_0} = 0$ .

$$I = \frac{U}{R_0} + C_0 \frac{dU}{dt} \quad (4.1)$$

На четырёх различных эталонных резисторах с сопротивлением 1994 Ом, 4655 Ом, 23310 Ом и 92740 Ом и трёх конденсаторах ёмкостями 500.1 пФ, 957.4 пФ и 50.04 нФ (эти значения примерно соответствуют диапазонам величин сопротивления и ёмкости исследуемого диода в различных режимах) было показано, что ошибка в определении сопротивления составляет не более 1% от его величины, а ёмкости — не более 0.5%.

#### 4.2.2 Выбор эквивалентного представления

Типичные зависимости тока через диод  $I(t)$  и напряжения  $U(t)$  на нём в случае отсутствия смещения и относительно большого по амплитуде гармонического сигнала ЭДС представлены на рис. 4.3.

По форме сигналов очевидно, что колебания носят сильно нелинейный характер, а фазовый портрет демонстрирует наличие реактивной составля-

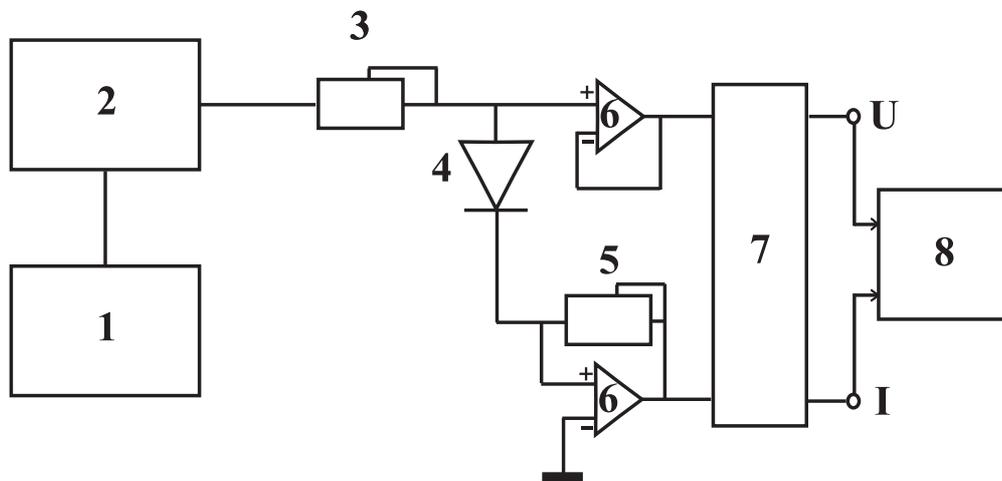


Рис. 4.1: схема экспериментальной установки. Цифрами обозначены: (1) генератор или несколько генераторов, (2) усилитель, (3) регулируемый резистор, (4) исследуемое устройство, (5) резистор  $R_1$  предназначен для регулирования амплитуды входного сигнала на второй вход АЦП, (6) операционные усилители, (7) двухканальный АЦП, (8) компьютер.

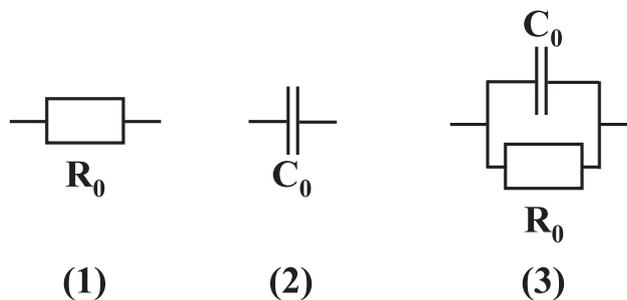
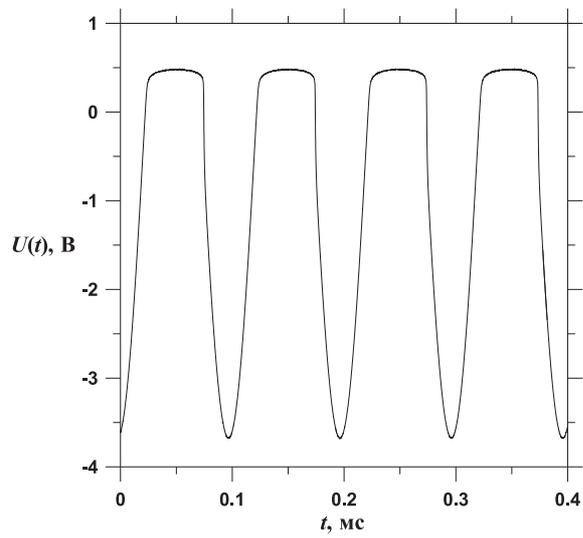
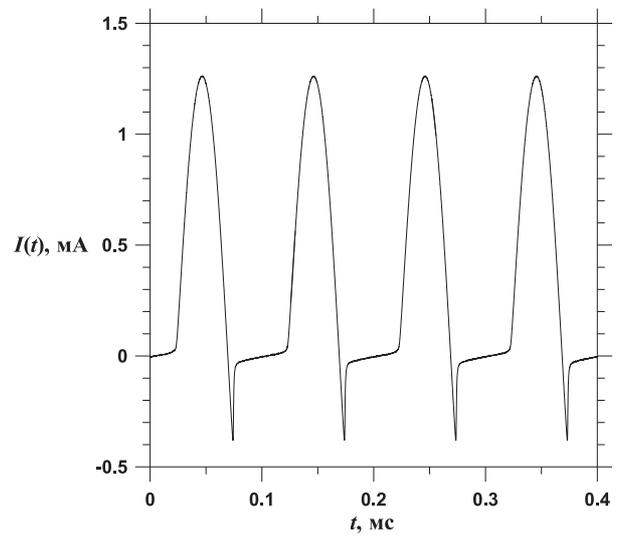


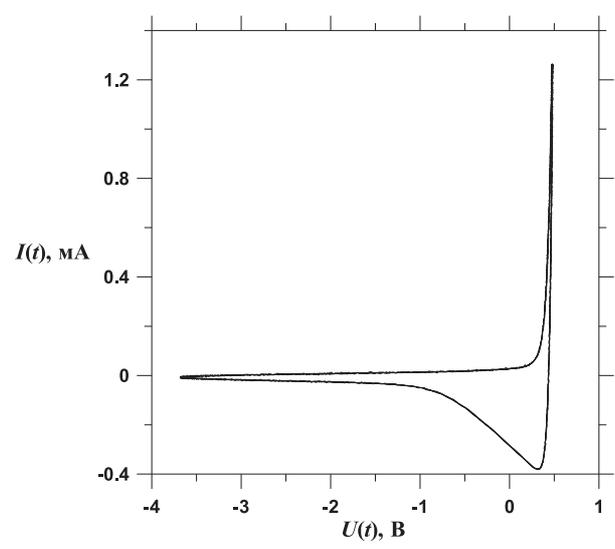
Рис. 4.2: элементы, установленные вместо диода в измерительную схему для тестирования аппаратуры.



(a)



(b)



(c)

Рис. 4.3: зависимости: (а) напряжения на диоде  $U(t)$  и (b) протекающего через него тока  $I(t)$  от времени, а также (с) — тока от напряжения  $I(U)$ . На диод КД202Р воздействовал сигнал ЭДС амплитуды 2.36 В и частоты 10 кГц.

ющей сопротивлению. Поэтому простейшее из известных [65] эквивалентное представление диода в виде нелинейного резистора неадекватно. В качестве основного в данной работе использовалось эквивалентное представление в виде параллельного соединения нелинейных резистора и конденсатора — рис. 4.4а. Это представление, несмотря на свою простоту, успешно применяется на практике [66] и, согласно теории подходит для низкочастотных диодов [65]. Все основные результаты были получены на его основе с помощью перебора различных аппроксимирующих нелинейные сопротивление и ёмкость функций.

Уравнения Кирхгофа для изображённой на рис. 4.1 схемы имеют с учётом этого представления вид:

$$I = -\frac{1}{R}U + \frac{1}{R}E(t), \quad (4.2)$$

$$I = I_{con}(U) + C(U)\frac{dU}{dt} \quad (4.3)$$

где (4.2) — уравнение для всего измерительного контура, (4.3) — уравнение для узла,  $E(t)$  — ЭДС, искомые функции  $I_{con}(U)$  и  $C(U)$  — нелинейная проводимость и ёмкость соответственно.

Рассмотрение более сложного эквивалентного представления, где отдельно учитывается сопротивление базы (см. рис. 4.4b), также проводилось, однако такое представление избыточно для решаемой задачи, что показано в п. 4.2.7.

### 4.2.3 Реконструкция в режиме малых сигналов

Существует множество методов и приборов для измерения вольтфарадных характеристик (см., например, патенты на изобретения [68, 69, 70]), когда на диод подаётся смещение и малый гармонический сигнал. В частности, можно использовать стандартные измерительные устройства E7-8, E7-10, E7-12 и тп. Каждый из них даёт значения ёмкости при любом заданном смещении, но только на одной выбранной частоте, в то время как предлагаемый метод позволяет восстановить вольтамперные и вольтфарадные характеристики при сигнале произвольной формы и частоты. Для

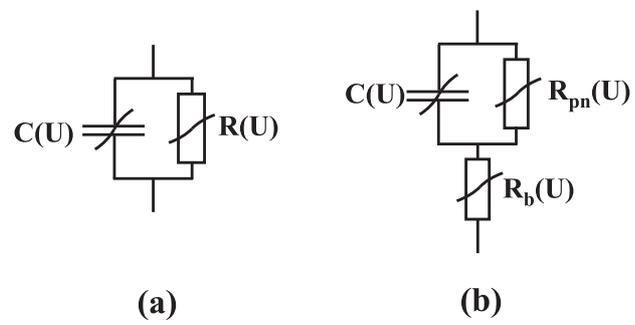


Рис. 4.4: эквивалентные представления полупроводникового диода (см. [65]): (a) в виде параллельного соединения нелинейных сопротивления и ёмкости, (b) с учётом нелинейного сопротивления базы  $R_b(u)$ .

тестирования нашего подхода мы использовали имеющиеся у нас в наличии приборы Е7-8 и Е7-12, работающие на частотах 1кГц и 1МГц соответственно.

На рис. 4.5 приведены вольтфарадные характеристики одного диода из серии КД202Р, измеренные на нескольких частотах предложенным методом, а рядом для сравнения характеристики, измеренные с помощью Е7-8 и Е7-12.

При реконструкции вольтфарадных характеристик в режимах малых амплитуд мы использовали полиномиальную аппроксимацию  $C(U)$  пятого порядка, выбирая для сравнения с показаниями прибора ёмкость при значении напряжения, соответствующем напряжению смещения, которое при больших отрицательных  $U$  почти совпадает с серединой диапазона. Использование полинома пятого порядка было обусловлено тем, что мы не могли в эксперименте добиться очень малых амплитуд внешнего воздействия, так как это приводило к слишком значительному повышению влияния шумов. Поэтому всё-таки исследуемые сигналы были не совсем гармоническими. Реально удалось добиться амплитуд изменения напряжения  $\sim 0.1$  от амплитуды в режиме больших сигналов. Этим, на наш взгляд, в значительной степени обуславливается разница, между показаниями эталонных приборов и результатами реконструкции на частотах 1кГц и 1МГц.

#### **4.2.4 Реконструкция в режиме больших периодических сигналов. Зависимость ёмкости от частоты воздействия**

В режиме больших амплитуд, даже если на диод действует гармоническая ЭДС, вследствие наличия в цепи нелинейных элементов, спектр протекающих токов далёк от одночастотного. Измерение ёмкости в таком режиме возможно только предложенным способом, т.е. на основе моделирования<sup>2</sup>.

Чтобы получить работоспособную модель требуется подобрать аппрок-

---

<sup>2</sup>В качестве ориентира всё же приводятся вольтфарадные характеристики в режимах малых амплитуд, хотя ясно, что они должны существенно отличаться от измеренных.

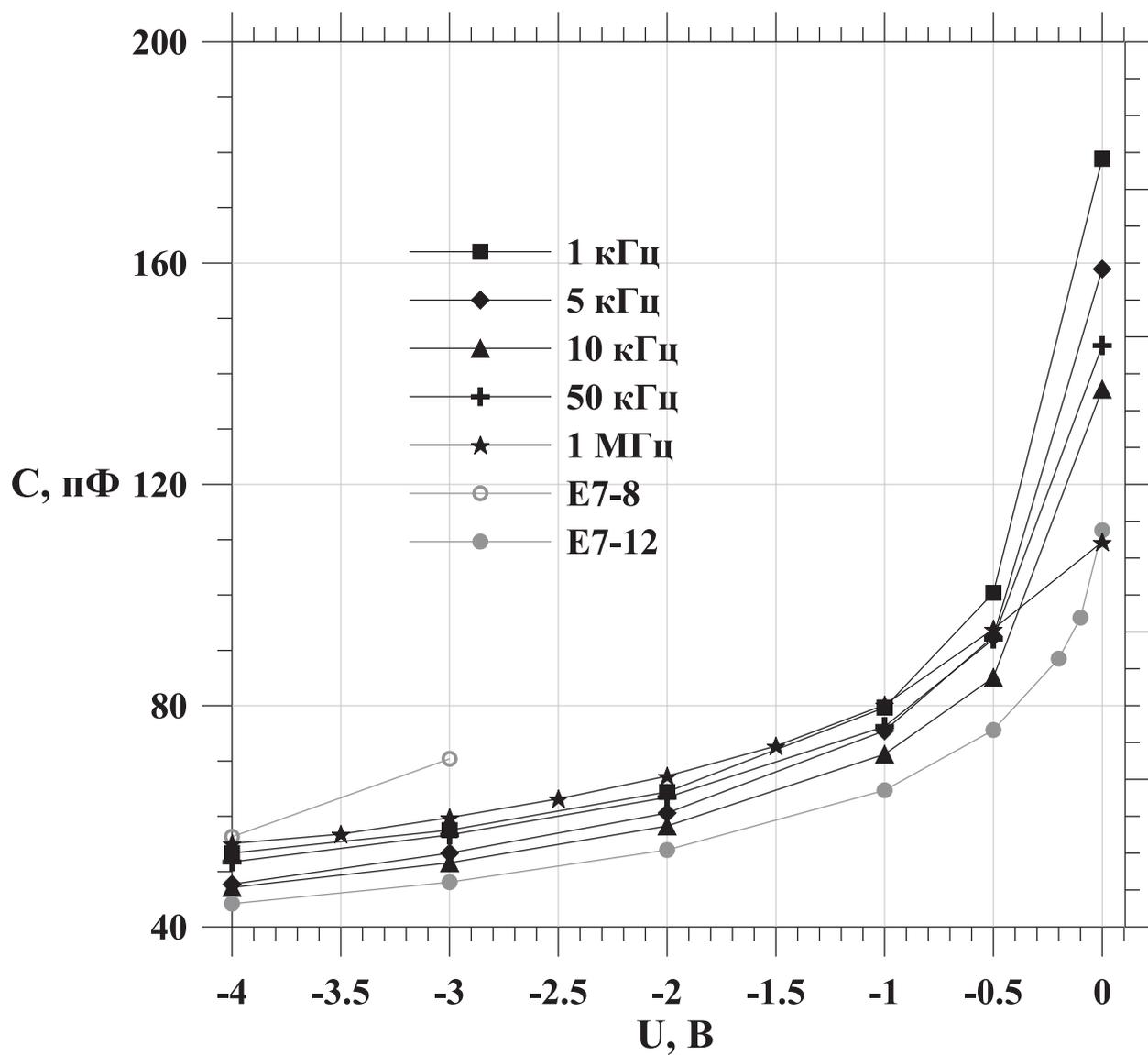


Рис. 4.5: вольтфарадные характеристики диода типа КД202Р, реконструированные предлагаемым методом на частотах 1кГц, 5кГц, 10кГц, 50кГц и 1МГц; и вольтфарадные характеристики, измеренные с помощью приборов: E7-8 на частоте 1кГц и E7-12 на частоте 1МГц.

симирующие функции  $I_{con}(U)$  и  $C(U)$ . Использовались следующие аппроксимации:

\* в локально-линейном виде (диапазон напряжений разбивается на много участков, на каждом из которых используется линейная модель)

\* в виде полиномов:  $I_{con}(U) = \sum_{i=0}^{K_r} a_i U^i$ ,  $C(U) = \sum_{i=0}^{K_c} b_i U^i$

\* проводимость в виде одного полинома  $I_{con}(U) = \sum_{i=0}^{K_r} a_i U^i$ , а ёмкость в виде двух полиномов, один из которых моделирует барьерную ёмкость, а другой — диффузионную:  $C(U) = \sum_{i=0}^{K_c} b_i^{(1)} U^i$ ,  $U \leq 0$  и  $C(U) = \sum_{i=0}^{K_c} b_i^{(2)} U^i$ ,  $U \geq 0$ ;

\* исходя из физических соображений (см. [65, 67]), в виде (4.4) и (4.5) соответственно:

$$I_{con}(U) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{\beta_1 U}, \quad (4.4)$$

$$C(U) = \alpha_3 + \xi(U) \alpha_4 e^{\beta_2 U} + \xi(-U) \alpha_5 |1 + \delta U|^{\beta_3}, \quad (4.5)$$

где  $\xi(U) \alpha_4 e^{\beta_2 U}$  — диффузионная ёмкость, а  $\xi(-U) \alpha_5 |1 + \delta U|^{\beta_3}$  — барьерная, функция  $\xi(U) = \frac{1}{2} (1 + \text{th}(\gamma_1 U + \gamma_2))$  введена для обеспечения гладкости кривой.

В случае полиномиального, кусочно-полиномиального и локально-линейного представлений достаточно было применить линейный метод наименьших квадратов, так как все параметры входят в модель линейно. Для представления в виде (4.4) и (4.5) использовался вариант нелинейного метода наименьших квадратов, предусматривающий решение задачи глобальной оптимизации одним из методов типа Гаусса-Ньютона, поскольку параметры  $\beta_{1,2,3}$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  входят нелинейно. При этом взятые из физических соображений значения коэффициентов  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{e}{kT}$ , где  $e$  — заряд электрона,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура, использовались как стартовые догадки для этих параметров.

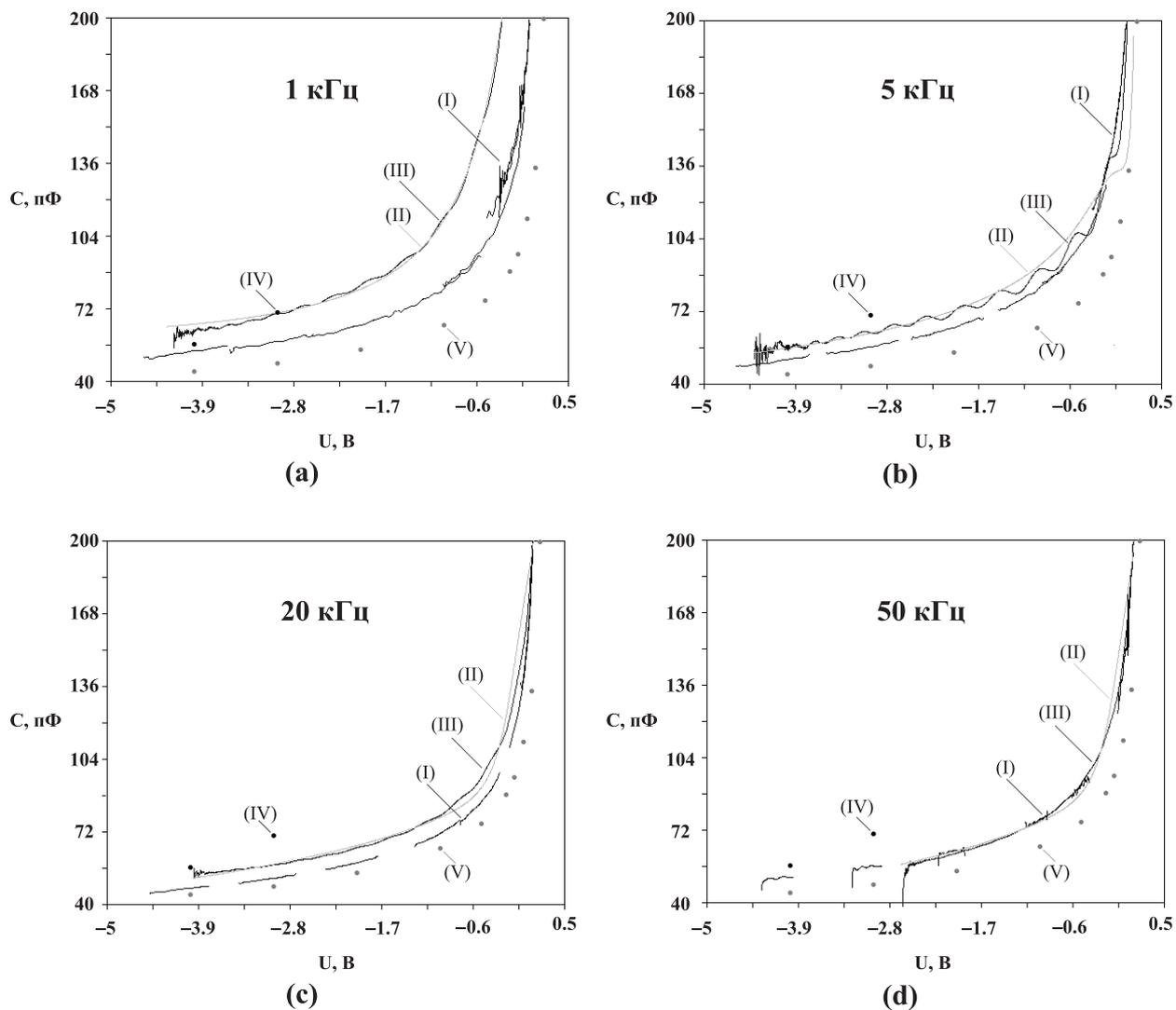


Рис. 4.6: вольтфарадные характеристики, измеренные на четырёх различных частотах как в режиме малых амплитуд (I), так и в режиме больших с использованием аппроксимации в виде (4.4) и (4.5) (в специальном виде) (II), и полиномиальной (III); а также вольтфарадные характеристики, измеренные с помощью приборов E7-8 на 1кГц (IV) и E7-12 на 1МГц (V). Различные графики соответствуют различным частотам воздействия: (a) 1кГц, (b) 5кГц, (c) 20кГц, (d) 50кГц.

На рис. 4.6 приведены вольтфарадные характеристики, измеренные на четырёх различных частотах как в режиме малых амплитуд, так и в режиме больших с использованием аппроксимации в виде (4.4) и (4.5) (в специальном виде), и полиномиальной с полиномом 25-ого порядка. По представленным зависимостям можно судить, что на низких частотах ёмкость диода отличается режимах малых амплитуд больших амплитуд, но с ростом частоты это различие сглаживается. Абсолютное значение ёмкости при этом снижается.

Аппроксимация с помощью формул (4.4, 4.5) имеет три преимущества перед остальными: во-первых, часть параметров обладает явным физическим смыслом, во-вторых, общее количество параметров сравнительно невелико — 9, в-третьих, измеренную ёмкость можно экстраполировать вне области измерений. Однако формулы (4.4) и (4.5) выводятся в приближении сигналов, близких к одночастотным, поэтому их применение оказывается затруднительным с повышением частоты воздействия, так как спектр токов при этом обогащается высокими гармониками. На практике это выражается в росте ошибки аппроксимации с 1.4% для частоты 1кГц до 3.6% для 50кГц, а также в том, что трудно становится подобрать стартовые догадки для нелинейно входящих параметров.

Полиномиальная аппроксимация позволяет более точно подогнать модель по ряду, но за счёт увеличения порядка полиномов. Это приводит к нежелательным численным эффектам, главный из которых — осцилляции в зависимости  $C(U)$ , лишённые физического смысла. Они хорошо видны на рис. 4.6(b) вдоль всей кривой, а на рис. 4.6(a) и (c) — в начале кривой, поскольку на краях диапазона они проявляются всегда больше (см. [3, 56]).

Поэтому для реконструкции вольтфарадных характеристик на частоте 1 МГц (рис. 4.7b) мы использовали два других подхода: кусочно-полиномиальный, когда для аппроксимации проводимости по прежнему используется один полином, а для аппроксимации ёмкости — два, один из которых описывает барьерную (т.е. при  $U \leq 0$ ) ёмкость, а другой — диффузионную (т.е. при  $U \geq 0$ ); а также локально-линейный подход, когда весь

диапазон делится на большое количество эквидистантных промежутков и модель восстанавливается на каждом отдельно с использованием линейной аппроксимации ёмкости и проводимости. С целью сравнения эти же способы аппроксимации были применены и для данных на частоте 1 кГц.

Из рассмотренных примеров видно, что аппроксимирующие функции необходимо выбирать в зависимости от конкретной задачи: если необходимо получить более «физичную» модель с малым числом параметров, можно воспользоваться формулами (4.4, 4.5). Однако подогнать такую модель удаётся далеко не всегда, из-за необходимости решать задачу глобальной оптимизации, а также неполной адекватности модели. Наибольшая точность аппроксимации достигается с помощью локально-линейной модели: погрешность не превышает  $\sim 0.2\%$  от среднеквадратичного размаха колебаний. Однако она имеет максимальное количество коэффициентов, в рассмотренном примере 288 на частоте 1кГц и 152 на частоте 1МГц, когда диапазон изменения  $C(U)$  был меньше. Полиномиальная и кусочно-полиномиальная модели представляет собою компромисс: они имели 40 и 42 параметра соответственно, ошибка аппроксимации составила 1.4% и 0.8%.

#### **4.2.5 Реконструкция в режиме больших периодических сигналов. Зависимость ёмкости от амплитуды воздействия**

В разделах 4.2.3 и 4.2.4 было показано, что вольтфарадная характеристика полупроводниковых диодов зависит от частоты колебаний в цепи, причём она различна в режимах малых гармонических сигналов и в режимах больших амплитуд. В данном разделе рассматривается вопрос о том, каким образом вольтфарадная характеристика зависит от амплитуды сигнала при фиксированной частоте.

Для его решения мы провели реконструкцию моделей в виде (4.2, 4.3) с аппроксимацией зависимостей  $C(U)$  и  $I_{con}(U)$  в локально линейном виде с шагом 0.05В по напряжению при воздействии на двух частотах: 10кГц (рис. 4.8а) и 1МГц (рис. 4.8б). Использовались ряды в 90000 точек, частота дискретизации составляла 10МГц в первом случае (1000 точек на периоде)

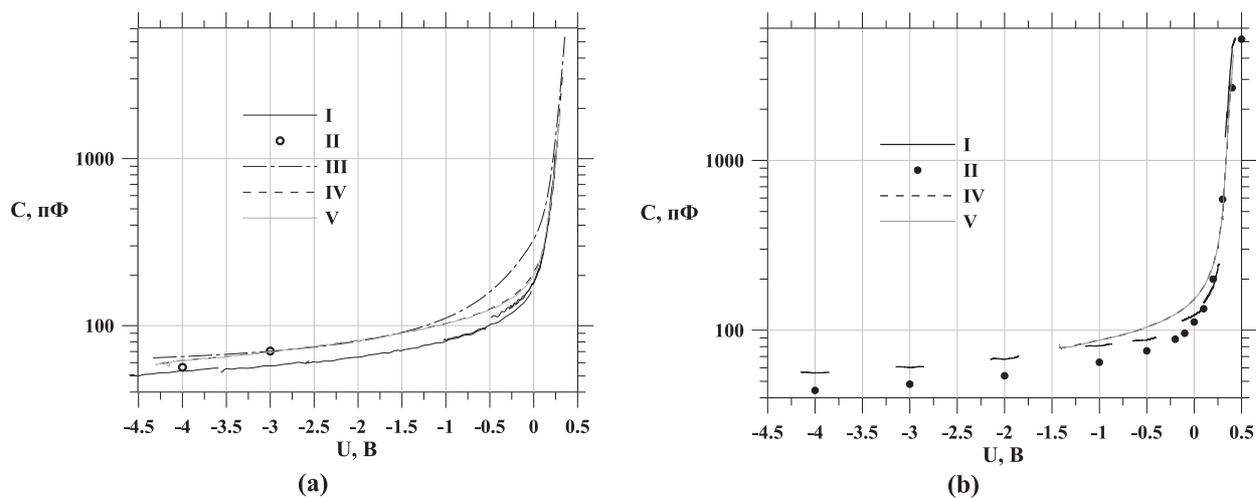


Рис. 4.7: вольтфарадные характеристики, измеренные на частоте 1кГц (а) и 1МГц (b). Различные кривые соответствуют различным режимам и способам аппроксимации  $I_{con}(U)$  и  $C(U)$ : (I) в режиме малых амплитуд с помощью реконструкции, (II) в режиме малых амплитуд с помощью приборов E7-8 для частоты 1кГц и E7-12 для 1МГц, (III) в режиме больших амплитуд в специальном виде (4.4) и (4.5), (IV) в режиме больших амплитуд кусочно-полиномиальная модель, (V) в режиме больших амплитуд локально-линейная модель.

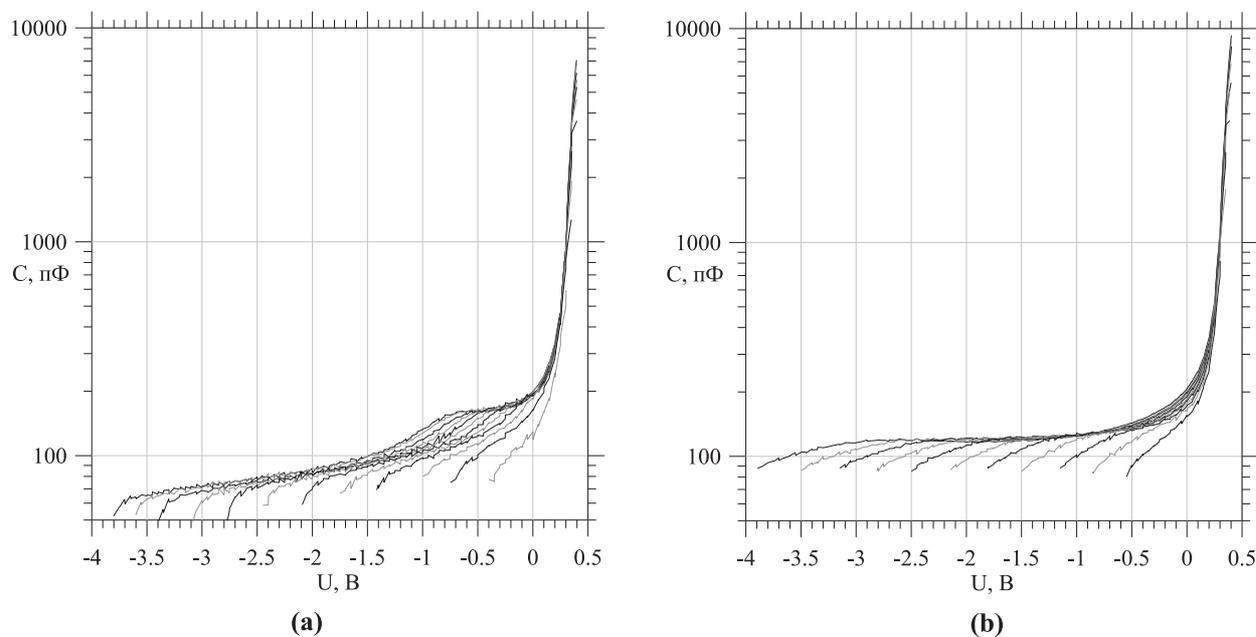


Рис. 4.8: вольтфарадные характеристики исследуемого диода, полученные при воздействии сигналом ЭДС на частоте (а) 10 кГц и на частоте (b) 50 кГц при различных амплитудах воздействия без смещения.

и 50МГц во втором (50 точек на периоде) — чего вполне достаточно для построения модели, так как на каждый диапазон, содержащий 4 параметра приходилось не менее 100 точек. Чтобы исключить влияние краевых эффектов, по два диапазона (т.е. отрезки по 0.1В) с обоих краёв не были включены в рассмотрение.

Из представленных графиков видно, что имеет место существенная зависимость ёмкости от амплитуды воздействия, разница составляет до полутора раз, причём с увеличением амплитуды ёмкость возрастает. Данный эффект не может быть уловлен традиционными способами измерений, что подчёркивает важность предложенного алгоритма.

#### **4.2.6 Использование метода множественной стрельбы при реконструкции характеристик диода**

Хотя при реконструкции модели (4.2, 4.3) проблема скрытых переменных в явном виде не стоит, на высоких частотах из-за ограниченности аппаратных возможностей АЦП (максимальная частота оцифровки — 50МГц) и операционных усилителей схемы (верхняя граница полосы пропускания — 260МГц) количество точек на характерном периоде колебаний становится слишком малым, чтобы достаточно точно рассчитывать численную производную  $\frac{dU}{dt}$ , входящую в уравнение (4.3) при наличии измерительных шумов. Поэтому методы множественной стрельбы могут быть полезны в и данном случае.

Чтобы проверить их работоспособность, была проведена реконструкция на частоте 1МГц, когда модель ещё можно построить традиционным способом, но количество точек на период уже невелико: не более 50. Для простоты был выбран режим небольших амплитуд, было снято 11 рядов при различных смещениях. На рис. 4.9 приведены результаты реконструкции: кривые 1 соответствуют моделям, построенным с помощью метода Бока по ряду длиной  $N = 1500$  точек при длине фрагмента  $L = 300$  (эти параметры оказались оптимальными, подробнее о выборе  $L$  и  $N$  см. раздел 1.3 данной работы), а кривые 2 — моделям, построенным традици-

онным способом по ряду той же длины. Дополнительно было также проверено, что увеличение длины ряда до 90000 точек практически не влияет на результат реконструкции. В обоих случаях использовалась полиномиальная аппроксимация пятого порядка для  $C(U)$  и третьего порядка для  $I_{con}(u)$ .

Основная сложность при применении метода множественной стрельбы в данном случае: задать стартовые догадки для параметров, поскольку коэффициенты полинома не имеют явного физического смысла и выбрать их из общих соображений не удаётся. Тем не менее перебором удалось подобрать такие стартовые догадки, которые обеспечили сходимость для всех 11 рассмотренных рядов, в то время как итоговые оценки параметров отличались в несколько раз. Это показывает, что радиус стопроцентной сходимости  $r_{100}$  (подробнее см. п. 1.3.1) достаточно велик и составляет в рассмотренном случае не менее 2.0.

Анализ и сопоставление пар кривых на рис. 4.9 показывают, что результаты, полученные с помощью метода множественной стрельбы в среднем не более чем на 5% отличаются от полученных без его использования, что позволяет признать перспективность его применения для реконструкции нелинейных характеристик при больших частотах, когда другие алгоритмы реконструкции станут неработоспособны из-за слишком малой частоты дискретизации.

#### 4.2.7 Учёт сопротивления базы

Эквивалентное представление с учётом сопротивления базы (см. рис. 4.4b) даёт следующие уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned} U &= U_{pn} + U_b, \\ I &= I_{con}(U_{pn}) + C(U_{pn}) \frac{dU_{pn}}{dt}, \\ I &= -\frac{1}{R}U + \frac{1}{R}E(t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

где  $U_{pn}$  — падение напряжения на р-п переходе,  $U_b$  — падение напряжения на базе. В отличие от подробно рассмотренного представления без учета базы, в данном случае для непосредственного применения методов

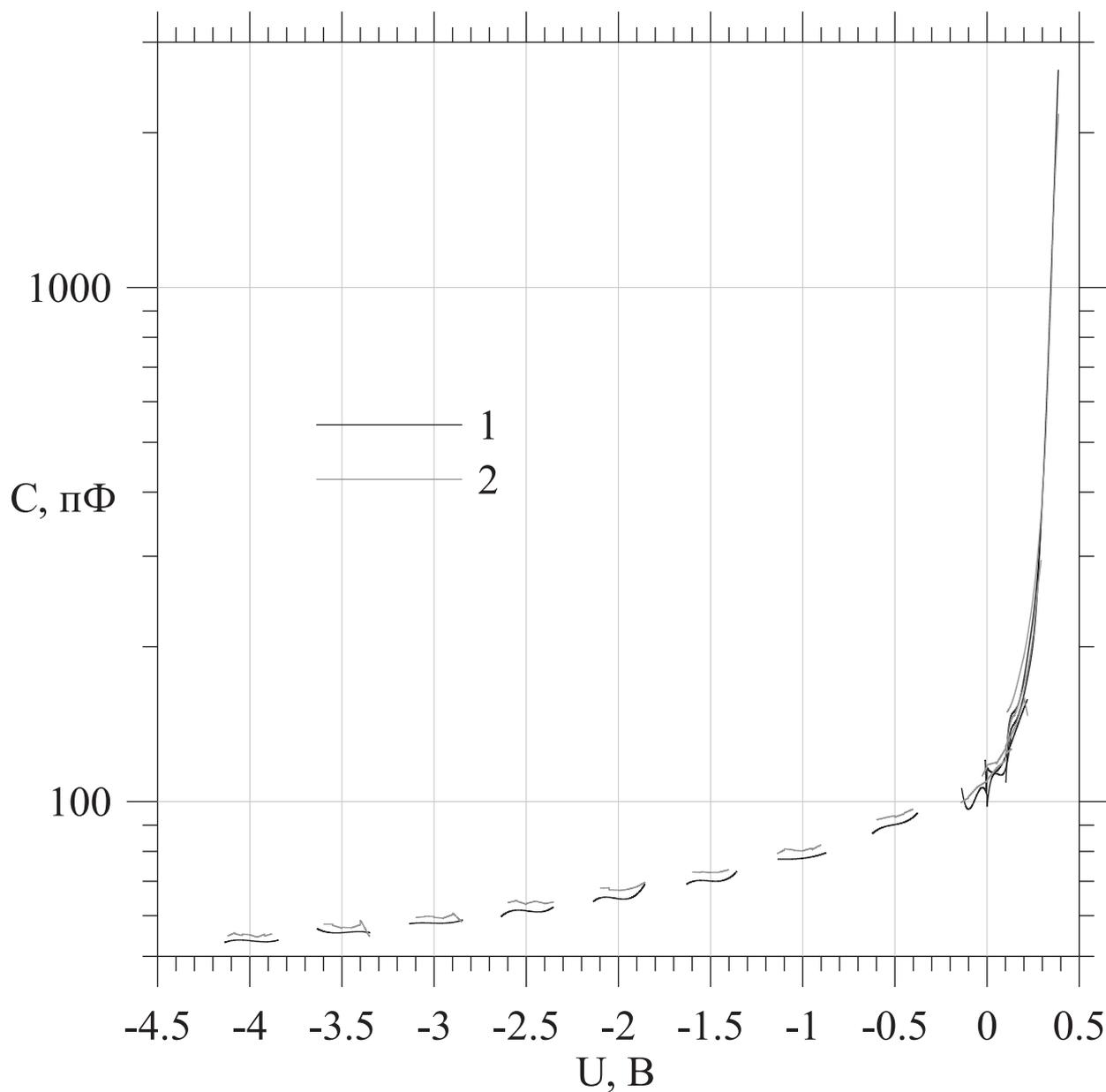


Рис. 4.9: вольтфарадные характеристики диода типа КД202Р под воздействием ЭДС с частотой 1 МГц и малой амплитудой, реконструированные 1 — с помощью полиномиальной аппроксимации методом множественной стрельбы и 2 — с помощью аппроксимации в локально-линейном виде с подгонкою параметров линейным методом наименьших квадратов.

реконструкции не хватает рядов переменных, так как величина  $U_{pn}$  не может быть измерена ни прямо, ни косвенно, для чего пришлось бы залезть «внутрь» диода, что технически невозможно.

Однако можно воспользоваться физическими свойствами конкретного класса рассматриваемых объектов, используя приближение тонкой базы [65]. В этом приближении падение напряжения на базе можно представить в виде:

$$U_b = \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{n_i}{n_{n0}} \right) + U_{pn}, \quad (4.7)$$

где  $n_i$  — собственная концентрация электронов,  $n_{n0}$  — концентрация электронов примеси. Отсюда, используя (4.6), получаем выражение для  $U_{pn}$  через  $U$ :

$$U_{pn} = \frac{U}{2} + \frac{kT}{e} \ln \left( \frac{n_{n0}}{n_i} \right) \quad (4.8)$$

При данной температуре величины  $n_i$  и  $n_{n0}$  постоянны, поэтому уравнения с учётом тонкой базы сводятся к уравнениям (4.2, 4.3) для эквивалентного представления без учёта базы с точностью до замены параметров  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_l$  в случае использования аппроксимации в виде (4.4, 4.5), а в случае применения полиномиальной, кусочно-полиномиальной и локально-линейной аппроксимации этот подход также приводит только к перенормировке коэффициентов. Таким образом, на практике нет разницы, какое эквивалентное представление заложено: без учёта сопротивления базы или с учётом тонкой базы.

#### 4.2.8 Разбраковка устройств

Для некоторых практических задач необходимо бывает подобрать два или более устройств с максимально близкими характеристиками. Так, например, для решения задачи передачи и приёма сигнала на хаотической несущей передатчик и приёмник должны обладать с высокой степенью точности одинаковыми свойствами, иначе их синхронизация будет невозможна и отделить информационный сигнал от несущей не удастся (см. [41, 42]). Аналогичные высокие требования предъявляются в задачах

кодирования и декодирования данных. Однако однотипные радиотехнические устройства такие, как, например, диоды с р-п переходом, имеют большой разброс по характеристикам даже внутри одной заводской упаковки.

Предложенный метод может быть полезен в такой ситуации, поскольку на его основе можно проводить количественное сопоставление по любым нелинейным характеристикам, которые закладываются в эквивалентное представление, причём в реальном режиме эксплуатации. Для примера мы реконструировали вольтфарадные характеристики 44-ёх диодов типа КД202Р в режиме больших сигналов, привели сопоставление каждого диода с каждым, используя описанную в следующем абзаце меру неидентичности (4.9) и графическое представление результатов на плоскости (рис. 4.10). Каждая клетка на рисунке соответствует сравнению двух диодов — их номера указаны на осях координат. Чем сильнее различаются характеристики диодов, тем светлее окраска клетки. Клетки на диагонали рисунка соответствуют сравнению диода с сами собой, поэтому они наиболее темные.

Интегральная мера  $\Phi$  неидентичности характеристик  $(C_i(U), C_j(U))$ <sup>3</sup> для  $M$  диодов с номерами  $i$  и  $j$  в интервале от  $U_1$  до  $U_2$  представляет собою нормированную на среднеквадратичное отклонение среднеквадратичную разницу:

$$\begin{aligned} \Phi(C_i(U), C_j(U)) &= \\ &= \frac{p_c}{\sqrt{(U_2 - U_1) D(C_{med})}} \left( \int_{U_1}^{U_2} (C_i(U) - C_j(U))^2 dU \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $M$  — число диодов в выборке, а дисперсия ёмкости  $D(C_{med})$  определя-

---

<sup>3</sup>Мы проводили сравнение по вольтфарадной характеристике  $C(U)$ , но аналогично можно любую нелинейную функцию, заложенную в модель. Выбор зависит от цели использования рассматриваемого устройства.

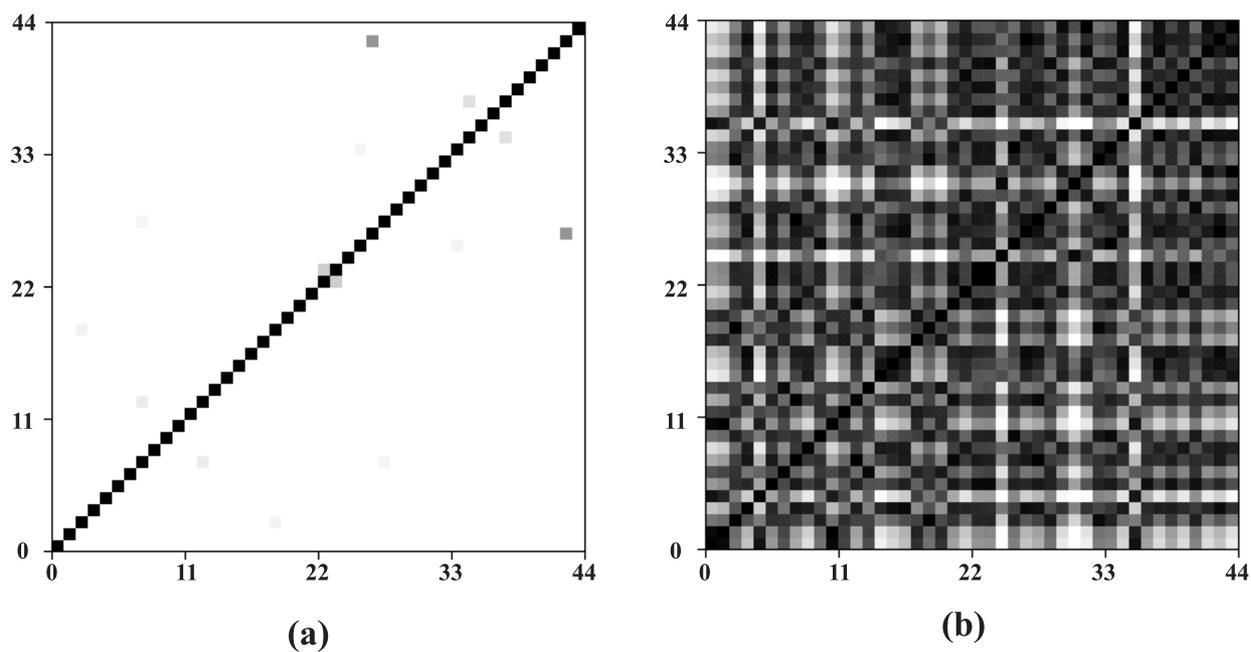


Рис. 4.10: карта разбраковки диодов по признаку сходства вольтфарадных характеристик. Различными оттенками серого показана величина интегральной характеристики различия диодов  $\Phi$ . Чем темнее цвет, тем больше похожи два данных диода. случаи (a) и (b) отличаются величиной контраста, определяемого коэффициентом  $p_c$ : для (a)  $p_c = 0.002$ , для (b)  $p_c = 0.05$ .

ется по формулам:

$$\begin{aligned}
 D(C_{med}) &= \frac{1}{U_2 - U_1} \int_{U_1}^{U_2} (C_{med}(W) - \langle C_{med} \rangle)^2 dW, \\
 C_{med}(U) &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C_k(U), \\
 \langle C_{med} \rangle &= \frac{1}{U_2 - U_1} \int_{U_1}^{U_2} C_{med}(W) dW
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

где  $C_{med}(U)$  — усреднённая вольтфарадная характеристика  $M$  диодов, а  $\langle C_{med} \rangle$  — среднее от неё.

Из приведённой диаграмма видно, что наиболее похожими являются диоды №27 и №43. Можно найти также ещё несколько пар, например, №23 и №24.

### 4.3 Реконструкция моделей голосовых связок

Голосовой аппарат человека представляет собой сложный ансамбль автоколебательных и пассивных фильтрующих элементов, взаимодействующих между собой и контролируемых нервной системой. Анализ механизмов его функционирования вызывает интерес как в фундаментальном плане, так и для решения проблем медицинской диагностики, создания воспроизводящих звуки устройств, криминалистики и т.д. Большинство существующих на данный момент моделей голосовых связок базируются на миоэластической теории звукообразования (фонации), впервые систематически изложенной на языке акустической физики в [71]. Эта теория состоит в том, что базовая частота звука генерируется голосовыми связками, при этом важную роль играют как упругие свойства самих связок, так и эффект Бернулли для воздуха в щели. Дальнейшее формирование звука осуществляется путём его модуляции в естественных резонаторах, в качестве которых выступают ротовая и носовая полости<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>В работе [72] показано, что эти резонаторы при определённых условиях являются активными, т.е. могут не только фильтровать проходящий сигнал, но и выборочно усиливать его на определённых

### 4.3.1 Механические модели голосовых связок

#### Одномассовая модель

Первая механическая модель голосовых связок была предложена в работе [44]. Каждая связка моделируется грузом массы  $m$  на пружине жёсткостью  $k$  с демпфером  $r$ , между которыми продувается воздух, система схематически изображена на рис. 4.11. Обе связки считаются абсолютно симметричными и одинаковыми, рассматривается полностью синхронный режим поведения, поэтому вся система описывается одним ОДУ второго порядка (4.11):

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = dl_g P_g(x), \quad (4.11)$$

где  $d$  и  $l_g$  суть длина и ширина голосовой связки,  $P_g(x)$  — среднее давление в голосовой щели, зависящее от величины отклонения бруска от положения равновесия. Такая модель голосовой связки носит название *одномассовой* модели.  $P_g(x)$  — единственная нелинейная функция, обуславливающая всю динамику.

Подробному анализу одномассовой модели, а точнее, её модификации, когда учитываются колебания слизистой и в выражение для  $P_g$  входит не только координата  $x$ , но и скорость  $\dot{x}$ , посвящена работа [73]. Уравнение (4.11) в этой работе сводится к виду:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = dl_g \frac{2\tau P_s \dot{x}}{x_0 + x + \tau \dot{x}}, \quad (4.12)$$

где  $\tau$  — время прохождения воздухом голосовой щели. Эта модель имеет фазовое пространство из устойчивого фокуса, неустойчивого цикла и разбегающихся траекторий вне этого цикла. Ограничение колебаний из-за смыкания связок и других нелинейных эффектов не учтено. Она иногда используется для теоретического анализа гистерезиса порога генерации по параметру  $P_s$ . Хотя генерация периодического сигнала ею не описывается, порогу соответствует приобретение устойчивости центральным фокусом и возникновение неустойчивого цикла (субкритическая бифуркацией Андронова-Хопфа).

---

частотах.

В работе [74] рассматривается влияние голосового тракта на процесс звукообразования в рамках одномассовой модели. В работах [75, 76] авторы вводят в модель дополнительное уравнение первого порядка для скорости потока  $U_g$  воздуха через голосовую щель, в результате чего появляется возможность более сложной динамики.

### Двухмассовая модель

Одномассовая модель имеет множество недостатков, хотя её простота и позволяет получить некоторые интересные результаты аналитически, как это сделано, в частности, в [73] и [75]. Однако главным является то, что одномассовая модель не отражает ни в какой мере структуру голосовых связок, состоящих из двух слоёв: *тела* и *слизистой* и сужающихся к гортани. Поэтому наибольшее признание получила двухмассовая модель (см. [45]), схема которой представлена на рис. 4.12а.

Уравнения двухмассовой модели без учёта влияния голосового тракта имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{1}{m_1} (-r_1 y_1 - k_1(x_1) - k_c(x_1 - x_2) + F_1) \\
 \dot{x}_2 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} (-r_2 y_2 - k_2(x_2) - k_c(x_2 - x_1) + F_2) \\
 \dot{U}_g &= \frac{1}{L_{g1} + L_{g2}} (P_s - (R_{k1} + R_{k2}) U_g |U_g| - (E_{r1} + E_{r2}) U_g),
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

где введён ряд обозначений.  $A_{g1}$  и  $A_{g2}$  — площади отверстия голосовой щели между первой и второй массами соответственно,  $A_{g01}$  и  $A_{g02}$  — площади в невозмущённом состоянии, когда  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ ;  $l_g$  — поперечная ширина голосовой щели, таким образом  $A_{g1} = A_{g01} + 2l_g x_1$  и  $A_{g2} = A_{g02} + 2l_g x_2$ ;  $d_1$  и  $d_2$  — длины масс;  $A_1$  — эффективная входная площадь на входе из голосовой щели в первый резонатор.

Учтены нелинейные свойства пружин:  $k_{1,2} = \kappa_{1,2} x_{1,2} (1 + \eta_{1,2} x_{1,2}^2)$ ,  $k_c$  — коэффициент упругости пружины, связывающей грузы. При этом в случае смыкания, т. е. когда  $x_{1,2} < -\frac{A_{g01,2}}{2l_g}$ , функция упругости изменяется и

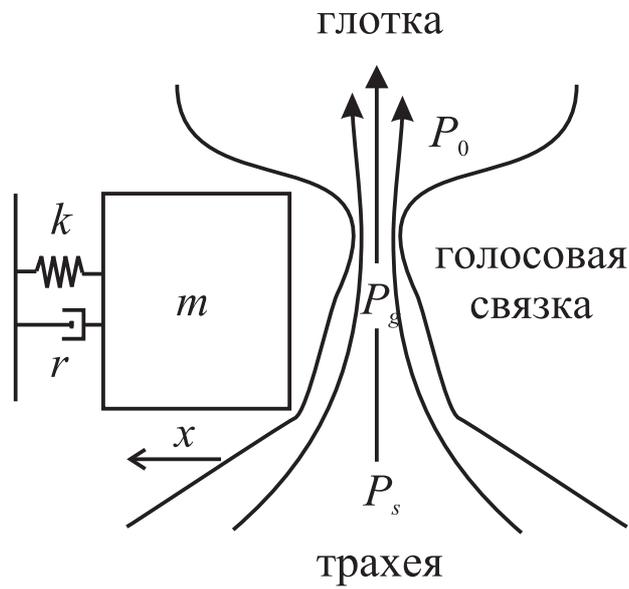


Рис. 4.11: Схема одномассовой модели голосовых связок.

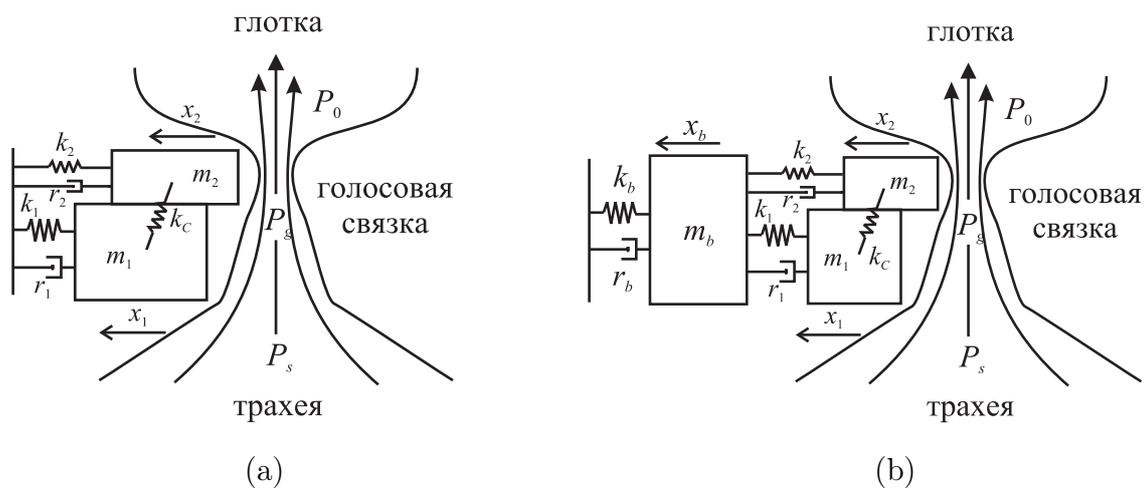


Рис. 4.12: Схемы двухмассовой (а) и трёхмассовой (б) моделей голосовых связок.

принимает вид (4.14):

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \kappa_{1,2} x_{1,2} (1 + \eta_{1,2} x_{1,2}^2) + \\ &+ h_{1,2} x_{1,2} (1 + \eta_{h1,2} x_{1,2}^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $h_{1,2}$  и  $\eta_{h1,2}$  — дополнительные линейные и нелинейные коэффициенты жёсткости, отвечающие за силы упругости, возникающие от столкновения масс.

Параметры диссипации имеют вид:  $r_{1,2} = \zeta_{1,2} \sqrt{\frac{m_{1,2}}{k_{1,2}}}$ , когда нет смыкания и  $r_{1,2} = \zeta_{h1,2} \sqrt{\frac{m_{1,2}}{k_{1,2}}}$  при смыкании соответственно первой или второй пары грузов;  $\zeta_{1,2}$  и  $\zeta_{h1,2}$  — коэффициенты вязкости. Также введены также следующие гидродинамические параметры:

$$\begin{aligned} R_{k1} &= \frac{0.19\rho}{A_{g1}^2}, & R_{k2} &= \frac{\rho\left(\frac{1}{2} - \frac{A_{g2}}{A_1}\right)}{A_{g2}^2} \\ L_{g1} &= \frac{d_1\rho}{A_{g1}}, & L_{g2} &= \frac{d_2\rho}{A_{g2}} \\ E_{r1} &= 12\nu \frac{l_g^2 d_1}{A_{g1}^3}, & E_{r2} &= 12\nu \frac{l_g^2 d_2}{A_{g2}^3}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $\rho$  — плотность, а  $\nu$  — вязкость воздуха.

Силы  $F_{1,2}$ , действующие на грузы со стороны воздуха в голосовой щели определяются давлением на первую  $P_{m1}$  и вторую  $P_{m2}$  массы, выражаемыми по формулам:

$$\begin{aligned} P_{m1} &= P_s - \frac{1}{2} \left( 1.37 \left( \frac{U_g}{A_{g1}} \right)^2 - \left( E_{r1} U_g + L_{g1} \dot{U}_g \right) \right) \\ P_{m2} &= P_{m1} - \frac{1}{2} \left( U_g (E_{r1} + E_{r2}) + \right. \\ &\quad \left. + (L_{g1} + L_{g2}) \dot{U}_g - \rho U_g^2 \left( \frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

причём все давления отсчитываются от атмосферного (т. е. если, скажем, давление на первый груз  $P_{m1}$  равно атмосферному,  $P_{m1} = 0$ ). Наконец, сами силы  $F_{1,2}$  зависят от того, сомкнуты голосовые связки или нет, и выражаются через  $P_{m1,2}$  по формуле (4.17):

$$\begin{aligned} A_{g1} > 0, A_{g2} > 0 : & \quad F_1 = P_{m1} d_1 l_g, \quad F_2 = P_{m2} d_2 l_g \\ A_{g1} < 0, A_{g2} > 0 : & \quad F_1 = P_s d_1 l_g, \quad F_2 = 0 \\ A_{g1} > 0, A_{g2} < 0 : & \quad F_1 = P_s d_1 l_g, \quad F_2 = P_s d_2 l_g \\ A_{g1} < 0, A_{g2} < 0 : & \quad F_1 = P_s d_1 l_g, \quad F_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Наиболее подробное аналитическое исследование модели (4.13–4.17) при некоторых упрощениях проведено в работе [77], где найдены положения равновесия, некоторые бифуркации и определены области колебаний. Точкам равновесия и предельным циклам посвящена работа [78], там же, а также в [79] исследуется возможность наличия хаотических режимов в этой модели с некоторыми модификациями. Однако полное исследование системы (4.13–4.17) и тем более системы интегро-дифференциальных уравнений, получаемых при учёте влияния голосового тракта (см. [45]) на настоящий момент отсутствует. Причина этого — сложность модели (4.13–4.17), содержащей 5 ОДУ со сложными нелинейными функциями и 24 параметра.

### Трёхмассовая модель

Несмотря на то, что двухмассовая модель в целом способна передать геометрию голосовой щели, она слабо пригодна для учёта структуры самой связки, состоящей из достаточно толстого *тела* и тонкой подвижной слизистой, способных двигаться относительно друг друга. Попытка учесть продольные движения в рамках двухмассовой модели сделана в [80], где грузам позволено совершать колебания не только поперёк, но и вдоль голосовой щели.

Однако более основательный подход к описанию структуры связки возможен только в рамках трёхмассовой модели [81]. Два груза устроены точно также, как и для двухмассовой модели, но крепятся они не к неподвижному основанию, а к третьему грузу, масса которого  $m_b$  существенно больше масс двух других —  $m_{1,2}$  (см. рис. 4.12b).

Получаемая модель ещё сложнее, чем (4.13–4.17) и, хотя в [82] показано, что с точки зрения физики протекающих процессов она существенно лучше аппроксимирует реальную ситуацию, чем двухмассовая модель, её использование, а тем более исследование, столь затруднительно, что кроме самих авторов работ [81, 82] она никем не применялась.

В работе [83] авторами предложена ещё более сложная — десятимассовая модель связок, весьма подробно моделирующая волну колебаний сли-

зистой.

### 4.3.2 Исследование духмассовой модели

Как уже подчёркивалось в п. 1.3.9, перед тем, как приступить к реконструкции какой-либо системы по временным рядам, следует по возможности изучить эту систему или, по крайней мере, интересующие нас режимы поведения. На рис. 4.13 представлены временные реализации всех пяти переменных модели:  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  и  $U_g$ . Параметры выбирались с учётом рекомендаций работы [45] и соответствуют одному из типичных режимов. Использовались следующие значения:  $m_1 = 0.125$ ,  $m_2 = 0.025$ ,  $l_g = 1.4$ ,  $d_1 = 0.25$ ,  $d_2 = 0.05$ ,  $A_{g01} = A_{g02} = 0.056$ ,  $A_1 = 0.168$ ,  $k_c = 25 \cdot 10^3$ ,  $k_1 = 80 \cdot 10^3$ ,  $k_2 = 8 \cdot 10^3$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 100$ ,  $h_{1,2} = 3k_{1,2}$ ,  $\eta_{h1} = \eta_{h2} = 500$ ,  $\zeta_1 = 0.5 \cdot 10^4$ ,  $\zeta_2 = 2.2 \cdot 10^4$ ,  $\zeta_{h1} = 0.35 \cdot 10^5$ ,  $\zeta_{h2} = 10^5$ ,  $\rho = 1.14 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 18.2466 \cdot 10^{-5}$ ,  $P_s = 7.84 \cdot 10^3$ . Система (4.13–4.17) решалась методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с шагом  $10^{-8}$  при интервале выборки  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ . Все величины приведены в системе СГС, так что 20 отсчётов соответствуют 1 мс.

В работах [45, 77] и др. часто упоминается, что наиболее существенными параметрами из физиологических соображений являются величина подглоточного давления  $P_s$ , а также величины линейных жёсткостей  $\kappa_{1,2}$ , масс  $m_{1,2}$  и параметров диссипации  $\zeta_{1,2}$  пружин. На рис. 4.14 приведено бифуркационное дерево при вариации параметра  $P_s$ . Видно, что в системе при ряде значений  $P_s$  в том числе и в области, близкой к  $P_s = 760 \text{ Па}^5$  имеется мультистабильность.

Эксперименты с изменяющимися  $\kappa_{1,2}$  и  $m_{1,2}$  показали, что эти параметры в первую очередь влияют на частоту колебаний, причём главным образом в составе комбинации  $\sqrt{\frac{\kappa_i}{m_i}}$ ,  $i = 1, 2$ . Параметры диссипации  $\zeta_{1,2}$  оказывают основное влияние на амплитуду колебаний, а также на устойчивость колебательного режима, разрушающегося при слишком больших или слишком малых значениях.

---

<sup>5</sup>Значение  $P_s = 7600 \text{ дин/см}^2$  использовалось в [45] как основное, но, поскольку при нём, как показано на рис. 4.14, система мультистабильна, мы предпочли близкое значение  $P_s = 7.84 \cdot 10^3 \text{ дин/см}^2$ .

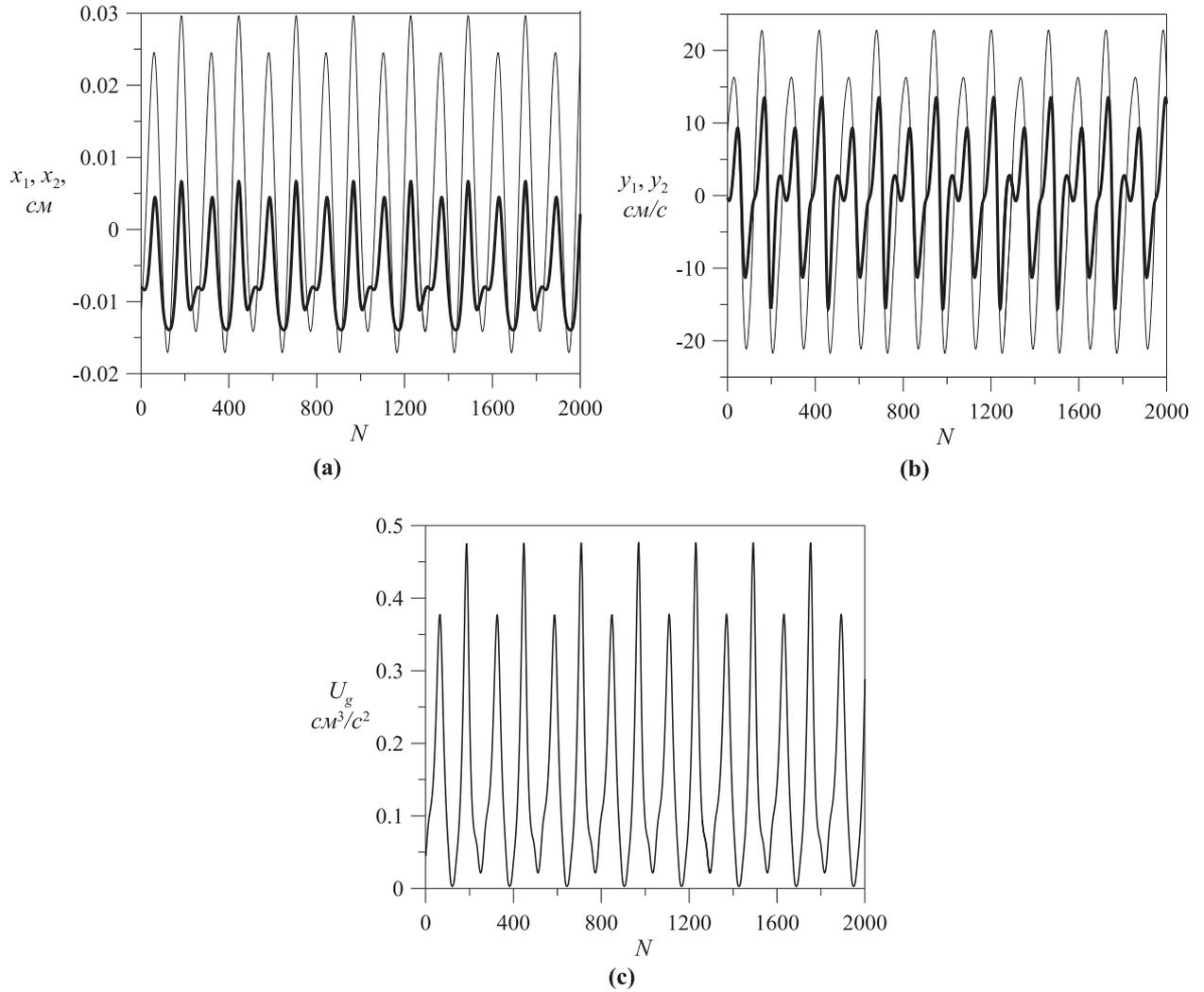


Рис. 4.13: временные реализации системы (4.13–4.17): (а)  $x_1$  светлая линия и  $x_2$  — жирная, (б)  $y_1$  светлая линия и  $y_2$  — жирная, (с)  $U_g$ . Время приведено в отсчётах:  $N = 2000$  соответствует 0.1 с, так что основная частота колебаний составляет около 120 Гц, что хорошо согласуется с физиологическими данными, согласно которым основная частота генерации мужского голоса лежит в диапазоне 100–150 Гц.

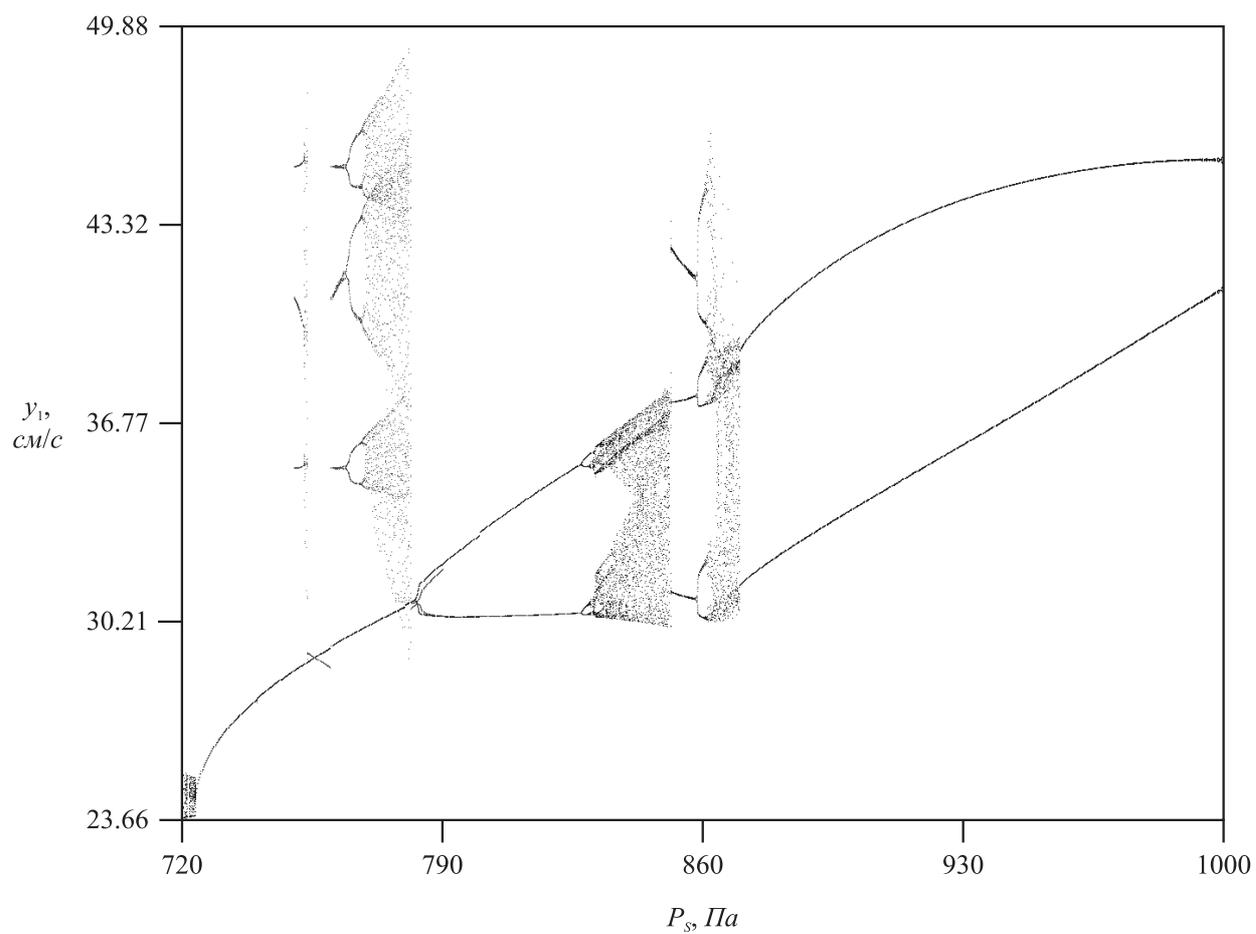


Рис. 4.14: бифуркационная диаграмма для двухмассовой модели, на диаграмме заметна область мультистабильности при  $P_s \approx 760$  Па.

### 4.3.3 Реконструкция уравнений двухмассовой модели по её решениям

Поскольку на практике, как правило, доступна одна или несколько, но не все переменные модели (4.13–4.17), либо некоторая измерительная функция этих переменных, реконструкцию мы проводили методом множественной стрельбы (см. п. 1.2).

Реконструкцию двухмассовой модели мы начали с самого простого случая: по реализациям самой модели, при одном неизвестном параметре, в качестве которого выбирались массы  $m_1$  и  $m_2$ , при этом стартовые догадки для переменных выбирались идеальным образом (см. пп. 1.3.2 и 1.3.9), а в качестве наблюдаемой использовался скалярный ряд переменной  $x_1$ . Установлено, что интегральная мера сходимости по параметру в этом случае достигает  $r_{100} = 5$  (см. п. 1.3.1), то есть можно ошибиться в 5 раз при задании стартовых догадок для  $m_{1,2}$  и восстановить его значение с точностью до  $10^{-5}$  от абсолютной величины. При двух неизвестных параметрах  $m_1$  и  $m_2$  значение  $r_{100}$  колебалось в пределах  $r_{100} \in [0.8, 1.5]$  в зависимости от режима: были рассмотрены два периодических режима при  $P_s = 7.4 \cdot 10^3$  и  $P_s = 7.84 \cdot 10^3$  и два хаотических при  $P_s = 8.36 \cdot 10^3$  и  $P_s = 8.78 \cdot 10^3$ . При четырёх неизвестных параметрах:  $m_{1,2}$  и  $\kappa_{1,2}$  и в тех же режимах  $r_{100} \in [0.4, 0.5]$ .

Эти результаты показывают, реконструкция по экспериментальным данным может быть успешна, только если общее количество неизвестных параметров будет существенно ограничено и большая часть из них будет зафиксирована из физиологических соображений.

Поскольку идеальные догадки для скрытых переменных на практике недоступны, мы предложили следующий подход к их формированию при реконструкции по ряду  $x_1$ . В качестве стартовой догадки для  $y_1$  использовалась численная производная наблюдаемой. В качестве догадок для  $x_2$  и  $y_2$  также использовались наблюдаемая и её производная (по аналогии с п. 1.3.9). Стартовые догадки для  $U_g$  были выбраны тождественно равными 0, поскольку в рассмотренном режиме связки значительную часть време-

ни находились в сомкнутом состоянии и воздух через них не проходил<sup>6</sup>. При таких стартовых догадках и одном неизвестном параметре  $m_1$  радиус сходимости составил  $r_{100} = 0.05$ .

На практике, однако, измерение ряда переменной  $x_1$  возможно только волоконно-оптическими методами, что требует специальной аппаратуры, которая не всегда доступна. Поэтому предпочтительно экспериментально измерять значение давления на выходе из голосовой щели  $P_1$ , которое является сложную функцией всех переменных модели и части параметров, для чего вводятся частные давления в начале и конце каждой половины голосовой щели:  $P_{11}$  и  $P_{12}$  для первого груза и  $P_{21}$ ,  $P_{22}$  для второго:

$$\begin{aligned}
 &\text{при } A_{g1} > 0 && \begin{cases} P_{11} = P_s - 0.69\rho \left(\frac{U_g}{A_{g1}}\right)^2, \\ P_{12} = P_{11} - \frac{12\nu l_g^2 d_1 U_g}{A_{g1}^3} - \rho \frac{d_1}{A_{g1}} \dot{U}_g, \end{cases} \\
 &\text{при } A_{g1} \leq 0 && P_{11} = 0, P_{12} = 0; \\
 &\text{при } \begin{cases} A_{g1} > 0, \\ A_{g2} > 0 \end{cases} && P_{21} = P_{12} - \frac{1}{2}\rho U_g^2 \left(\frac{1}{A_{g2}^2} - \frac{1}{A_{g1}^2}\right), \\
 &\text{иначе} && P_{21} = P_{12}; \\
 &\text{при } A_{g2} > 0 && \begin{cases} P_{22} = P_{21} - \frac{12\nu l_g^2 d_2 U_g}{A_{g2}^3} - \frac{\rho d_2}{A_{g2}} \dot{U}_g, \\ P_1 = P_{22} + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{U_g}{A_{g2}}\right)^2 \left(\frac{A_{g2}}{A_1}\right) \left(1 - \frac{A_{g2}}{A_1}\right), \end{cases} \\
 &\text{при } A_{g2} \leq 0 && P_{22} = P_{21}, P_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Таким образом, ставится задача реконструкции с использованием измерительной функции. Метод множественной стрельбы был модифицирован соответствующим образом и протестирован для случаев, когда в качестве измерительной функции различных комбинаций переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Полученные результаты качественно совпали с изложенными выше для случая реконструкции по ряду  $x_1$ .

Решение данной задачи с использованием  $P_1$  существенно затрудняется сложностью зависимости  $P_1(x_1, x_2, y_1, y_2, U_g)$ . Несмотря на широкий перебор стартовых догадок для параметров и скрытых переменных, решить

---

<sup>6</sup>Вообще говоря, такой подход нельзя признать вполне адекватным, поскольку переменные  $x_{1,2}$  и  $y_{1,2}$  существенно — в два и более раз — различаются в типичном случае, а скорость потока  $U_g > 0$  на большей части периода колебаний. Однако лучшие реалистичные догадки мы составить не смогли.

эту задачу при реалистичных (не равных «истинным») значениях догадок для последних не удалось. Это показывает, что не всякая измерительная функция годится для реконструкции и доступные нам экспериментальные реализации  $P_1$  не подходят для восстановления модели (4.13–4.17). Таким образом, дальнейшее решение поставленной задачи упирается в необходимость постановки эксперимента по измерению более удобных временных рядов: скажем,  $x_{1,2}$  или  $y_{1,2}$ .

## 4.4 Реконструкция модели нефрона

### 4.4.1 Уравнения модели нефрона

Нефрон — функциональная единица почки (см. рис. 4.15). Он представляет собою сложную систему капсул и каналов, обеспечивающих фильтрацию крови от продуктов жизнедеятельности (уринов). Неочищенная кровь поступает в нефрон через входящую артериолу, очищенная кровь выходит через выходящую артериолу, а урины выводятся в прямой почечный каналец. Поскольку нефрон представляет собою распределённую систему, он может быть адекватно описан в терминах уравнений в частных производных. Но, произведя некоторые упрощения и огрубления, можно перейти к конечномерной модели, где ряд уравнений описывает задержку в распространении сигнала по петле Хенле<sup>7</sup>, которая была предложена в работе [43] с опорой на законы гидродинамики. Модель состоит из системы 6-ти ОДУ, описывающая процессы регуляции давления и содержащая 20 параметров:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_t}{dt} &= \frac{1}{C_{tub}} \left( F_{filt}(P_t, r) - F_{reab} - \frac{P_t - P_d}{R_{Hen}} \right), \\
 \frac{dr}{dt} &= v_r, \\
 \frac{dv_r}{dt} &= -k v_r - \frac{P_{eq}(P_t, r) - P_{av}(P_t, r)}{\omega}, \\
 \frac{dx_1}{dt} &= \frac{P_t - P_d}{R_{Hen}} - \frac{3x_1}{T}, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \frac{3(x_1 - x_2)}{T}, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= \frac{3(x_2 - x_3)}{T}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

---

<sup>7</sup>Это наибольшая из задержек, но имеются и другие, подробнее см. [43].

Здесь  $P_t$  — давление в ближнем канале,  $r$  — его средний эффективный радиус,  $V_r$  — скорость его изменения, переменные  $x_1, x_2, x_3$  введены для описания распространения давления по петле Хенле; среднее время распространения —  $T$ .  $P_{av}$  и  $P_{eq}$  — среднее и равновесное давления крови во входном канале,  $k$  — коэффициент, описывающий демпфирующие свойства стенок канала (параметр потерь),  $R_{Hen}$  — величина гидродинамического сопротивления петли Хенле,  $R_a$  и  $R_e$  — гидродинамические сопротивления входящего и выходящего каналов. Нелинейные функции в (4.19) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
F_{filt}(P_t, r) &= \frac{P_a - P_g(P_t, r)}{R_a(r)} - \frac{P_g(P_t, r) - P_v}{R_e}, \\
P_g(P_t, r) &= P_a + \frac{R_a(r)(P_v - P_a)}{R_a(r) + R_e H_a + R_e(1 - H_a) \frac{C_a}{C_e(P_t, r)}}, \\
P_{av}(P_t, r) &= \frac{1}{2} \left( P_a - (P_a - P_g(P_t, r)) \frac{\beta R_{a0}}{R_a(r)} + P_g(P_t, r) \right), \\
P_{eq}(P_t, r) &= 2.4e^{10(r-1.4)} + 1.6(r-1) + \\
&\quad + \Psi(x_3) \left( \frac{4.7}{e^{13(0.4-r)} + 1} + 7.2(r+0.9) \right), \\
\Psi(x_3) &= \Psi_{\max} - \frac{\Psi_{\max} - \Psi_{\min}}{1 + e^{\alpha \left( \frac{3x_3}{TF_{Hen0}} - S \right)}}, \\
R_a(r) &= R_{a0} (\beta + (1 - \beta)r^{-4}).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Вместе с системой дифференциальных уравнений (4.19, 4.20) необходимо решать алгебраическое уравнение (4.21):

$$\begin{aligned}
&b(R_a(r) + R_e H_a) C_e^3 + \\
&+ (bR_e(1 - H_a) C_a + a(R_a(r) + R_e H_a)) C_e^2 + \\
&+ (aR_e(1 - H_a) C_a + (P_t - P_v)(R_a(r) + R_e H_a) + \\
&+ (P_v - P_a) R_e H_a) C_e + (P_v - P_a) R_e(1 - H_a) C_a = 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Модель (4.19, 4.20, 4.21) содержит 20 параметров, величины которых считаются постоянными. Их значения можно измерить только с большой натяжкой (например, потому что в эксперименте всегда есть нестационарность, да и насколько адекватна сама модель точно неизвестно). При различных значениях параметров модель демонстрирует периодические и хаотические режимы. В [43] приведены следующие

обоснованные из физиологических соображений значения, соответствующие хаотическому режиму:  $C_{tub} = 3$  нл/кПа,  $F_{reab} = 0.3$  нл/с,  $P_d = 0.6$  кПа,  $R_{Hen} = 5.3$  кПа · с/нл,  $P_a = 13$  кПа,  $P_v = 1.3$  кПа,  $a = 22$  Па · л/г,  $b = 0.39$  Па · л<sup>2</sup>/г<sup>2</sup>,  $R_e = 1.9$  кПа · с/л,  $H_a = 0.5$ ,  $C_a = 54$  г/л,  $k = 0.4$  с<sup>-1</sup>,  $\omega = 20$  кПа · с<sup>2</sup>,  $T = 16$  с,  $\Psi_{max} = 0.44$ ,  $\Psi_{min} = 0.2$ ,  $\alpha = 160$ ,  $\beta = 0.67$ ,  $S = 0.19$ ,  $R_{a0} = 2.3$  кПа · с/нл.

#### 4.4.2 Реконструкция модели нефрона по модельным и экспериментальным реализациям

Сложность моделирования любой биологической системы связана, в частности, с трудностью измерения большинства её характеристик без внесения в систему существенных искажений. При реконструкции модели нефрона мы располагали временными рядами только одной наблюдаемой — давления в ближнем канале  $P_t$ . Поэтому мы воспользовались методом множественной стрельбы (см. п. 1.2, [30]).

Прежде, чем перейти к моделированию экспериментальных временных рядов нефрона, мы решили задачу реконструкции модели (4.19–4.21) по её хаотическим реализациям (с добавлением 1%-ного шума), полученным путем численного интегрирования методом Рунге-Кутты 4-ого порядка с шагом 0.002 и интервалом выборки  $\Delta t = 0.01$ . Записывались как векторные ряды (все 6 переменных исходной системы), так и скалярные (только переменная  $P_t$ , доступная экспериментально). Начальные приближения для параметров принимались отличными от истинных на 10%. Результаты приведены на трёх примерах.

##### Первый пример: реконструкция по векторному ряду модели

Использовался зашумлённый векторный ряд, составленный из всех шести переменных. Стартовые догадки для скрытых переменных задавались прямо из ряда. Использовался ряд из  $N = 4312$  точек, который делился на  $L = 56$  фрагментов по  $n = 77$  точек в каждом. При вариации этих параметров в достаточно широкой области:  $35 \leq L \leq 100$  и  $15 \leq n \leq 150$

результаты остаются стабильными. Результаты реконструкции приведены на рис. 4.16. Вообще говоря, в такой ситуации применение метода Бока необязательно — все переменные известны. Однако таким образом удаётся избавиться от необходимости численного дифференцирования, что при наличии шума существенно осложнило бы процесс реконструкции. Кроме того, нам необходимо было протестировать численный алгоритм.

В ходе моделирования оказалось, что в достаточно широкой области около значений параметров, приведённых на стр. 125, величины  $a$ ,  $b$  и  $C_a$  оказываются почти линейно связанными, соответствующие им строки матрицы поправок для параметров пропорциональными и, как следствие, сама матрица плохо определена. Таким образом вследствие данного дефекта модели, пришлось ограничиться оцениванием 18 параметров, зафиксировав величины  $a$  и  $b$  равными их истинным значениям<sup>8</sup>. Результаты реконструкции (см. рис. 4.16) показали, что 18 неизвестных параметров восстанавливаются с точностью не менее 1%.

### **Второй пример: реконструкция по скалярному ряду модели**

В первом примере использовались ряды всех пяти переменных, но на практике, как уже отмечалось ранее, доступны ряды только  $P_t$ , поэтому мы провели также реконструкцию модели по её скалярной реализации давления в ближнем канале. Начальные догадки для скрытых переменных брались равными типичным значениям соответствующих переменных с добавлением небольшого шума. Процедура оценивания успешно работает только в случае одного неизвестного параметра (следуя [43] мы выбрали  $P_a$  как один из наиболее важных параметров с точки зрения эволюции режимов системы). На рис. 4.17 приведен пример для ряда длиной  $N = 1300$  ( $L = 130$ ,  $n = 10$ ).

Невозможность реконструировать систему при большем количестве свободных параметров, таким образом, упирается в недостаток экспериментальных данных: если бы было доступно больше переменных, напри-

---

<sup>8</sup>Мы зафиксировали именно эти два параметра, поскольку они лишены конкретного физического смысла, хотя можно было выбрать любые два из трёх.

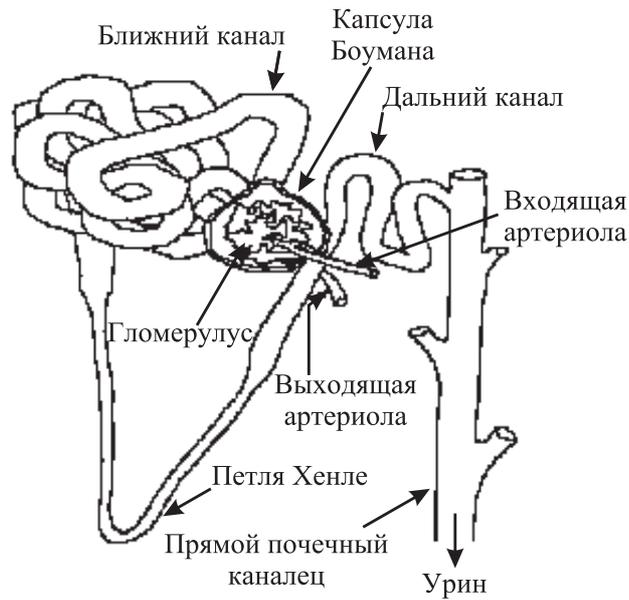


Рис. 4.15: эскиз строения нефрона.

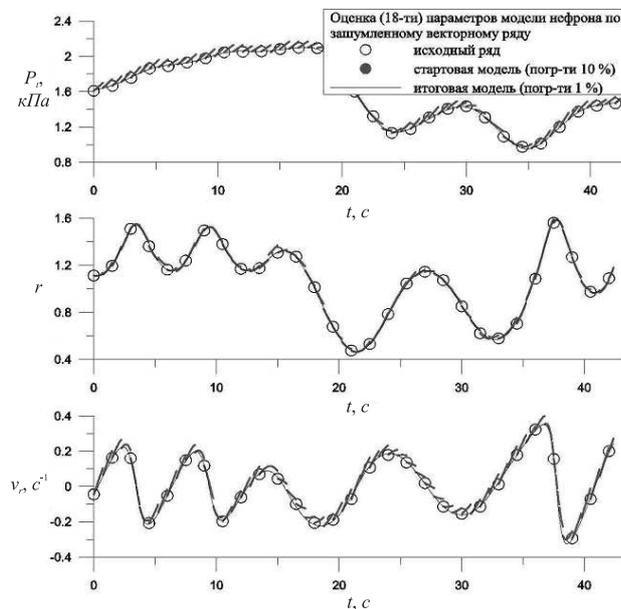


Рис. 4.16: временные реализации модели нефрона (4.19–4.21) и результаты реконструкции этой модели по векторному временному ряду всех шести переменных при 18 неизвестных параметрах.

мер, ещё  $r$  и  $v_r$ , также имеющие явный физический смысл, удалось бы восстановить по крайней мере 6 параметров: кроме  $P_a$  ещё  $P_v$ ,  $P_d$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $C_a$  или какие-либо другие.

### Третий пример: реконструкция по экспериментальному ряду $P_t$

В нашем распоряжении находились 4 экспериментальных ряда  $P_t$  для крысы, сняты в двух различных режимах: 2 в «периодическом» — более-менее регулярные колебания с довольно значительной модуляцией частоты и амплитуды и 2 в хаотическом. Все ряды существенно зашумлены. Как показано в предыдущем примере, имея только ряд давления  $P_t$ , можно рассчитывать на оценку только одного параметра. В этой ситуации нам неизвестны «истинные» значения остальных 19 параметров модели и остается только положить их равными типичным. В случае достаточно регулярного ряда (похожего на периодический) процедура оценивания сходится и полученная оптимальная модель воспроизводит реализацию нефрона на одном характерном периоде колебаний, сглаживая высокочастотные колебания (см. рис. 4.18)<sup>9</sup>.

Асимптотическое поведение этой модели — предельный цикл, что соответствует качественно поведению реальной системы. При моделировании по хаотическим рядам успешных результатов достигнуто не было. Это связано как с тем, что в этом случае необходимо использовать более длинный временной ряд, чтобы модель смогла учесть все основные временные масштабы. Однако из-за не вполне адекватного выбора значений 19 зафиксированных параметров, несовершенства модели и существенной зашумлённости экспериментальных данных, при больших 20–25 с длинах рядов метод множественной стрельбы расходится.

---

<sup>9</sup>Экспериментально наблюдаемые высокочастотные колебания вызваны многими факторами. Одним из наиболее существенных является то, что параметр  $P_a$  на самом деле меняется со временем с высокой частотой, но амплитуда колебаний составляет всего 1.5–2% от среднего значения, потому в модели (4.19–4.21) он полагается константой.

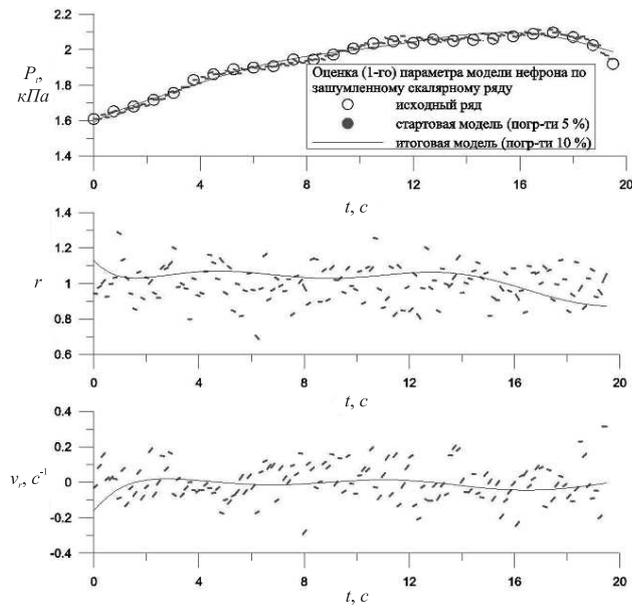


Рис. 4.17: временные реализации модели нефрона (4.19–4.21) и результаты реконструкции этой модели по скалярному ряду переменной  $P_t$  при одном неизвестном параметре  $P_a$ .

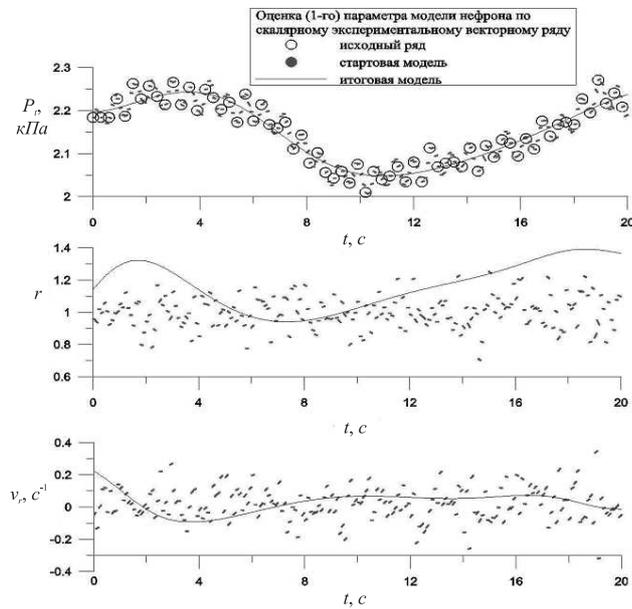


Рис. 4.18: временные реализации давления в ближнем канале нефрона  $P_t$ , снятые экспериментально в режиме, близком к периодическому и результаты реконструкции модели (4.19–4.21) по  $P_t$  при одном неизвестном параметре  $P_a$  и остальных параметрах, зафиксированных на типичных значениях (подробнее см. [43]).

## 4.5 Выводы

Результаты приложения методов реконструкции по временным рядам к задаче измерения нелинейных характеристик полупроводниковых устройств сводятся к следующему.

Предложен новый способ измерения нелинейных характеристик полупроводниковых устройств, основанный на реконструкции уравнений Кирхгофа по экспериментальным реализациям тока и напряжения и позволяющий проводить измерения в условиях последующей эксплуатации. Он апробирован на задаче измерения вольтфарадных и вольтамперных характеристик полупроводникового диода с р-п переходом. Результаты, полученные предложенным способом, сопоставлены с показаниями эталонных приборов — полученная разница укладывается в погрешность приборов. Показано также, что предложенный способ позволяет проводить измерения нелинейных характеристик в сложных режимах, когда эталонные приборы и другие известные методы не работают. При этом результат измерения существенно зависит от режима эксплуатации.

Рассмотрены различные способы аппроксимации искомым характеристикам: в специальном виде (исходя из физических соображений), полиномиальная, кусочно-полиномиальная и локально-линейная. Показано, что результат измерения зависит от способа аппроксимации, выбор аппроксимирующих функций зависит от конкретной задачи.

Продемонстрирована возможность приложения способа для разбраковки устройств по на основании интересующей нелинейной характеристики.

Несмотря на сложность моделей голосовых связок: большое количество переменных, параметров и сложный тип нелинейностей, их реконструкция по временным рядам возможна даже в случае, когда часть переменных являются скрытыми. Однако при этом нужно существенно ограничить число неизвестных параметров тремя-четырьмя наиболее важными, зафиксировав остальные из физиологических соображений, а также специально подобрать стартовые догадки для скрытых переменных, что требует дополнительного изучения реконструируемой системы. Также показано, что не

всякая комбинация переменных модели годится в качестве измерительной функции: например, использование рядов давления  $P_1$  на выходе из голосовой щели не приводит к успеху, поскольку сложная зависимость  $P_1$  от переменных  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  и  $U_g$  препятствует сходимости алгоритма.

С помощью метода множественной стрельбы в принципе возможно оценить параметры модели нефрона, предложенной в [43] по экспериментальным данным, если зафиксировать большинство из них равными типичным значениям. Модель успешно восстановлена по регулярному ряду и продемонстрировала периодический аттрактор. Однако несовершенство модели и недостаток экспериментальных данных препятствуют успешному решению этой задачи в целом: не удаётся реконструкция по хаотическим рядам, а при по регулярным рядам возможно оценить только небольшое количество параметров модели (1, реже 2).

По результатам представленных в четвёртой главе исследований получен патент на изобретение [99], а также опубликованы работы [100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108].

## Заключение

В первой главе на основании введённого количественного критерия проведено сравнение работоспособности различных реализаций метода множественной стрельбы. Показано, что исходный алгоритм Бока уступает модифицированному методу, отличающемуся допуском разрывов в модельной траектории, поскольку последний позволяет работать с более длинными рядами, увеличивая точность оценок и имеет больший радиус сходимости.

Продемонстрирована степень влияния на результат реконструкции длины используемого ряда, количества его сегментов, выбора наблюдаемой и способа задания стартовых догадок для скрытых переменных. Показано, что шансы на успех оценки значений параметров возрастают с увеличением длины ряда, если одновременно увеличивается число допустимых разрывов траектории модели таким образом, чтобы длина одного сегмента составляла примерно одно-два ляпуновских времени. Также отмечено, что стартовые догадки для скрытых переменных необходимо выбирать основываясь на свойствах объекта, учитывая наиболее общие характеристики аттрактора. Влияние шума (вплоть до 0.2 от уровня сигнала) на процесс моделирования несущественно, особенно для модифицированного метода.

Результаты проведённых во второй главе численных экспериментов по реконструкции динамических систем при различных видах воздействия позволяют сделать следующие выводы. Стандартный алгоритм не позволяет построить адекватную модель ни при каком из рассмотренных видов воздействия даже в отсутствие шумов, тогда как модернизированная структура, где воздействие учитывается введением в уравнения явной функции времени в виде тригонометрического полинома при достаточном количе-

стве учтённых гармоник обеспечивает хорошее качество реконструкции. При наличии измерительных шумов получение оптимальной модели требует значительно большей длины тренировочного ряда.

Усложнение формы воздействия заставляет увеличивать число членов тригонометрического полинома, но это остаётся без негативных последствий для качества модели. Присутствие субгармоник во внешнем воздействии не представляет никаких новых трудностей, если в качестве базовой частоты принять наименьшую из частот субгармоник. Чтобы найти эту частоту необходимо перебирать стартовые догадки для периода воздействия, в качестве которых следует в первую очередь брать величины, кратные периоду, соответствующему основному пику в спектре наблюдаемой.

При квазипериодическом воздействии модифицированная структура сохраняет работоспособность, если использовать несколько тригонометрических полиномов по числу несоизмеримых частот в спектре воздействия. Основная сложность при этом состоит в том, что периоды двух высоких гармоник из разных полиномов на некотором этапе итерационной процедуры могут оказаться столь близкими, что это приведёт к вырожденной или очень плохо обусловленной матрице при решении задачи оценки линейно входящих параметров. Поэтому приходится уменьшать числа членов ряда и очень точно задавать начальные догадки.

В третьей главе предложен метод восстановления произвольного гладкого, в том числе хаотического и шумового воздействия на динамическую систему. Метод основан на представлении внешнего воздействия в виде дополнительной переменной модели, составлении для этой переменной эволюционного уравнения и использовании одного из алгоритмов работы со скрытыми переменными — метода множественной стрельбы. Предложенный подход позволяет оценить параметры системы и получить сигнал внешнего воздействия, если известна структура объекта моделирования и наблюдаются некоторые (не обязательно все) переменные. В последнем случае восстанавливаются также ряды недостающих переменных. Обязательной является доступность для наблюдения только той переменной, в

уравнение для которой входит внешнее воздействие.

Подход апробирован на примерах реконструкции эталонных систем моделей при различной собственной динамике: как периодической, так и хаотической, а также различных видах воздействия: хаотическом (сигнал детерминированной системы) и шумовом (реализация случайного процесса). Показано, что подход устойчив к аддитивному шуму амплитудой до 10%, если при дифференцировании использовать сглаживающий полином, а полученное воздействие дополнительно фильтровать.

Обсуждаются возможные применения предложенного метода для решения ряда задач, таких как: косвенное измерение величин, недоступных прямому измерению, определение наличия связи между системами или внешнего воздействия на изучаемую систему, скрытая передача или кодирование информации либо приём сигнала в системах связи на хаотической несущей. Последнее приложение демонстрируется на эталонном примере.

В четвёртой главе изложены результаты приложений развитых в работе алгоритмов. А именно:

- Предложен новый способ измерения нелинейных характеристик полупроводниковых устройств, основанный на реконструкции уравнений Кирхгофа по экспериментальным реализациям тока и напряжения и позволяющий проводить измерения в условиях последующей эксплуатации. Он апробирован на задаче измерения вольтфарадных и вольтамперных характеристик полупроводникового диода с p-n переходом. Рассмотрены различные способы аппроксимации искомых характеристик и показано, что результат измерения зависит от способа аппроксимации, выбор аппроксимирующих функций зависит от конкретной задачи. Продемонстрирована возможность приложения способа для разбраковки устройств по основанию интересующей нелинейной характеристике.
- Показано, что реконструкция по временным рядам моделей голосовых связок в принципе возможна даже в случае, когда часть переменных являются скрытыми. Однако при этом нужно существенно

ограничить число неизвестных параметров тремя-четырьмя наиболее важными, зафиксировав остальные из физиологических соображений, а также специально подобрать стартовые догадки для скрытых переменных, что требует дополнительного изучения реконструируемой системы. Также показано, что не всякая комбинация переменных модели годится в качестве измерительной функции.

- Также продемонстрировано, что с помощью метода множественной стрельбы в принципе возможно оценить параметры модели нефрона, предложенной в [43] по экспериментальным данным, если зафиксировать большинство из них равными типичным значениям. Модель успешно восстановлена по регулярному ряду и демонстрировала периодический аттрактор. Однако несовершенство модели и недостаток экспериментальных данных препятствуют успешному решению этой задачи в целом: не удаётся реконструкция по хаотическим рядам, а при по регулярным рядам возможно оценить только небольшое количество параметров модели.

Полученные в диссертационной работе результаты раскрывают возможности методов реконструкции по экспериментальным временным рядам применительно к достаточно широким классам объектов: неавтономным системам и при наличии скрытых переменных, предложенные новые подходы позволяют расширить область применения, а сформулированные в результате исследований рекомендации — повысить шансы на успех в приложении к реальным задачам, что подтверждается рядом приложений, проделанных в рамках работы.

## Благодарности

Глубоко и искренне благодарю своего руководителя профессора Бориса Петровича Безручко за неослабевающее внимание к моей работе, постоянную поддержку и содействие на протяжении всех семи лет сотрудничества, а также за помощь в написании и оформлении диссертации. Благодарю к.ф.-м.н., старшего научного сотрудника СФ ИРЭ РАН Д.А. Смирнова, своего соавтора по многим вошедшим в диссертацию исследованиям, а также старшего научного сотрудника СФ ИРЭ РАН, д.ф.-м.н., доцента СГУ Е.П. Селезнёва, оказавшего неоценимую помощь при работе над приложением изложенных в работе методов к задачам радиотехнических измерений. Без их участия работа не состоялась бы в нынешнем виде. Также благодарю к.ф.-м.н., старших научных сотрудников ИРЭ РАН В.И. Пономаренко и М.Д. Прохорова, ассистентов СГУ к.ф.-м.н. Т.В. Диканева и к.ф.-м.н. М.Б. Бодрова, аспирантов СГУ А.С. Караваева и А.М. Захаревича за участие в обсуждении результатов исследований на семинарах лаборатории СФ-6, помощь в текущей повседневной работе, а также как соавторов некоторых работ.

Особую признательность хочется выразить чл.-корр., д.ф.-м.н., профессору Д.И. Трубецкову, благодаря которому я заинтересовался миром нелинейной динамики и на чьей кафедре я имел честь работать на протяжении обучения в аспирантуре.

Работы по теме диссертации были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №02-02-15578 и №05-02-16305), Американским фондом гражданских исследований и развития для государств бывшего Советского Союза — CRDF (грант REC-006), Фондом некоммерческих программ «Династия» (грант 245.622) и Министер-

ством образования РФ (грант «Оптимизация структуры модельных уравнений при эмпирическом динамическом моделировании нелинейных систем», 2003–2004 гг.).

# Литература

1. Льюнг. Идентификация систем. Теория для пользователей. — М.: Наука, 1991. — 432 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. — 592 с.
3. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. — 248 с.
4. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
5. Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 608 с.
6. U. Parlitz and G. Mayer-Kress. Predicting low-dimensional spatiotemporal dynamics using discrete wavelet transforms // Phys. Rev. E, Vol. 51 (4), pp. R2709–R2711, 1995.
7. Bar M., Hegger R., and Kantz H. Fitting partial differential equations to space-time dynamics // Phys. Rev. E, 1999, V. 59, No. 1. P. 337-343.
8. Ulrich Parlitz and Christian Merkwirth. Prediction of Spatiotemporal Time Series Based on Reconstructed Local States // Phys. Rev. Lett. Vol. 84, No 9, 2000. P. 1890–1893.

9. Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Часть 1. М.: Мир, 1974. — 242 с.
10. Kadtke J. Classification of highly noisy signals using global dynamical models, *Phys. Lett. A*, 1995, V. 203. P. 196–202.
11. Hegger R., Kantz H., Schmuser F., et al. Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis // *Chaos*. 1998. V. 8. P. 727–754.
12. U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski, and H. Preckel. Encoding messages using chaotic synchronization // *Phys. Rev. E*, Vol. 53, No 5, P. 4351–4361.
13. Анищенко В.С., Павлов А.Н., Янсон Н.Б. Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации // *ЖТФ*, 1998.
14. Прохоров М.Д. , Смирнов Д.А. Эмпирическая дискретная модель колебательного контура с диодом // *Радиотехника и электроника*, 1996, Т. 41, № 11, С. 1340-1343.
15. W. Horbelt and J. Timmer, M. J. Bunner, R. Meucci and M. Ciofini. Identifying physical properties of a CO2 laser by dynamical modeling of measured time series. *Phys. Rev. E*, 2001, vol.64, 016222.
16. Hubner U., Weiss C.-O., Abraham N.B., and Tang D. Lorenz-like chaos in NH3-FIR lasers (data set A) // in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings Vol. XV, Addison-Wesley, 1993. P. 73-104.
17. Swameye I., Muller T.G., Timmer J., Sandra O., and Klingmuller U. Identification of nucleocytoplasmic cycling as a remote sensor in cellular signaling by databased modeling. // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2003, 100, 1028–1033.

18. Монин А.С., Питербарг Л.И. О предсказуемости погоды и климата // Пределы предсказуемости, под ред. Кравцова Ю.А. — М.: ЦентрКом, 1997. С. 12–39.
19. Keller C.F. Climate, modeling, and predictability // *Physica D*, 1999, V. 133. P. 296–308.
20. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. О прогнозе временных рядов // Пределы предсказуемости, под ред. Кравцова Ю.А., М.: ЦентрКом, 1997. С. 158–169.
21. Lequarre J.Y. Foreign currency dealing: a brief introduction (data set C) // in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings Vol. XV, Addison-Wesley, 1993. P. 131-137.
22. Cecen A.A. and Erkal C. Distinguishing between stochastic and deterministic behavior in high frequency foreign exchange rate returns: Can non-linear dynamics help forecasting? // *Int. J. Forecasting*, 1996, V. 12. P.465-473.
23. Rigney D.R., Goldberger A.L., Ocasio W.C., Ichimaru Yu., Moody G.B., and Mark R.G. Multi-channel physiological data: Description and analysis (data set B) // in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings Vol. XV, Addison-Wesley, 1993. P. 105–129.
24. Palus M. Nonlinearity in normal human EEG: Cycles, temporal asymmetry, non-stationarity and randomness, not chaos // *Biol. Cybernetics*, 1995, V.75, No. 5. P. 389–396.
25. Timmer J., Haussler S., Lauk M., and Lucking C.-H. Pathological tremor: deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators? // *Chaos*, 2000, V. 10, No. 1. P. 278–288.

26. Clemens J.C. Whole Earth telescope observations of the white dwarf star PG 1159–035 (data set E) // in *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings Vol. XV, Addison-Wesley, 1993. P. 139–150.
27. Gouesbet G. and Letellier C. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial approximation on nets. *Phys. Rev. E*, 1994, Vol. 49, P. 4955–4972.
28. Sauer T., Yorke J., Casdagli M., “Embedology”, *Journal of Statistical Physics*, 1991. Vol. 65, № 3–4. P. 579–616.
29. U. Parlitz. Estimating Model Parameters from Time Series by Autosynchronization // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 76, No 8, 1996. P. 1232–1235.
30. Baake E., Baake M., Bock H.G., and Briggs K.M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A*, 1992, V. 45, No. 8, P. 5524–5529.
31. H. Bock, in: K. Ebert, P. Deuffhard W. Jager (Eds.), *Modelling of Chemical Reaction Systems*, Springer Berlin, 1981 vol. 18, Chap. 8, pp. 102-125.
32. Д.А. Грибков, В.В. Грибкова, Ю.А. Кравцов и др. // *Радиотехн. и электроника*. 1994. 39, №2, С. 231.
33. Д.А. Грибков, В.В. Грибкова, Ю.И. Кузнецов. Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохастической системы // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1995. 36, №1, С. 76–78.
34. O. L. Anosov, B. Hensel, S. Berczynski, Yu. A. Kravtsov. Detection threshold of the control parameters modulation in a noisy chaotic map (accepted for publication in *Int. J. Bifurcation and Chaos*), 2007, 17 (5), in press.

35. Безручко Б.П. , Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1999, Т. 7, № 1, С. 49–67.
36. Bezruchko B.P. and Smirnov D.A. Constructing of nonautonomous differential equations from experimental time series, Phys. Rev. E, 2000, Vol. 63, 016207.
37. Toda М. Теория нелинейных решёток. — М.: Мир,1984. — 264 с.
38. Kurz Th., Lauterborn W. Bifurcation structure of the Toda oscillator.// Phys.Rev.A. — 1988. Vol.37, №3. — P.1029-1031.
39. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. of the Atmospheric Sciences, 1963, V. 20. P. 130–141.
40. Rossler O.E. An equation for continuous chaos // Phys. Lett., 1976, V. 57A, No. 5. P. 397–398.
41. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989. 278 с.
42. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. — 252 с.
43. K. Jensen, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, Self-sustained oscillations and chaotic behavior kidney pressure regulation, in I. Prigogine and M. Sanglier (eds), Laws of nature and human conduct (Task Force of Research Information and Study on Science, Brussel, 1985), pp.91-109.
44. J. Flanagan and L. Landgraf, Self-oscillating source for vocal-tract synthesizers, IEEE Trans. On Audio and Electroacoustics 16 (1968), 57-64.
45. K. Ishizaka and J. L. Flanagan, Synthesis of voiced sounds from a two-mass model of the vocal cords, Bell. Syst. Techn. J., 1233-1268, 1972.

46. Steineke, I., Herzel, H., 1995. Bifurcations in an asymmetric vocal fold model. *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 1571-78.
47. Н.Г. Макаренко. Эмбедология и нейропрогноз // Лекции по нейроинформатике, М.: МИФИ, 2003, 2-67.
48. Timmer J., Rust H., Horbelt W., and Voss H. Parametric, nonparametric and parametric modelling of a chaotic circuit time series. *Phys. Lett. A*, 274:123-134, 2000.
49. Tokuda I., Parlitz U., Illing L., Kennel M. and Abarbanel H.D.I. Parameter estimation for neurons // *Experimental Chaos, Proceedings of the 7th Experimental Chaos Conference, San Diego, USA, 2002.*
50. V.F. Pisarenko, D. Sornette, Statistical methods of parameter estimation for deterministically chaotic time series. *Phys. Rev. E*, 2004. V. 69. 036122.
51. Horbelt W. Maximum likelihood estimation in dynamical systems: PhD thesis, University of Freiburg, 2001. <http://webber.physik.uni-freiburg.de/~horbelt/diss/>.
52. T. Stojanovski, L. Kocarev, and U. Parlitz. A simple method to reveal the parameters of the Lorenz system // *Int. Jour. Bif. Chaos*, Vol. 6, No 12B, 1996. P. 2645–2652.
53. U. Parlitz, L. Junge, and L. Kocarev. Synchronization-based parameter estimation from time series // *Phys. Rev. E*, Vol. 54, No 6, 1996. P. 6253–6259.
54. D. Huang and R. Guo. Identifying parameter by identical synchronization between different systems // *Chaos*, Vol. 14, No 1, 2004. P. 152–159.
55. McSharry P.E. and Smith L.A. Better Nonlinear Models from Noisy Data: Attractors with Maximum Likelihood, *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, P. 4285.
56. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge, Cambridge University Press, 1992).

57. Хаслер М. Электрические цепи с хаотическим поведением // ТИИЭР, 1987, Т. 75, В. 8. С. 40–55.
58. Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Сложная динамика возбуждаемого осциллятора с кусочно-линейной характеристикой // Письма в ЖТФ, 1994, Т. 20, В. 19. С. 75–79.
59. Gouesbet G. and Maquet J. Construction of phenomenological models from numerical scalar time series // Physica D, 1992, V. 58, P. 202-215.
60. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г., Чепурнов А.С. Построение по экспериментальным данным модели систем стабилизации резонансной частоты и температуры секции линейного ускорителя электронов // Вестник Московского университета, 1994, Сер. 3, Т. 35, № 1. С. 96–98.
61. Павлов А.Н., Янсон Н.Б. Применение методики реконструкции математической модели к электрокардиограмме // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1997, Т. 5, № 1. С. 93–108.
62. Cremers J. and Hubler A. Construction of differential equations from experimental data // Z. Naturforschung A, 1987, V. 42. P. 797–802.
63. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // in Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980, eds. D.Rang and L.S.Young, Lecture Notes in Mathematics, 1981, V. 898. P. 366-381.
64. K. Jensen, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, Self-sustained oscillations and chaotic behavior kidney pressure regulation, in I. Prigogine and M. Sanglier (eds), Laws of nature and human conduct (Task Force of Research Information and Study on Science, Brussel, 1985), P. 91–109.
65. Пасынков В.В., Чиркин Л.К., Шинков А.Д. Полупроводниковые приборы: Учебник для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. Школа, 1981. — 431 с., ил.

66. Усанов Д.А., Скрипаль А.В. Физика работы полупроводниковых приборов в схемах СВЧ. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. — 376 с.: ил.
67. И.П. Степаненко. Основы микроэлектроники. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. — 488 с.
68. Патент на изобретение №94038819/09. Способ измерения параметров полного сопротивления и устройство для его осуществления. Зенин А.Ю., Мокшанцев В.П., Петров Е.А., МПК G 01 R 27/02, 31/27.
69. Патент на изобретение №2000112434/09. Способ определения параметров двухполюсников. Сафаров М. Р., Сарваров Л. В., Коловертнов Ю. Д., Коловертнов Г. Ю., МПК G 01 R 27/02,26.
70. Патент на изобретение №93005722/10. Способ измерения комплексных параметров электрических цепей. Абрамзон Г.В., Каганов З.Г., Клейман А.Ю., МПК G 01 R 27/02.
71. J. W. van den Berg, J. T. Zantema, and P. Doornenbal, Jr., On the air resistance and the Bernoulli effect of the human larynx, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 29, 626–631, 1957.
72. J. L. Flanagan, K. Ishizaka, K. L. Shipley. Synthesis of speech from a dynamical model of the vocal cords and vocal tract, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 54 No 3, 486–503, 1975.
73. J. C. Lucero. A theoretical study of the hysteresis phenomenon at vocal fold oscillation onset-offset, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 105, 423–431, 1999.
74. I. R. Titze. The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 83, 1536-1552, 1988.
75. Ланда П.С., Руденко О.В. О двух механизмах генерации звука // Акустический журнал, т. XXXV, вып. 5, 855-862, 1989.

76. M. A. Trevisan, M. C. Eguia, and G. B. Mindlin, Nonlinear aspects of analysis and synthesis of speech time series data, *Phys. Rev. E* 63 (2001), 026216.
77. J.C. Lucero. Dynamics of the two-mass model of the vocal folds: Equilibria, bifurcations, and oscillation region. *J. Acoust. Soc. Am.* 94, 3104-3111, 1993.
78. H. Herzel and C. Knudsen, Bifurcation in a vocal fold model, *Nonlinear Dyn.* 7 (1995), 53-64.
79. J. J. Jiang, Y. Zhang, and J. Stern, Modeling of chaotic vibrations in symmetric vocal folds, *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 110 (2001), 2120-2128.
80. Koizumi T., Taniguichi S., and Hiromitsu S. Two-mass models of the vocal cords for natural sounding voice synthesis. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 82, 1179-1192, 1987.
81. B. H. Story and I. R. Titze, Voice simulation with a bodycover model of the vocal folds. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 97, 1249-1260, 1995.
82. I. R. Titze. Regulating glottal air flow in phonation: Application of the maximum power transfer theorem to a low dimensional phonation model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111, 367-376, 2002.
83. Wong D., Ito M.R., Cox N.B., and Titze I.R. Observation of perturbations in a lumped-element model of the vocal folds with application to some pathological cases. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 89, 383-394, 1991.
84. Boris P. Bezruchko, Dmitry A. Smirnov and Ilya V. Sysoev. Identification of chaotic systems with hidden variables (modified Bock's algorithm) // *Chaos, Solitons & Fractals* Vol. 29 (2006). P. 82–90.
85. Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов, И.В. Сысоев. Реконструкция при наличии скрытых переменных: модифицированный алгоритм Бока // *Изв. ВУЗов, «ПНД»*, т. 12, № 6, — 2004. С. 93–104.

86. И.В. Сысоев, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко. Реконструкция моделей хаотических систем при наличии скрытых переменных по временным рядам // Сборник материалов VII Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 2004 — С. 113–114.
87. Б.П. Безручко, М.Б. Бодров, Т.В. Диканев, А.С. Караваев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев, И.В. Сысоев, Д.А. Смирнов. Некоторые проблемы реконструкции модельных уравнений по временным рядам и пути их решения // Нелинейные волны 2004 / под. ред. А.В. Гапонова-Грехова, В.И. Некоркина. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 381-397.
88. И.В. Сысоев, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко. Реконструкция при наличии скрытых переменных (модифицированный алгоритм Бока) // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, 2005. С. 204–206.
89. Сысоев И.В. Изучение эффективности алгоритма Бока и его модификации для реконструкции по хаотическим временным рядам // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2004», Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004. С. 74–77.
90. Д.А. Смирнов, И.В. Сысоев, Е.П. Селезнёв, Б.П. Безручко. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // Письма в ЖТФ, 2003, т. 29, вып. 19. С 69–76.
91. B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, D.A. Smirnov, T.V. Dikanev, I.V. Sysoev, A.S. Karavaev. Special Approaches to Global Reconstruction of Equations from Time Series // Izv. VUZ. “AND”, Vol. 10, №3, 2002. P. 137–158.
92. Boris Bezruchko, Dmitry Smirnov, Taras Dikanev, and Ilya Sysoev. Construction of dynamical model equations for nonautonomous systems

- from time series (peculiarities and special approaches). // *Chaos and its Reconstruction*. Edited by G. Gouesbet and S. Meunier-Guttin-Cluzel. Nova Science Publishers, 2003. P. 215–243.
93. В.П. Безручко, Д.А. Смирнов, and И.В. Сысоев. Reconstruction of model equations of nonautonomous systems under regular driving // Abstracts of the “6th International School on Chaotic Oscillations and Pattern Formation”, Saratov, Russia, 2001. P. 17–18.
94. Безручко Б.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В. Реконструкция уравнений регулярно возбуждаемых динамических систем по временному ряду // Тез. докл. «Нелинейные колебания механических систем: VI научная конференция», Нижний Новгород, 2002. С. 22–23.
95. Сысоев И.В. Моделирование неавтономных систем по временному ряду // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2001», Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. С. 98–101.
96. И.В. Сысоев. Метод реконструкции неавтономных систем под произвольным гладким воздействием и его возможное применение // Материалы I конференции молодых учёных «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов, 2006, — С. 50–51.
97. И.В. Сысоев. Метод реконструкции неавтономных систем под произвольным гладким воздействием и его возможное применение // Тезисы II конференции молодых учёных ИРЭ РАН, Москва, 2006 (принято к печати).
98. И.В. Сысоев. Подход к реконструкции систем под гладким хаотическим и шумовым воздействием // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2003», Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2006 (принято к печати).

99. Патент на изобретение №2004115469/28(016733). Способ определения характеристик нелинейных устройств. Безручко Б.П., Селезнёв Е.П., Смирнов Д.А., Сысоев И.В., МПК 7 G 01 R 27/08, 31/27.
100. Pya V. Sysoev, Dmitry A. Smirnov, Yeugeny P. Seleznev, and Boris P. Bezruchko. Reconstruction of nonlinear characteristics and equivalent parameters from experimental time series. // Proceedings of “The second international conference on circuits and systems for communication”, Moscow, Russia, 2004. 3 p.
101. И.В. Сысоев, Е.П. Селезнёв, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко. Реконструкция эквивалентных характеристик нелинейных полупроводниковых устройств по временным рядам // Сборник материалов VII Международной школы-конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 2004 — С. 114-116.
102. И.В. Сысоев, Д.А. Смирнов, Е.П. Селезнёв, Б.П. Безручко. Реконструкция нелинейных характеристик и эквивалентных параметров по экспериментальным временным рядам // Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Радиотехника и связь». — Саратов, 2005. — С. 114–117.
103. Сысоев И.В., Смирнов Д.А., Селезнёв Е.П., Безручко Б.П. Оценка эквивалентных параметров полупроводниковых элементов в режиме больших амплитуд и хаоса // Сборник материалов XII Всероссийской школы-конференции «Нелинейные волны — 2004», Н. Новгород, 2004. — С. 112–113.
104. Сысоев И.В., Захаревич А.М. Эквивалентные представления полупроводникового диода и оценка характеристик этих эквивалентных представлений методами реконструкции по временным рядам // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2003», Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2003. С. 258–261.

105. B.P. Bezruchko, E. Mosekilde, D.A. Smirnov, I.V. Sysoev. Reconstruction of multidimensional multiparametric model equations from time series using Bock's algorithm (applications to single nephron model and physiological nephron data) // Proceedings of International Symposium "Topical problems of nonlinear wave physics", Nizhny Novgorod, Russia, 2003. P. 42–43.
106. Сысоев И.В. Применение алгоритма множественной стрельбы для эмпирического моделирования динамики нефрона // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2002», Саратов, Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002. С. 46–49.
107. И.В. Сысоев, А.С. Ульянов, О.В. Мареев, Б.П. Безручко. Реконструкция моделей голосовых связок // Сборник материалов XIII Всероссийской школы-конференции «Нелинейные волны — 2006», Н. Новгород, 2006. — С. 151–152.
108. Сысоев И.В. Реконструкция уравнений модели голосовых связок человека // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2005», Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005. С. 191–194.
109. Сысоев И.В. Реконструкция модельных отображений по хаотическим временным рядам // Материалы межвузовской конференции «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ», Саратов, 2001. С. 150–151.
110. Сысоев И.В. Виды модельных отображений и их описательные возможности // Сборник материалов научной школы-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2000», Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2000. С. 127–130.