

К работе № 1. «Реконструкция ОДУ по векторному ряду».

Цель. Применить на практике изложенный алгоритм:

- научиться подбирать оптимальные значения количества точек для численного дифференцирования и порядков полиномов,
- ознакомиться с трудностями численного дифференцирования при наличии шумов,
- отследить зависимость эффективности восстановленной модели от количества данных и уровня шума.

Задача. Восстановить дифференциальные уравнения с полиномиальными нелинейностями по хаотической временной реализации эталонной динамической системы, заданной преподавателем (например, системы Ресслера).

Примечание: При выполнении работы полученные результаты (файл отчета report.txt) желательно после окончания занятия перемещать в свой каталог. Иначе следующие пользователи будут их автоматически изменять. Результаты работы (таблицы, графики) можно оформлять одним из двух способов: в электронном виде (с помощью Microsoft Excel и т.п.) или в бумажном виде (обычный отчет о лабораторной работе).

- 1) С помощью программы **FlowSimulator** (приложение 1) получите и запишите векторный временной ряд, содержащий 10000 векторов: не зашумленные хаотические реализации эталонной системы, заданной преподавателем. Например, для системы Ресслера при $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$, шаг интегрирования 0.01, *интервал выборки 0.1* (при этих параметрах временной ряд содержит примерно 60 точек на характерном периоде колебаний).
- 2) Восстановите дифференциальные уравнения с помощью программы **VectorODE** (приложение 2). Используйте тренировочный векторный временной ряд длиной $N_{train} = 600$ векторов. Примите «правильное» численное значение интервала выборки (для указанного примера $\Delta t = 0.1$). Используйте для дифференцирования минимальное количество точек $m = 2$. Постройте модели, изменяя значения порядков полиномов K_1, K_2, K_3 (в пределах от

0 до 3). Постройте графики $\varepsilon_1(K_1)$, $\varepsilon_2(K_2)$, $\varepsilon_3(K_3)$. По этим графикам найдите оптимальные значения K_1, K_2, K_3 (погрешность практически не уменьшается при дальнейшем увеличении порядка). Какова погрешность ε_{coeff}^1 и дальности прогноза $\tau_{pred,i}^2$ для оптимальной модели?

- 3) Теперь постройте модель с найденными оптимальными K_1, K_2, K_3 , используя для дифференцирования $m = 3$ (центрированная схема). Сравните погрешность восстановления коэффициентов ε_{coeff} и дальности прогноза с п. 2.
- 4) Запишите хаотическую временную реализацию той же системы (не зашумленную) длиной 30000 векторов (шаг интегрирования 0.01 и интервал выборки 0.01 — примерно 600 точек на характерном периоде колебаний).
- 5) Используйте для построения модели $N_{train} = 6000$ векторов, $m = 3$ и найденные оптимальные значения K_1, K_2, K_3 . Сравните достигнутую дальность прогноза и погрешность ε_{coeff} с полученными в п.2 и п.3.
- 6) Запишите временной ряд п.5 с добавленными шумами (для отношения сигнал/шум³ 80 дБ и 60 дБ).
- 7) По зашумленным рядам восстановите уравнения при фиксированных оптимальных значениях порядков полиномов и различных значениях N_{train} (для $N_{train} = 100, 300, 600, 1500, 3000, 6000, 10000$). Помните, что предварительно для эффективного дифференцирования нужно подобрать оптимальное значение m . Постройте графики $\varepsilon(N_{train})$, $\tau_{pred}(N_{train})$ и $\varepsilon_{coeff}(N_{train})$ для какой-либо переменной. Как меняется τ_{pred} с ростом уровня шума в системе?

¹ Погрешность расчета коэффициентов определяйте только по порядку величины («на глазок»), используя файл отчета.

² Обратите внимание: если дальность прогноза оказалась равной длине тестового участка L_{test} , это значит, что дальность прогноза не выяснена (она на самом деле больше). Нужно проверить модель снова, увеличив L_{test} .

³ Отношение сигнал/шум измеряется по формуле $20 \log_{10} \frac{\sigma_{signal}}{\sigma_{noise}}$ (дБ), где σ_{signal} — стандартное отклонение сигнала. При записи зашумленного ряда с помощью программы **MapSimulator** укажите соответствующее значение параметра `std` (standard deviation — стандартное отклонение шума σ_{noise}). Его необходимо рассчитать (по порядку величины), зная амплитуду колебаний сигнала.

К работе № 2. «Реконструкция ОДУ по скалярному ряду».

Цель. Применить изложенный алгоритм реконструкции:

- Научиться подбирать оптимальные значения параметров алгоритма построения модели,
- познакомиться с методом Брумхеда-Кинга для оценки размерности,
- познакомиться с трудностями вычисления нескольких производных при наличии шума даже малой интенсивности,
- отследить зависимость качества модели от длины тренировочного временного ряда и уровня шума.

Задача. Реконструировать ОДУ временным реализациям⁴

- координаты y системы Ресслера,
- координаты x системы Ресслера (здесь можно использовать при восстановлении уравнений дробно-рациональную функцию, чтобы сравнить коэффициенты восстановленных и исходных уравнений, а можно выбрать и полином, который будет аппроксимацией этой функции).

Примечание: При выполнении работы полученные результаты (файл отчета report.txt) желательно после окончания занятия перемещать в свой каталог. Иначе следующие пользователи будут их автоматически изменять. Результаты работы (таблицы, графики) можно оформлять одним из двух способов: в электронном виде (с помощью Microsoft Excel и т.п.) или в бумажном виде (обычный отчет о лабораторной работе).

1. С помощью программы **FlowSimulator** (приложение 1) получите и запишите хаотическую скалярную временную реализацию координаты y системы Ресслера (не зашумленную) длиной 30000 значений при значениях параметров, заданных преподавателем (например, $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$, шаг интегрирования 0.01, интервал выборки 0.01).
2. С помощью программы **ScalarODE** (приложение 3) реконструируйте дифференциальные уравнения. Используйте для построения модели 6000 точек

($D = 3$ и $m = 5$). Постройте модели с полиномом различных порядков K (от 0 до 5). Постройте графики $\tau_{pred}(K)$ ⁵ и $\varepsilon(K)$. Определите оптимальное значение порядка полинома.

3. Запишите тот же временной ряд с добавленным шумом (для отношения сигнал/шум⁶ 100 дБ, 80 дБ, 60 дБ). Постройте по зашумленным рядам длиной 10000 значений модели с $D = 3$ и найденным оптимальным значением K (убедитесь в том, что для вычисления производных теперь требуется большее число m) Обратите внимание на собственные значения матрицы ковариаций (файл `s_values.txt`) и сделайте оценку размерности. Для наиболее зашумленного ряда постройте график, аналогичный приведенному на рис.6. Постройте графики $\tau_{pred}(\sigma_{noise})$ и $\varepsilon_{coeff}(\sigma_{noise})$.
4. Запишите при тех же условиях, что и в п.1, хаотическую временную реализацию координаты x системы Ресслера.
5. *Не обязательное.* Используйте для построения модели $N = 6000$, $D = 3$ и $m = 5$. Постройте модель с рациональной функцией в правой части, подберите нужные значения порядков полиномов. Сравните восстановленные значения коэффициентов с истинными (для этого нужно предварительно преобразовать систему Ресслера (10), приведя слагаемые в правой части к общему знаменателю; свободный член в знаменателе должен быть равен 1 – для этого числитель и знаменатель можно поделить на одно и то же число).
6. По временному ряду п.4 постройте модель, используя стандартную полиномиальную аппроксимацию ($N = 6000$, $D = 3$, $m = 5$). Меняя порядок K от 0 до 7, постройте графики $\tau_{pred}(K)$ и $\varepsilon(K)$ и подберите оптимальное значение K .

⁴ Для анализа подобраны временные реализации такой системы, для которой можно сравнить восстановленные по временному ряду значения коэффициентов с исходными значениями. То есть уравнения этой системы имеют вид (6) с полиномом или рациональной функцией F или приводятся к нему.

⁵ Обратите внимание: если дальность прогноза оказалась равной длине тестового участка L_{test} , это значит, что дальность прогноза не выяснена (она на самом деле больше). Нужно проверить модель снова, увеличив L_{test} .

⁶ Отношение сигнал/шум измеряется по формуле $20 \log_{10} \frac{\sigma_{signal}}{\sigma_{noise}}$ (дБ), где σ_{signal} — стандартное отклонение сигнала. Таким образом, при записи зашумленного ряда с помощью программы **MapSimulator** укажите соответствующее значение параметра `std` (standard deviation — стандартное отклонение шума σ_{noise}). Его необходимо рассчитать (по порядку величины), зная амплитуду колебаний сигнала.