

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

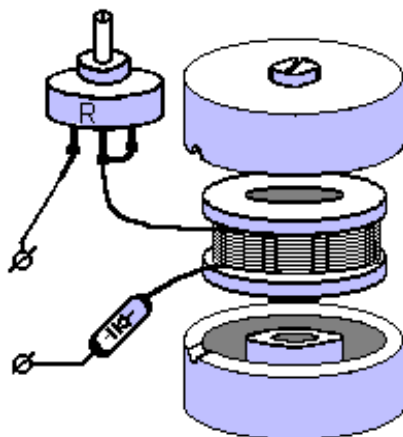
---

Кафедра электроники, колебаний и волн  
Колледж прикладных наук

САРАТОВСКИЙ ФИЛИАЛ  
ИНСТИТУТА РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ РАН  
Учебно-научная лаборатория  
«Нелинейная динамика (физический эксперимент)»

Б.П.Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК



Саратов, 1999

**УДК 530.18**

**Нелинейный электрический маятник, Б.П.Безручко, М.Д. Прохоров, Е.П. Селезнев, — Саратов, Издательство ГосУНЦ «Колледж», 1999, 33 с.**

**Аннотация**

Исследуется электрическая цепь, состоящая из катушки индуктивности, резистора и диода с *p-n* переходом (колебательный контур с диодом). При достаточно больших амплитудах внешнего периодического воздействия этот «электрический маятник», имеющийся в любом современном телевизоре или радиоприемнике, демонстрирует удивительное разнообразие видов колебаний, включая хаотические. Изучая их иерархию, невольно задумываешься о законах устройства мира, если происходящее с крошкой полупроводника и куском проволоки столь сложно.

Целями работы являются:

- знакомство с методами экспериментального исследования колебательных процессов в нелинейных системах (наблюдение временных реализаций и спектров, построение фазовых портретов и стробоскопических сечений, построение бифуркационных диаграмм);
- демонстрация возможностей некоторых потоковых и дискретных математических моделей, среди которых такие эталоны, как нелинейный осциллятор и квадратичное отображение, для описания динамики реальной системы.

Подготовлено при поддержке ФЦП «Интеграция», грант № 696.3.

**Составители: д.ф.-м.н. Безручко Б.П., к.ф.-м.н. Прохоров М.Д., к.ф.-м.н. Селезнев Е.П.**

**Рецензент: д.ф.-м.н. Усанов Д.А.**

**Саратовский государственный университет, 1999**

## Содержание

	Стр.
Введение	4
1. Постановка задачи	6
2. Собственные колебания в цепях с диодами	7
3. Вынужденные колебания при периодическом воздействии	9
4. Структура бифуркационных множеств в пространстве параметров контура с диодом при гармоническом воздействии	12
5. Математические модели контура с диодом	15
5.1. Модель с непрерывным временем	15
5.2. Дискретные модели	16
6. Экспериментальная установка	20
7. Практическое задание	22
8. Приложение 1	23
9. Приложение 2	26
10. Список литературы	29
11. Контрольные вопросы	30
12. Источники опасности и правила безопасной работы	31

## Введение

Цепь, состоящая из катушки индуктивности и конденсатора (колебательный контур) — эталонный объект радиофизики, электрический аналог механического маятника. Это важнейший радиотехнический узел, в различных вариантах представленный в любом радиоприемнике и телевизоре. Аналогично тому, как свойства механического маятника определяются его формой и параметрами, процессы в контуре зависят от конструкции используемых элементов. В простейшем случае, когда обкладки воздушного конденсатора соединены витками проволоки, рис. 1а,

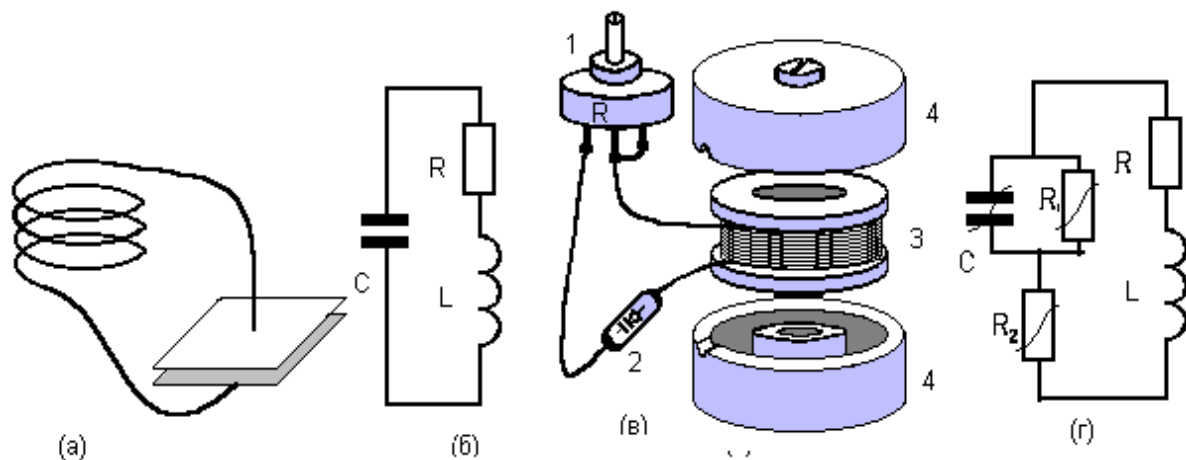


Рис. 1. Простейший колебательный контур (а) и его эквивалентная схема (б). Вид исследуемой цепи (в): 1 — резистор, 2 — варакторный диод, 3 — катушка, намотанная медным проводом на диэлектрическом каркасе, 4 — сердечник из карбонильного железа, в который вставляется катушка; (г) эквивалентная схема цепи, в которой диод представлен совокупностью нелинейных емкости и сопротивлений.

параметры  $L, C, R$  элементов практически не зависят от величин токов и напряжений, а эквивалентная схема (модель) цепи имеет вид рис. 1б. Процессы в таком «электрическом маятнике» описываются уравнением *линейного диссипативного осциллятора*:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — динамическая переменная (заряд),  $\delta = R/2L$  — коэффициент диссипации,  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

Выведя систему из состояния равновесия, и предоставив ее самой себе (например, зарядив конденсатор от внешнего источника и замкнув цепь), можно убедиться, что в ней при не очень большом затухании и любых разумных начальных условиях совершаются квазигармонические колебания, имеющие частоту  $\omega^1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  и затухающие по закону  $\exp(-\delta t)$  [1]. Вынужденные движения при периодическом внешнем воздействии также не отличаются разнообразием: это могут быть лишь колебания с периодом, равным периоду воздействия ( $T$ ), амплитуда и фазовые свойства которых зависят от соотношения  $\omega^1$  и частоты внешнего воздействия  $\omega = 2\pi / T$ . При совпадении  $\omega^1$  с  $\omega$  или высшими гармониками сигнала воздействия  $n\omega$ , где  $n=2,3,4,\dots$ , имеют место *резонансы* — амплитуда колебаний увеличивается. Это важнейшее свойство определило широкое использование колебательных контуров в радиотехнике для решения задач селекции сигналов (выделения нужных частот).

Включение в цепь нелинейных элементов<sup>1</sup>, эквивалентные  $L, R, C$ -параметры которых зависят от величин токов и напряжений, приводит к поразительному расширению круга колебательных явлений, наблюдаемых в контуре. Так типичный для радиотехники «электрический маятник», рис. 1в, исследуемый в практической части работы, при гармоническом внешнем воздействии демонстрирует иерархию вынужденных движений различной сложности: гармонических, сложных периодических, беспорядочных (хаотических). Спектр колебаний, амплитуда которых достаточно велика, оказывается насыщенным высшими гармониками и субгармониками<sup>2</sup> частоты воздействия или становится сплошным. То есть временные масштабы движений уже не стро-

---

<sup>1</sup> Катушек с сердечниками из ферромагнитных материалов, конденсаторов с сегнетоэлектриком между обкладками (варикондов) или современных полупроводниковых аналогов конденсаторов — варакторных диодов (варикапов, см. приложение 1),  $p$ - $n$  переходов транзисторов и т.п.

<sup>2</sup> Приставка «суб», происходящая от латинского «sub» (под). Частоты субгармоник меньше частоты воздействия.

го навязаны внешним воздействием, как было в линейной цепи. Уравнение линейного осциллятора (1) моделирует динамику такого «маятника» лишь при условии малости колебаний. Для описания всего спектра колебательных явлений в контуре с диодом требуются нелинейные дифференциальными уравнения или отображения.

Нелинейные *LRC*-цепи уже полвека используются в качестве параметрических генераторов, перестраиваемых селективных элементов, умножителей и делителей частоты, даже предлагались в качестве запоминающих элементов ЭВМ. Этот перечень «профессий» расширился после того, как Линсей в 1981 году опубликовал сообщение о наблюдении хаотических колебаний в гармонически возбуждаемой цепи с катушкой индуктивности и варакторным диодом [2]. С тех пор рассматриваемая колебательная система, недорогая и доступная, одна или в ансамбле с себе подобными, стала активно использоваться для демонстрации и экспериментальных исследований феномена динамического хаоса — одного из наиболее значимых откровений науки XX века. Цепь с диодом стали применять и при конструировании источников шумовых сигналов.

## 1. Постановка задачи

Следует подчеркнуть что, само по себе наличие нелинейных элементов является необходимым, но недостаточным условием сложной динамики интересующей нас простой системы, рис. 1в. Требуется обеспечить еще и значения параметров, при которых она демонстрирует сложное поведение. Руководствуясь информацией о свойствах элементов и соображениями по выбору параметров, изложенными в приложениях, можно изготовить контур с диодом, эквивалентная схема которого в диапазоне частот 10–80 кГц представлена на рис. 1г. В отличие от схемы, рис. 1б, здесь вместо одной постоянной емкости *C* имеется, моделирующий полупроводниковый диод комплекс из сопротивлений и емкостей, которые зависят от величин токов и напряжений.

Далее приводятся сведения о собственных (п. 2) и вынужденных колебаниях таких цепей при гармоническом внешнем воздействии (п. 3,4).

В практической части работы Вам предстоит разобраться со множеством колебательных режимов (типов вынужденных колебаний) контура при *импульсном* воздействии. Требуется исследовать «устройство» бифуркационных множеств в его пространстве параметров, структуру аттракторов в пространстве состояний. Для облегчения задачи приведены математические модели нелинейного маятника и некоторые результаты их численных исследований. Эта априорная информация поможет вам не запутаться в хитросплетениях нелинейных режимов реальной цепи.<sup>3</sup>

## 2. Собственные колебания в цепях с диодами

Воздействуем на  $LR$ -диод цепь импульсным сигналом от источника напряжения и проанализируем колебательный процесс после окончания импульса (этот момент примем за начало отсчета  $t=0$ ) — рис. 2. Будем повторять воздействие *лишь после прихода системы в состояние равновесия*, а ее начальное состояние задавать, регулируя амплитуду, полярность и длительность импульса воздействия. Оказывается, что вид колебательного процесса существенно отличается для различных диодов. В зависимости от свойств конкретного образца диода собственные движения в системе при выборе начальной точки далеко от положения равновесия могут быть условно разделены на следующие «чистые» типы:

А) «Емкостной» — колебания по форме близки к затухающим гармоническим, рис. 2а, при этом ток и напряжение сдвинуты по фазе на величину, близкую  $\pi/2$ . С ростом  $R$  увеличивается скорость затухания колебаний. Временной интервал между соседними экстремумами зависимостей  $U(t)$ ,  $I(t)$  — условный пери-

---

<sup>3</sup> Представления о том, что Вас ожидает, можно получить, рассмотрев рис. 7 и 8.

од — увеличивается с ростом  $L$  и амплитуды колебаний. Его значение при очень малых амплитудах мы обозначим  $T^1$ .

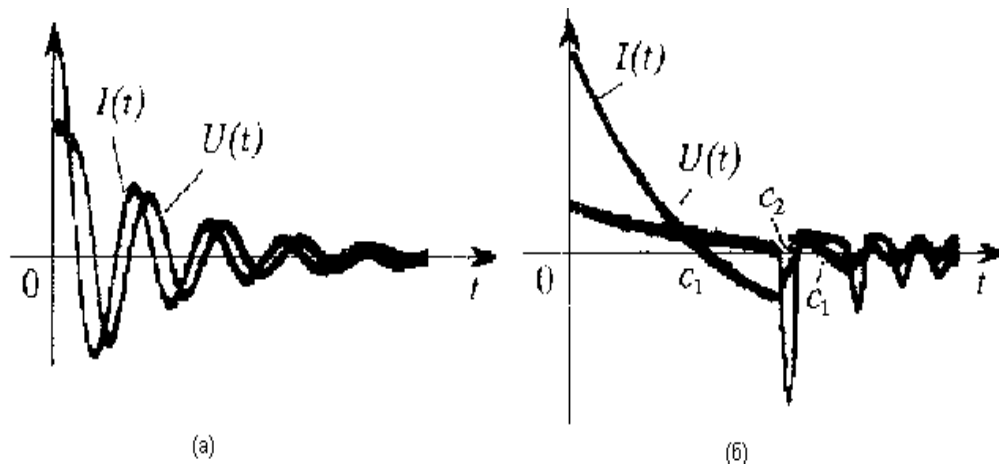


Рис. 2 Осциллограммы собственных колебаний в цепи с диодами после окончания действия импульса напряжения положительной для диода полярности; (а) — для диода «емкостного» типа, (б) — для диода «релаксационного» типа.

Б) «Релаксационный» тип поведения характеризуется пилообразным видом зависимости  $I(t)$  с протяженными участками  $C_1$ , имеющими отрицательный наклон ( $dI/dt < 0$ ), и короткими участками  $C_2$ , имеющими большую положительную крутизну, рис. 2б. Первым участкам соответствует медленное уменьшение положительного напряжения на диоде, а участкам с  $dI/dt > 0$  — большие пики напряжения отрицательной полярности. Амплитуда пиков и расстояние между ними  $T_i$  зависят от начального тока и параметров  $R$  и  $L$  цепи.

В) «Диссипативный» — процессы экспоненциально затухают. С диодами этого типа система не демонстрирует сложных колебаний, поэтому они далее рассматриваться не будут.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> На фазовой плоскости  $I-U$ , где  $I$  — ток в цепи, а  $U$  — напряжение на диоде, первому виду соответствует скручивающаяся спираль, витки которой не пересекаются, во втором случае спираль сильно деформирована и траектория имеет самопересечения, а в третьем случае портрет вырождается в линию.



В общем случае собственные колебания в контурах с диодами, имеют признаки «емкостного» и «релаксационного» типов поведения (АБ-тип). При больших отклонениях от положения равновесия система ближе к Б-типу поведения, а при уменьшении амплитуды колебаний — к А-типу. Именно такой тип диода будет использоваться в практической части работы. Поэтому при уменьшении амплитуды колебания в контуре все более соответствуют наблюдаемым в цепи с воздушным конденсатором, рис. 1а, и лучше описываются моделью линейного осциллятора (1), а их частота приближается к  $\omega^1 = 2\pi / T^1$ .

Есть основания считать, что свойства А-типа определяются процессами в области *p-n* перехода, а Б-типа — связаны с инжекцией неосновных носителей в базу диода и конечным временем их жизни в базе (см. приложение 1).

### **3. Вынужденные колебания при периодическом воздействии**

Будем периодически подталкивать маятник, не давая ему вернуться в состояние устойчивого равновесия. Результат в значительной степени зависит от способа воздействия. Для начала, рассмотрим гармоническое воздействие, которое вносится с помощью источника с малым внутренним сопротивлением, включенного в цепь последовательно, рис. 3а (см. приложение 2). Наличие периодического внешнего воздействия определяет необходимость введения еще одной динамической переменной — фазы воздействия. Это расширяет размерность фазового пространства до трех. Расширенное фазовое пространство неавтономной системы в эксперименте удобно представлять в координатах  $U, I, \Phi$ , где  $\Phi = \sin(\omega t)$ <sup>5</sup>. При использовании на оси фаз линейного масштаба ( $\Phi = \omega t$ ) проекции фазового портрета на плоскости  $U-\Phi$ ,  $I-\Phi$  являются ничем иным, как временными реализациями на-

---

<sup>5</sup> В классических работах по качественной теории дифференциальных уравнений в этой ситуации используется цилиндрическое фазовое пространство.

пряжения и тока, см. рис. 3б. Проекция на плоскость  $U-I$ , не зависят от выбора масштаба по оси фаз.

Типичные временные реализации и фазовые портреты колебаний при гармонического воздействия приведены на фотографиях в средней и правой колонках рис. 3б. Примеры типичных временных реализаций тока при возбуждении цепи *импульсами* ЭДС, полярность которой «прямая» для диода, представлены на рис. 4. Импульсы следуют через равные интервалы времени  $T$  (*период воздействия*), т.е. с частотой  $\omega = 2\pi/T$ . Несмотря на малую длительность импульсов, за время их действия собственные колебания быстро затухают, так как при протекании прямого тока эквивалентная емкость диода, рис. 1г, шунтируется малым активным сопротивлением  $R_1$ . По окончании импульса колебания начинаются с практически одинаковой фазы, рис. 4а,б, а между импульсами временная реализация состоит из цугов (последовательностей) затухающих собственных колебаний.

В зависимости от амплитуды и периода воздействия, уровня затухания, вида нелинейности, а также начальных условий, в системе могут устанавливаться различные повторяющиеся движения — *циклы*. Времена повторения (*периоды циклов*) равны периоду воздействия или кратны ему — составляют величину  $kT$ , где  $k$  может иметь значения 1,2,3,... . Вариантов периодических движений может быть очень много, но их описание удастся систематизировать. Например, по признаку подобия<sup>6</sup> все циклы можно условно разделить на две группы. В каждой из них сохраняются некоторые особенности формы временных реализаций, а также предельных циклов в фазовом пространстве. Первую группу составляют циклы, период которых равен периоду воздействия  $1T$ , существующие в области низких частот  $\omega < \omega^1$ . Такие циклы обычно называют *субгармоническими*. Так как период воздействия велик по сравнению с временным масштабом собственных движений, на временных реализациях этих циклов в общем

---

<sup>6</sup> Подобие означает пропорциональное изменение геометрических размеров при качественном сохранении формы.

случае имеется несколько максимумов (рис. 4б, верхний ряд фотографий на рис. 3в). Вторую группу составляют циклы периода  $kT$ , где  $k=2,3,\dots$ , которые наблюдаются при больших частотах воздействия  $\omega \sim (0.5 - 2)\omega_1$ . Примеры таких циклов представлены на рис. 4а и в нижнем ряду фотографий на рис. 3в. Так как при увеличении амплитуды воздействия смена этих режимов сопровождается последовательным увеличением  $k$  на единицу, их на-

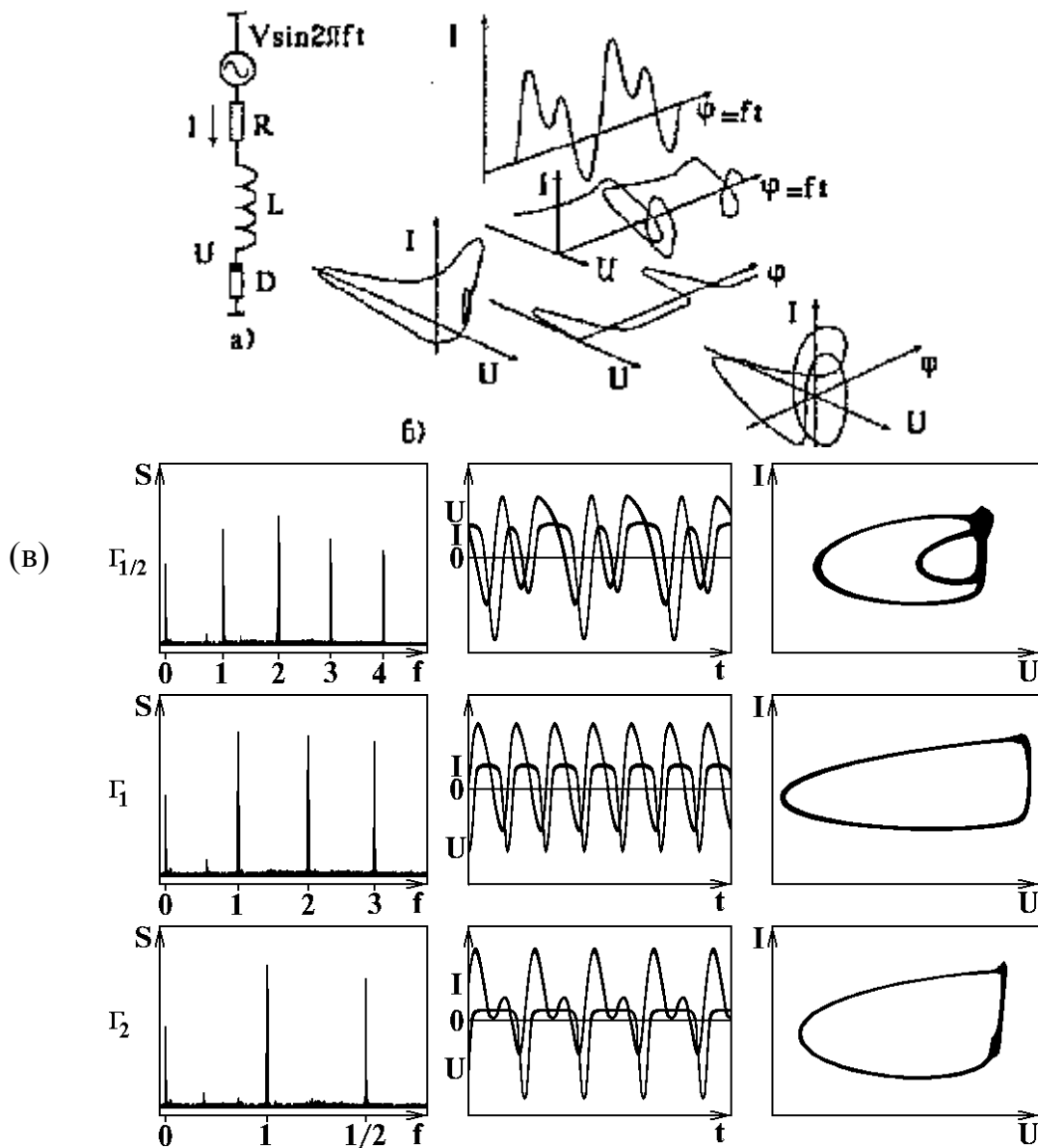


Рис. 3. (а) контур с диодом при внешнем периодическом воздействии; (б) его фазовое пространство; (в) примеры базовых циклов (слева спектры, в центре временные реализации, справа фазовые портреты).

зывают циклами «последовательности добавления периода». Достаточно традиционно условное обозначение циклов —  $m/k$ . Здесь  $k$  соответствует отношению периода воздействия к квазипериоду собственных колебаний (его можно оценить по числу максимумов на осциллограмме на интервале  $T$ ), а  $m$  — период цикла, измеренный в единицах периода воздействия.

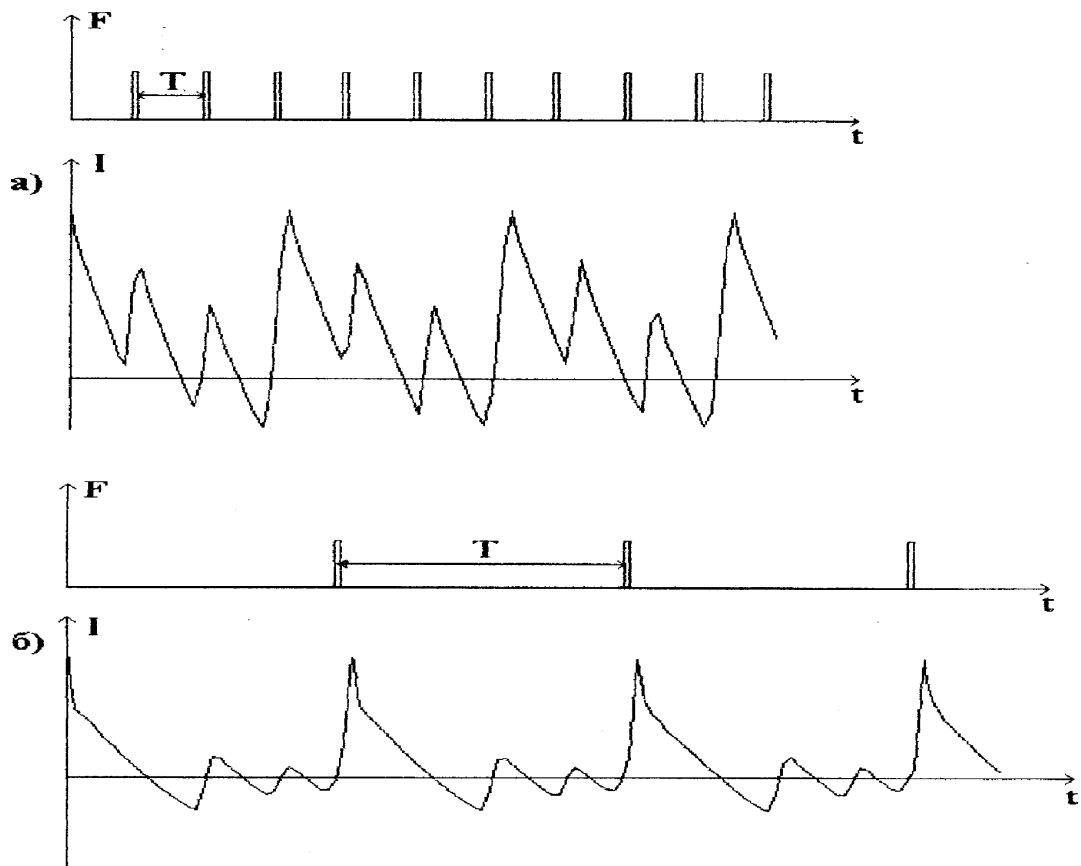


Рис. 4. Типичный вид временной реализации цикла «добавления периода» номера  $3$  (а) и «субгармонического» цикла номера  $1/3$  (б).

#### 4. Структура бифуркационных множеств в пространстве параметров контура с диодом при гармоническом воздействии

Воспользуемся рис. 5, на котором представлены результаты экспериментальных исследований бифуркационных множеств в пространстве параметров  $LR$ -диод цепи при гармоническом внешнем воздействии  $V\sin(\omega t)$ .

В качестве параметров используются амплитуда  $V$  и частота  $f=\omega/2\pi$  воздействия, а также величина сопротивления резистора  $R$ , связанная с линейной диссипацией в контуре<sup>7</sup>. Частоту воздействия удобно нормировать на частоту линейного (малосигнального  $V \rightarrow 1$ ) резонанса  $f_1$ . На рис. 5 представлена структура разбиения пространства параметров на области существования и эволюции различных колебательных состояний. При этом используются следующие обозначения: сплошные линии — линии безгистерезисных (мягких) бифуркационных переходов, штриховые — линии жестких переходов, заштрихованы области хаоса, цифры — период цикла в единицах периода воздействия.

Основные экспериментальные результаты, полученные при включении в цепь диодов типа АБ, сводятся к следующему:

- значения параметров, при которых существует и эволюционирует к хаосу определенный базовый цикл и движения на его основе, ограничены некоторой областью в пространстве параметров. На двумерных картинах (плоскостях параметров) их удобно изображать на отдельных листах, границы которых ограничены линиями седло-узловых бифуркаций, см. рис. 5в. В пространстве трех параметров (например, на рис. 5б это  $V, f, R$ ) области эволюции того или иного вида движений трехмерны. Самую обширную область параметров, в которой система демонстрирует сложную динамику, занимает набор циклов «последовательности добавления периода»  $\Gamma_k$  с  $k=1,2,3,\dots$  и движений на их основе. Сечение этой области плоскостью  $R=\text{const}>0$ , см. рис. 5в, де-

---

<sup>7</sup> Описанный набор динамических переменных и параметров системы определяется естественным желанием воспользоваться при анализе контура привычной осцилляторной моделью. Но он не полон, так как отсутствуют параметры, характеризующие нелинейность диода.

тально рассмотрено в [4]. При движении вдоль линии  $A$  смена базовых циклов представляет последовательность добавления периода;

- динамика системы упрощается с ростом линейных потерь, причем, циклы  $\Gamma_{1/k}$  более критичны к диссипации (с ростом  $R$  области их существования сокращаются и исчезают раньше, чем для циклов «последовательности добавления периода»), рис. 5а;

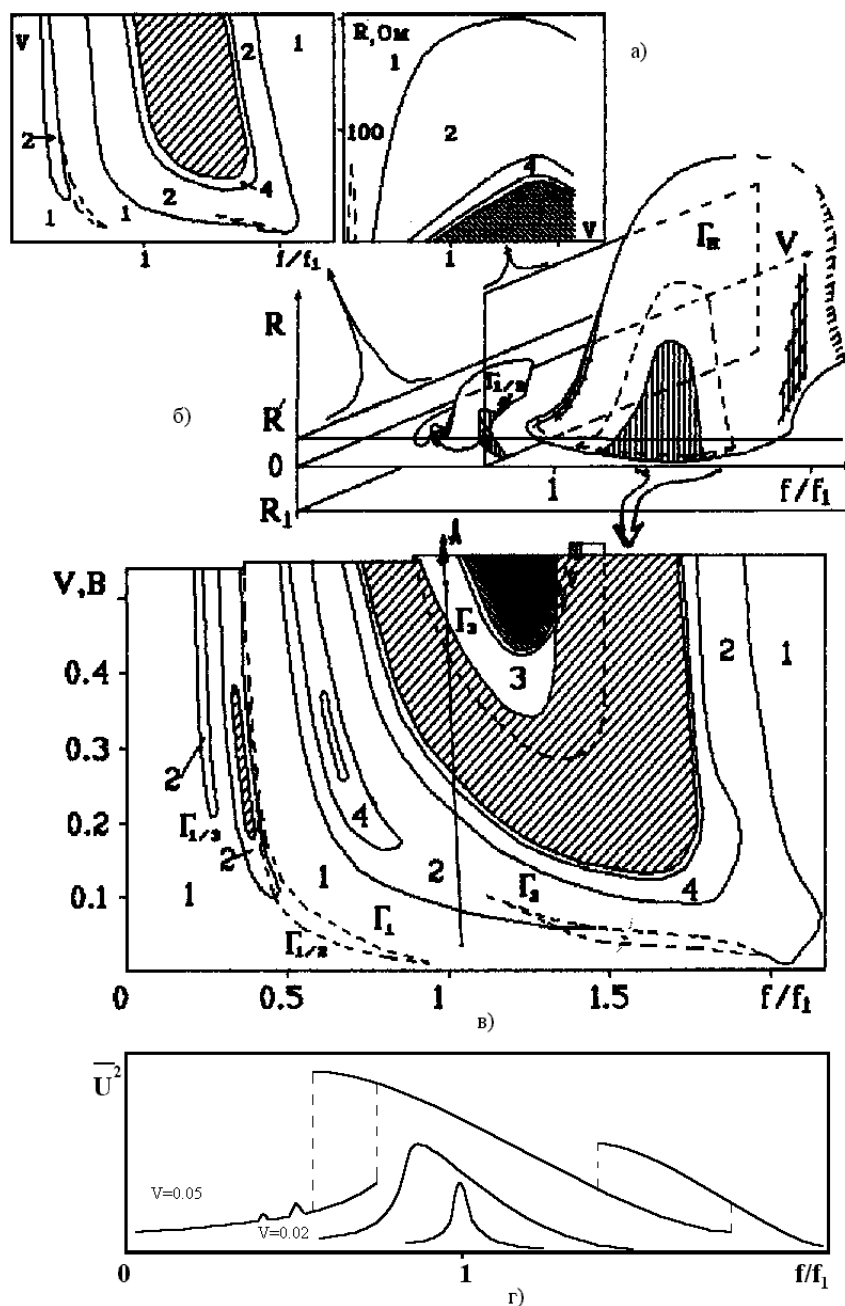


Рис. 5. Структура пространства параметров (а-в) и резонансные кривые (г) контура с диодом при гармоническом внешнем воздействии по данным экспериментальных исследований. Штрихами показаны линии гистерезисных (жестких) переходов. На рис. а,в заштрихованы области хаоса, цифрами показан период колебаний в соответствующих областях.

• при движении в пространстве параметров циклы могут переходить один в другой мягко. Области их существования в этом случае можно разделить лишь условно, взяв в качестве по-

граничных точек значения параметров, соответствующих максимальному размаху вынужденных движений (резонансу). При жестком переходе имеет место гистерезис. Границами областей существования различных циклов на плоскости параметров в последнем случае являются линии складок. Сказанное иллюстрируют резонансные кривые — зависимости среднего квадрата напряжения на диоде;

- типичным сценарием перехода к хаосу в неавтономном контуре является последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, в системе имеют место перемежаемость цикл-хаос и жесткие (гистерезисные) переходы, когда на границе областей бистабильности теряют устойчивость регулярные движения на базе одного цикла, а изображающая точка в фазовом пространстве попадает на хаотический аттрактор, сформированный на основе другого базового цикла.

## 5. Математические модели контура с диодом

Процессы в полупроводниковых диодах, свойства которых определяют нелинейность системы, наиболее строго анализируются с помощью уравнений в частных производных. Однако, в квазистатическом приближении диод можно рассматривать как двухполюсник с некоторыми эквивалентными свойствами (отражающими связь между напряжением на его контактах и током в подводящих проводах) и ограничиться обыкновенными дифференциальными уравнениями. Еще более простые модели удастся получить с помощью отображений, если ограничиться описанием не всех, а лишь части возможных движений.

### 5.1. Модель с непрерывным временем

Представим полупроводниковый диод в виде нелинейного конденсатора, емкость  $C_\delta$  которого описывается выражением  $C_\delta = C_0 / (1 - U / \phi)$ , где  $C_0$  — начальная емкость диода,  $U$  — напряжение на диоде,  $\phi$  — контактная разность потенциалов. Таким выражением описывается барьерная емкость сверхрезких  $p-n$



переходов. В этом случае уравнение цепи, рис. 3а, полученное на основе законов Кирхгоффа, будет иметь вид:

$$L di / dt + Ri + U = V \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $L$  — индуктивность катушки,  $R$  — активное сопротивление,  $i$  — ток в цепи,  $U$  — напряжение на конденсаторе,  $V$  — амплитуда внешнего воздействия,  $\omega$  — частота внешнего воздействия.

Проведем замену переменной, осуществив переход от тока в цепи к заряду конденсатора  $i = dq / dt$ . В этом случае уравнение будет иметь вид:

$$L d^2 q / dt^2 + R dq / dt + U = V \sin \omega t$$

Установим связь между зарядом и напряжением на конденсаторе. Известно, что  $dq = CdU$ , следовательно  $q = \int CdU$ , или  $q = \int C_0 dU / (1 - U / \varphi)$ . Проинтегрируем полученное выражение:  $q = C_0 \varphi \ln(1 - U / \varphi)$  и выразим напряжение как функцию заряда  $U = \varphi (\exp(q / C_0 \varphi) - 1)$ . Таким образом, уравнение цепи будет иметь вид:

$$L d^2 q / dt^2 + R dq / dt + \varphi (\exp(q / C_0 \varphi) - 1) = V \sin 2\pi ft$$

Введя безразмерное время  $\tau = \omega' t$ , (где  $\omega'^2 = 1 / LC_0$  — частота линейного резонанса) и сделав замену переменных  $x = q / \varphi C_0$ , получим уравнение нелинейного осциллятора Года:

$$d^2 x / d\tau^2 + r dx / d\tau + \exp x - 1 = A \sin p\tau, \quad (3)$$

где  $x$  — безразмерный заряд,  $r$  — коэффициент диссипации,  $A$  — безразмерная амплитуда внешнего воздействия,  $p = \omega / \omega'$  — безразмерная частота внешнего воздействия. Результаты численных исследований уравнения (3) представлены на рис. 6.

## 5.2. Дискретные модели

Модельное отображение можно получить, например, с помощью сечения Пуанкаре фазового пространства потоковой модели (3) или реальной системы. В неавтономной системе удобно так располагать секущую плоскость, чтобы ей соответствовало

постоянное значение фазы воздействия (на рис. 3б, нормалью к которой является ось  $\Phi$ ). Другим удобным сечением является плоскость  $dx/dt = 0$ , которую протыкает фазовая траектория в моменты, соответствующие максимумам временной зависимости  $x(t)$ . Формулы отображения должны устанавливать соответствие между координатами последовательных проколов. Воспользуемся тем, что после окончания импульсов воздействия (а этим моментам соответствует одинаковая фаза  $\Phi$ ), амплитуда колебаний максимальна, и установим связь между значениями  $x$  в два таких последовательных момента времени.

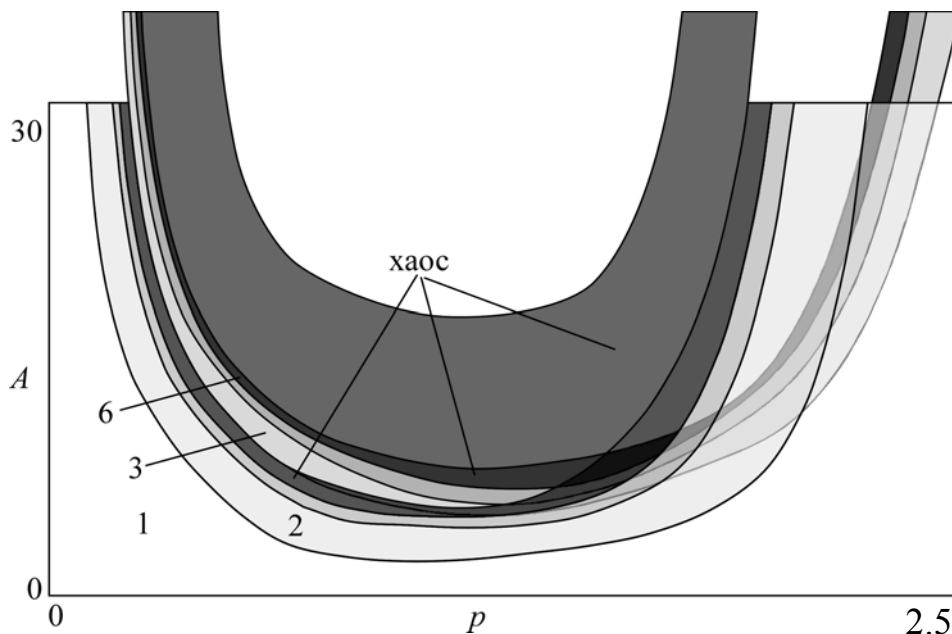


Рис. 6. Карта режимов осциллятора Тода (3).

а) Про моделируем временную реализацию субгармонических колебаний, рис. 4б, считая что в цуге (между импульсами воздействия)  $x(t)$  имеет вид затухающего по экспоненциальному закону косинуса, частота которого линейно зависит от начальной амплитуды:  $\omega_1 = 2\pi / T_1(1 + \beta x_0)$ , где  $\beta = \text{const}$ . Тогда в цуге, начинающемся в момент времени  $nT$ , зависимость переменной от времени можно представить как

$$x(t) = x_n \exp(-\delta t) \cos[2\pi t / T_1(1 + \beta x_n)],$$

если  $t$  отсчитывать от начала цуга. С учетом оговоренных в предыдущем разделе особенностей способа внесения импульсного воздействия начальная амплитуда следующего цуга равна:

$$x_{n+1} = x_n \exp(-d/N) \cos(2\pi/[N(1 + \beta x_n)]) + A, \quad (4)$$

где  $A$  — амплитуда воздействия,  $N = T_1/T$  — нормированная частота воздействия,  $d = \delta T_1$  — коэффициент линейной диссипации,  $\beta$  — коэффициент нелинейности.

б) Другое модельное отображение можно построить, опираясь на характерный вид временной реализации цикла «последовательности добавления периода», рис. 4а. Оно сложнее, чем (4), двумерное, и моделирует колебательные процессы маятника с «мягкой пружиной» при  $N \approx 0.8 - 2.0$ . Отображение имеет вид<sup>8</sup>:

$$x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n, y_n) + A \exp[-b^2 f^2(x_n, y_n)], & \text{если } f(x_n, y_n) > 0, \\ f(x_n, y_n) + A, & \text{если } f(x_n, y_n) \leq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n, & \text{если } x_{n+1} \leq x_n, \\ x_{n+1}, & \text{если } x_{n+1} > x_n, \end{cases}$$

где  $f(x_n, y_n) = \exp(-d/N) \{x_n - 4y_n/[N(m + \beta y_n)]\}$ .

Вывод отображения и некоторые результаты его численного исследования приведены в [5]. Карты режимов для динамических систем (3), (4) представлены на рис. 7 и 8.

в) В областях параметров, где какой-нибудь из базовых циклов с изменением любого из параметров демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода, хорошей моделью контура с диодом является одномерное квадратичное отображение. Любое отображение с квадратичным максимумом, например:

$$x_{n+1} = A - x_n^2, \quad (6)$$

где  $A$  — значение одного из параметров, отражает эволюцию любого упомянутого ранее цикла при изменении одного из парамет-

---

<sup>8</sup> Отображение (5) получено студентом ВКПН Жалниным А.Ю.

ров в интервале, где имеет место переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода — при перемещении по принадлежащему этому циклу листу на плоскости параметров. Эта модель не отражает многообразия базовых циклов и других описанных ранее особенностей нелинейной динамики контура, но является универсальной.

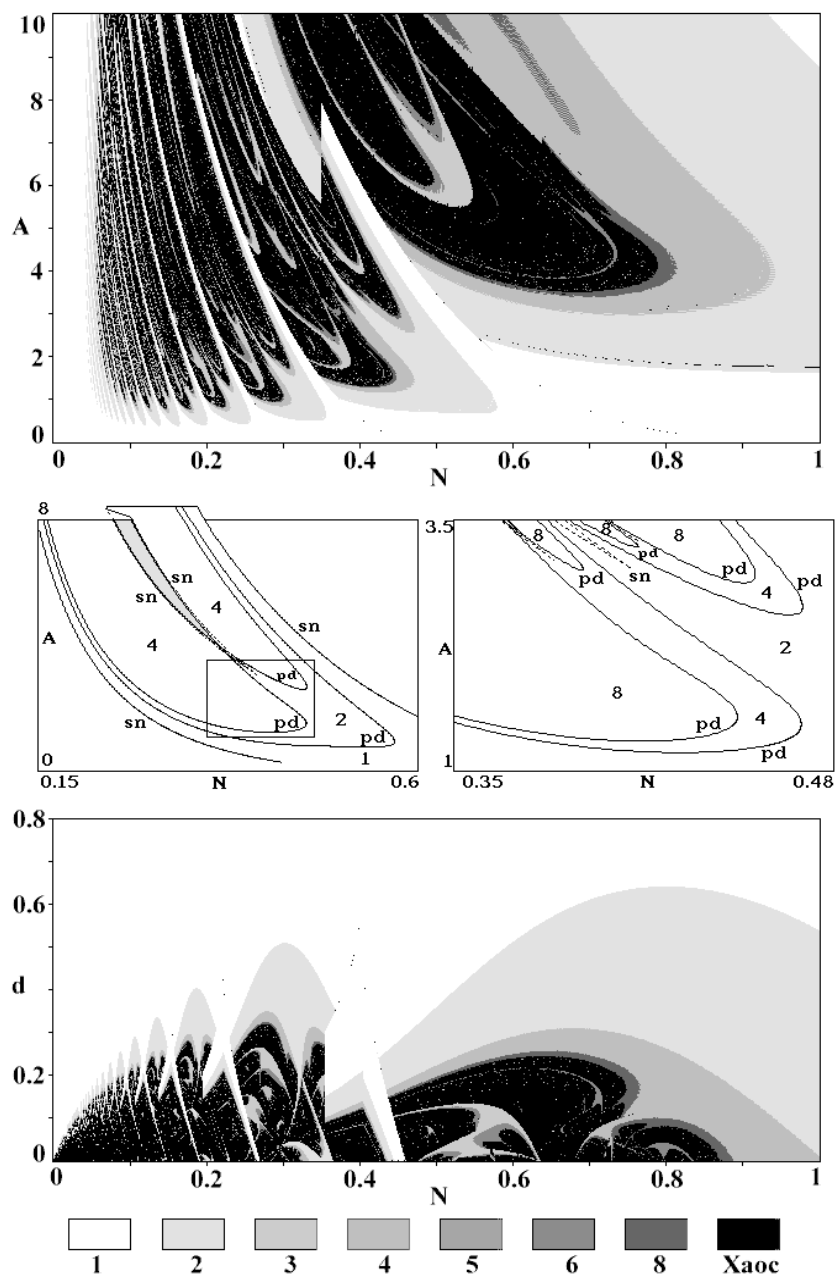


Рис. 7. Карты режимов модельного отображения (4) для субгармонических колебаний.

Таким образом, наиболее полно из рассмотренных моделей отражает динамику контура с диодом уравнение осциллятора То-да (3). Оно моделирует все семейства характерных циклов системы и особенности структуры пространства параметров. Дискретные модели (4) и (5) также хорошо описывают только одно из двух существующих семейств циклов — «субгармоническое» и «добавления периода». Отображение (6) универсально, но не отражает специфики рассматриваемого объекта.

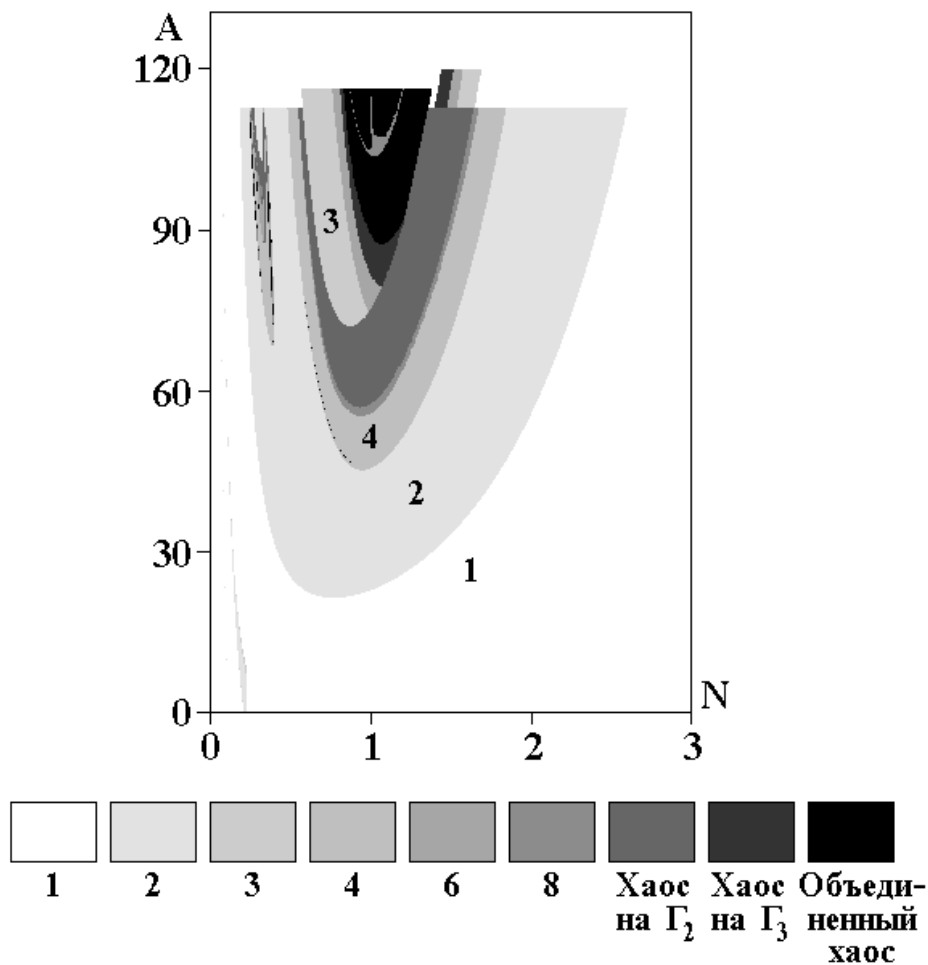


Рис. 8. Карта режимов отображения (5) для циклов «добавления периода».

## 6. Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 9а, а качественный вид напряжений и токов в отдельных точках схемы и на экране осциллографов — на рис. 9б.

Исследуемая цепь  $I$  расположена на плате, выделенной на схеме штриховой линией. В отличие от конструкции рис. 1в в цепь включен резистор  $R_1$  с малым сопротивлением, напряжение на котором пропорционально току в цепи. Цепь возбуждается сигналом с выхода  $A$  импульсного<sup>9</sup> генератора 2, который предварительно усиливается усилителем 3. Амплитуду импульсов  $V$ , рис. 1б, можно регулировать элементом управления «амплитуда» на передней панели генератора или, изменяя коэффициент усиления 3. Величина  $V$  измеряется с помощью импульсного вольтметра 7 или задается с помощью элементов управления (переключатели, потенциометры) генератора 2.

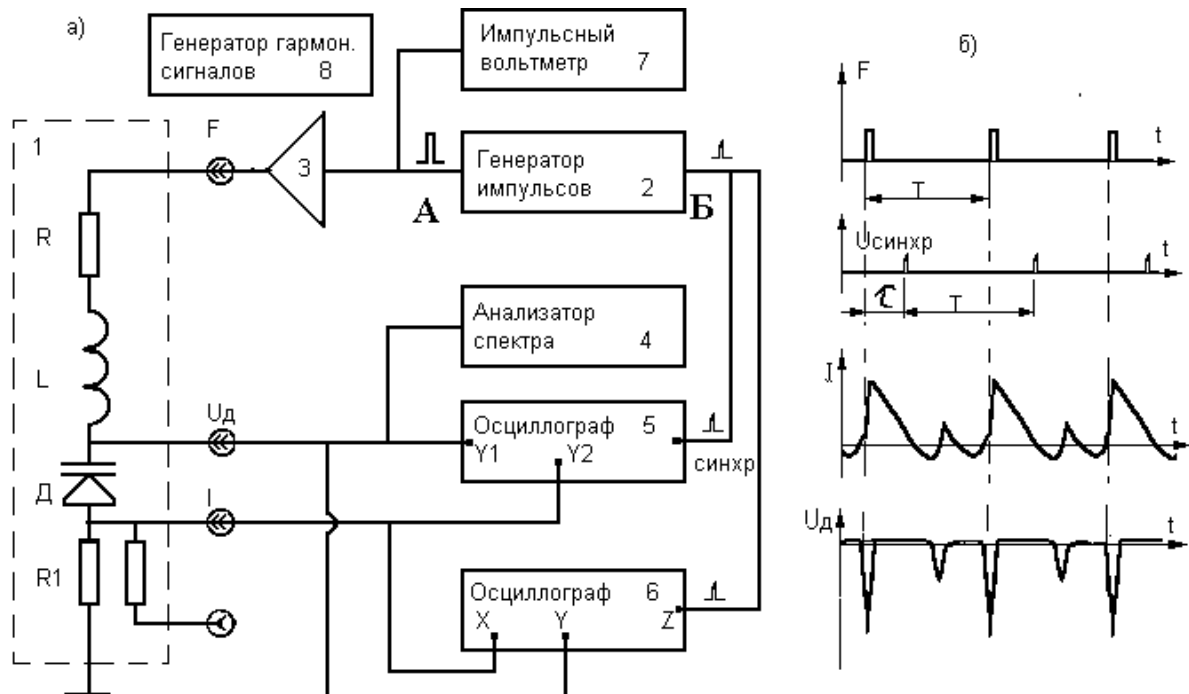


Рис. 9. Схема экспериментальной установки (а) и осциллограммы сигналов в некоторых ее точках (б).

Период следования  $T$  (или частота следования  $f=1/T$ ) и длительность импульсов  $T_u$  регулируется соответствующими элементами управления генератора. Напряжение с диода  $U_d(t)$  и напряжение на сопротивлении  $R_1$ , пропорциональное току  $I(t)$ ,

<sup>9</sup> При необходимости, импульсный генератор можно заменить источником гармонического сигнала  $\delta$ .

подаются на входы  $Y_{1,2}$  двухканального осциллографа 5, временная развертка которого синхронизируется сигналом с выхода  $B$  генератора сигнала воздействия 2. На экране этого осциллографа можно наблюдать временные реализации. Если вместо одного из этих сигналов на вход осциллографа подать напряжение с выхода  $A$  источника 2, предоставляется возможность сопоставить сигналы в точках цепи и внешнее воздействие. Кроме того, сигналы  $U(t)$  и  $I(t)$  подаются на входы  $X$  и  $Y$  (а после усиления на пластины  $X$  и  $Y$  электронно-лучевой трубки осциллографа 6. На его экране формируется фазовый портрет на плоскости  $U-I$ . На вход  $Z$  этого осциллографа подается дополнительный короткий импульс (строб-импульс) с выхода  $B$  генератора 2. Во время действия этого импульса увеличивается ток луча, так что на экране образуется яркая точка. Подсветка точки на фазовом портрете повторяется через период воздействия  $T$ . Таким образом, формируется стробоскопическое сечение — сечение Пуанкаре плоскостью постоянной фазы  $\Phi = \text{const}$ . Значение  $\Phi$  можно регулировать, изменяя длительность времени задержки  $\tau$  строб-импульса относительно импульса воздействия:  $\Phi = 2\pi\tau/T$ , рис. 9б. Регулировка  $\tau$  осуществляется элементом управления «задержка» генератора 2. Таким образом, можно рассматривать структуру аттрактора в фазовом пространстве системы, делая сечения в различных его местах.

## 7. Практическое задание

1. Закоротить катушку индуктивности проволочной переключкой и исследовать фазовый портрет колебаний при гармоническом воздействии на различных частотах (100 Гц, 500 Гц, 1000 Гц, 5 кГц, 10 кГц, 50 кГц и 100 кГц) и различных амплитудах воздействия. Истолковать полученные данные с помощью эквивалентных представлений диода, учитывая, что при стремлении частоты к нулю фазовый портрет вырождается в вольт-амперную характеристику (ВАХ) диода.

2. Исследовать резонансные свойства контура при импульсном периодическом воздействии для трех значений ампли-

туды импульсного воздействия ( $V=0.1; 2; 6$  В). Исследовать, каким видам колебаний (базовым циклам) соответствуют различные участки резонансных кривых.

3. Зарисовать 4–5 примеров базовых циклов (временные реализации, фазовые портреты, спектры) при импульсном периодическом воздействии.

4. Исследовать структуру бифуркационных множеств контура, возбуждаемого импульсной периодической силой, и построить карту режимов в указанной преподавателем области пространства параметров. Выделить на карте «маршруты движения» при которых наблюдаются типичные сценарии перехода к хаосу. Рекомендуем воспользоваться априорной информацией о качественных особенностях бифуркационных множеств различных математических моделей контура (см. приложение) и аналогичными данными, полученными при гармоническом воздействии, см. рис. 6.

5. Используя стробоскопическое сечение (сечение Пуанкаре), исследуйте структуру хаотического аттрактора, сформированного базе резонансного цикла, указанного преподавателем.

## **8. Приложение 1**

### **Полупроводниковые элементы с емкостными свойствами и физические механизмы стохастизации колебаний в контуре с диодом**

Хаотические колебания в периодически возбуждаемом контуре были обнаружены при включении в контур варакторного диода [1], но этот класс приборов не исчерпывает номенклатуры полупроводниковых элементов, свойства которых позволяют наблюдать сильно нелинейные колебательные состояния в этой системе. Далее мы будем называть диодом полупроводниковый элемент с двумя выводами и  $p-n$  переходом, рис. П.1.1а, в котором отсутствуют эффекты лавинного пробоя и туннелирования. Это могут быть варакторные, импульсные, выпрямительные диоды, участки эмиттер-база или коллектор-база биполярных тран-



зисторов, полевые транзисторы с  $p$ - $n$  переходами, фотодиоды. Строгое описание физики процессов в диоде требует его рассмотрения как распределенной системы (использования уравнений в частных производных) или сложных эквивалентных представлений, что составляет содержание толстых монографий. Мы же ограничимся коротким качественным описанием [6].

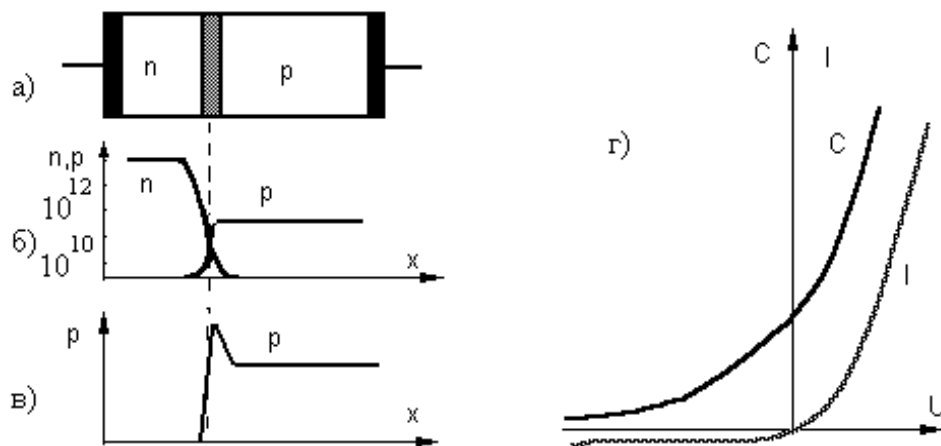


Рис. П.1.1. Структура диода с  $p$ - $n$  переходом (а); распределение примесей вдоль диода с плавным переходом (б); качественный вид распределения примеси в базе варакторного диода (в); качественный вид ВАХ и ВФХ диода ( $C$  - дифференциальная емкость) (г).

Свойства диодов определяются видом распределения концентрации примесей вдоль диода (между контактами): количеством и распределением акцепторов и доноров, внесенных в полупроводник с собственной проводимостью при создании двух контактирующих областей с  $p$  и  $n$  проводимостями. В типичном случае концентрация примеси в одной из половин диода на порядки больше чем в другой (например, в диоде с  $n^+$ - $p$  структурой имеется избыток электронов по сравнению с концентрацией дырок в  $p$  области, рис. П.1.1б). Область с большей концентрацией носителей называют эмиттером, а с меньшей — базой; база имеет относительно большое сопротивление. Для улучшения эксплуатационных качеств диодов различных типов, в них обеспечиваются те или иные особенности структуры. Например, в варакторных дио-

дах, используемых, как конденсаторы с электрически регулируемой емкостью, с целью улучшения их свойств обеспечивают профиль распределения концентрации примесей в базе с максимумом вблизи области перехода, рис. П.1.1в.

Внешнее напряжение меняет ширину перехода (и величину объемных зарядов в переходе). В результате, диод проявляет выпрямительные свойства: гораздо лучше проводит в одном направлении («прямом»), чем в другом («обратном»). Кроме того, при «прямых» напряжениях имеет место *инжекция* (введение) носителей из эмиттера в базу. Эти (неосновные) носители *рекомбинируют* (объединяются с основными носителями базы и исчезают), но тем не менее они существуют в течение некоторого конечного времени (времени жизни). На распределение зарядов влияет и *экстракция*, когда из приповерхностного слоя полупроводника забирается часть равновесных носителей. Поскольку новое распределение носителей устанавливается не сразу, диод обладает инерционностью по отношению к *достаточно быстрым* изменениям тока или напряжения. Это эквивалентно емкости, которую можно считать подключенной параллельно *p-n* переходу. Эквивалентную емкость принято разделять на две составляющие: *барьерную емкость*, отражающую перераспределение зарядов в переходе, и *диффузионную емкость*, связанную с перераспределением в базе. Соотношение емкостей различно при разных полярностях приложенного напряжения: при «прямой» главную роль играет диффузионная, а при «обратном» — барьерная. Обе емкости нелинейны; например, величина барьерной емкости  $C_b \sim 1/\sqrt{U}$ , где  $U$  — «обратное» напряжение. Описанные свойства в какой-то степени отражают: 1) зависимость дифференциальной емкости от напряжения смещения  $C(U)$  (вольт-фарадная характеристика — ВФХ), которая определяется при малых амплитудах воздействия в режиме гармонических колебаний (*на некоторой фиксированной частоте*); 2) зависимость тока через диод от напряжения смещения  $I(U)$  — в статических условиях или при очень медленном изменении напряжения и токов, когда инерци-

онность не проявляется (ВАХ). Качественный вид ВАХ и ВФХ представлен на рис. П.1.1г.

Значительный разброс параметров полупроводниковых элементов, обусловленный особенностями полупроводниковой технологии, деградацией при хранении и использовании, приводит к очень широкому разбросу условий возбуждения нелинейных колебаний даже в экспериментах с однотипными диодами (в том числе, взятыми из одной заводской упаковки).

## 9. Приложение 2

### Соображения по выбору параметров исследуемой цепи

Для наблюдения сложных колебаний в периодически возбуждаемой  $LR$ -цепи с диодом необходимо обеспечить *достаточный уровень нелинейности* реактивных элементов (зависимости их параметров от токов и напряжений) и *достаточные амплитуды колебаний* токов и напряжений *на этих элементах*. Например, при больших колебаниях тока в цепи, рис. 1б, изменение напряжения на емкости будут малым, если окажется значительной величина сопротивления  $R$ . Наличие потерь (эквивалентного сопротивления) в цепи не способствует усложнению движений, *даже если это сопротивление нелинейно*. Обсудим особенности исследуемой цепи с помощью эквивалентных представлений.

Каждый из элементов цепи обладает набором свойств, которые в определенном диапазоне частот и значений токов и напряжений могут быть эквивалентны свойствам моделей, составленных из сопротивлений, емкостей и индуктивностей. Так, для контура, рис. 1, в диапазоне характерных частот переменных токов и напряжений порядка  $10^4$ – $10^6$  Гц можно использовать эквивалентную схему рис. П.2.1<sup>10</sup>, где серым фоном выделены эквиваленты катушки и диода, а штриховыми линиями — элементы

---

<sup>10</sup> При более низких частотах емкостные свойства диода несущественны, а на более высоких частотах необходимо учитывать еще ряд особенностей, например, паразитные емкости проводов, индуктивности выводов и т.д.

источника внешнего воздействия:

1) *Катушка* представлена соединением индуктивности  $L_k$ , сопротивления  $R_k$  и емкости  $C_k$ , которые характеризуют соответственно самоиндукцию, потери энергии (на нагрев, излучение, перемагничивание магнетика) и наличие межвитковых электрических полей.<sup>11</sup> В общем случае при наличии магнетика индуктивность зависит от величины протекающего тока, но для условий, предусмотренных в практической части данной работы, все параметры катушки можно считать постоянными. Это обусловлено ограничением величин токов в цепи значениями, при которых уровень магнитных полей катушки ниже, требуемого для насыщения сердечника. Не влияя на нелинейность, сердечник снижает потери на излучение, позволяет уменьшить число витков катушки, а следовательно и величины активного сопротивления  $R_k$  (потерь на нагрев) и паразитной межвитковой емкости  $C_k$ , которые могут существенно повлиять на процессы в цепи.

2) *Диод* (см. приложение 1). Эквивалентным представлением диода является соединение сопротивления базы  $R_{\partial 2}(I)$  с параллельно включенными нелинейными емкостью  $C_{\partial}(U)$  и сопротивлением  $R_{\partial 1}(U)$ , где  $U$  — напряжение на диоде. Емкостные свойства диода определяются процессами в  $p-n$  переходе и базе и в определенной степени могут характеризоваться вольт-фарадной характеристикой, измеренной на некоторой фиксированной частоте.

Принятые наборы параметров, которыми характеризуются диоды, связаны с областями их применения. Например, варакторные диоды характеризуются параметрами, определяющими возможности перестройки частоты и изменение селективности колебательных цепей и распределенных резонаторов, в которые

---

<sup>11</sup> Таким образом, катушка уже сама по себе представляет колебательный контур с собственной частотой  $\omega_k = 1 / \sqrt{LC_k}$ . И для того, чтобы ее собственные колебания не усложняли наблюдаемых процессов в контуре, требуется уменьшить их амплитуду, снизив добротность (увеличив  $R_k$ ) или сдвинуть  $\omega_k$  за рабочую область частот.

они включаются. Для импульсных диодов основными являются параметры, характеризующие их инерционные свойства. Специальные параметры, характеризующие способность демонстрировать сложные колебательные режимы и хаос в колебательных цепях, пока не приняты. Но результаты экспериментов и численного моделирования позволяют говорить о том, что для усложнения и хаотизации колебаний, в частности, желательна относительно большая крутизна ВФХ, по сравнению с ВАХ (более сильная реактивная нелинейность, чем диссипативная). Данные экспериментов позволяют говорить о значимости для субгармонических колебательных режимов процессов в  $p-n$  переходе и выделить решающую роль явления инжекции и конечного времени существования неосновных носителей в базе для возбуждения циклов «последовательности добавления периода».

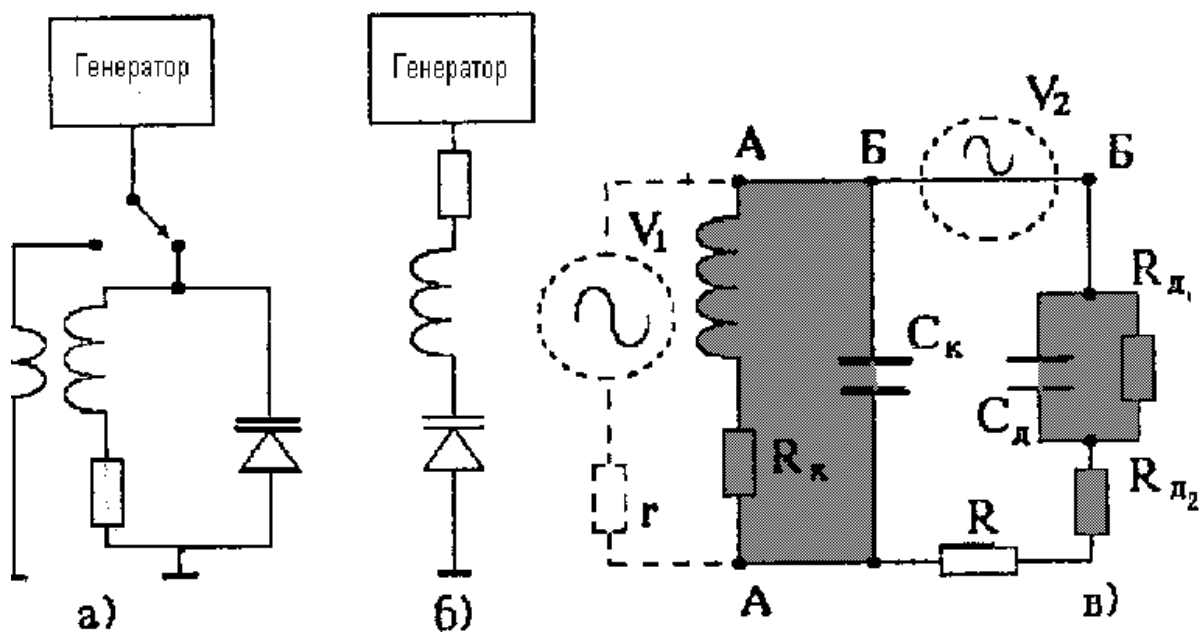


Рис. П.2.1. Схема подключения контура к источнику переменного воздействия (а, б) и эквивалентная схема цепи (в).

3) *Сопротивление  $R$*  характеризует потери энергии в резисторе и соединительных проводах.

4) *Внешнее воздействие.* Выбор способа подключения к контуру источника переменной эдс, рис. П.2.1а,б, диктуется же-

ланием внести в цепь наименьшие потери энергии. Случаю рис. П.2.1а соответствует подключение источника эдс  $V_1$  с большим внутренним сопротивлением  $r$  к точкам  $A-A$ , а в случае рис. П.2.1б источник  $V_2$  с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением включается между точками  $B-B$ .

Наличие  $C_k$  и  $R_k$  приводит к повышению амплитуды воздействия  $V$ , необходимой для проявления нелинейных эффектов. Так, емкость катушки увеличивает суммарную емкость  $C$  в контуре и уменьшает ее относительное изменение

$$(C_\delta(U) - C_\delta(0))/(C_k + C_\delta(0))$$

при колебаниях напряжения  $U$  на диоде. На  $R_k$  возникает постоянное напряжение обратной для диода полярности, которое сдвигает рабочую точку в область, где зависимость  $C_\delta(U)$  имеет меньшую, чем при  $U=0$  крутизну, см. рис. П.1.1г приложения 1. В свою очередь,  $R_k$  повышает уровень диссипации энергии в контуре и тем самым не дает развиваться большим амплитудам колебаний. Кроме того, могут сказаться и собственные резонансные свойства катушки индуктивности. Так, при использовании источника воздействия с малым внутренним сопротивлением, рис. П.2.1в, напряжение между точками  $B-B$ , равное эдс источника, делится между диодом и параллельным колебательным контуром  $L_k, R_k, C_k$ . На частотах, близких собственной резонансной частоте катушки, падение напряжения на диоде уменьшается и может оказаться недостаточным для проявления его нелинейных свойств и возбуждения сильно нелинейных колебательных режимов.

## 10. Список литературы

1. Linsay P.S. "Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator", *Phys. Rev. Lett.*, 1981, Vol.47, N.19, P.1349–1352.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, М.: Наука, 1984.
3. Мун Ф. Хаотические колебания, М.: Мир, 1990, 312 с.

4. Кипчатов А.А. «Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура», *Изв. ВУЗов, Радиофизика*, 1990, Т.33, N.2, С.182–190.
5. Безручко Б.П., Жалнин А.Ю., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. «Дискретные нелинейные модели периодически возбуждаемой  $RL$ -диод цепи», *Изв. ВУЗов «Прикладная нелинейная динамика»*, 1997, Т.5, N.2,3, С.48–62.
6. Степаненко И.П. Основы микроэлектроники, М.: Сов. радио, 1980.

### 11. Контрольные вопросы

- 1) Источники нелинейности в цепи, рис. 1в. Какие механизмы определяют нелинейность диодов с  $p$ - $n$ -переходами?
- 2) Поясните различие эквивалентных схем цепей, представленных на рис. 1а и 1в.
- 3) Каково влияние диссипации, включая нелинейную диссипацию, на усложнение колебательных режимов нелинейного «электрического маятника»?
- 4) Каковы характерные признаки, по которым можно упорядочить множество колебательных состояний в периодически возбуждаемом контуре с диодом?
- 5) Основные структурные элементы пространства параметров дискретных моделей контура с диодом и уравнения осциллятора Тода.
- 6) Определите место одномерного квадратичного отображения (6) в описании сложной динамики контура с диодом, возбуждаемого гармонической силой.
- 7) Основной сценарий перехода к хаосу в рассматриваемой системе при гармоническом воздействии и в моделях исследуемой цепи.
- 8) Поясните схему экспериментальной установки и практическое задание.
- 9) Какие особенности реальной системы способствуют успеху приближенного описания процессов в ней с помощью одномерного отображения (4)?

## **12. Источники опасности и правила безопасной работы**

1. Основным источником опасности в работе является сеть переменного напряжения 220 В, а также высокие постоянные напряжения внутри корпусов приборов.
2. Студентам запрещается вскрывать приборы, вынимать шнуры питания, менять предохранители и отсоединять заземляющие провода. Это могут делать лишь инженеры, обслуживающие установку.
3. Рекомендуется прикасаться к приборам лишь одной рукой, не соприкасаясь с заземляющими проводами и шинами.
4. Включение и отключение установки производит инженер или преподаватель.