

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет нелинейных процессов
Кафедра электроники, колебаний и волн
САРАТОВСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ИНСТИТУТА РАДИОТЕХНИКИ
И ЭЛЕКТРОНИКИ РАН
Учебно-научная лаборатория
«Нелинейная динамика (физический эксперимент)»

Поддержано Американским фондом гражданских исследований и развития – CRDF (проект REC-006) и грантом «Ведущие научные школы» (проект РФФИ 00-15-96673)

Б.П. БЕЗРУЧКО, Ю.И. ЛЕВИН, Д.А. СМИРНОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Учебное пособие

Государственный учебно-научный центр «Колледж»

Саратов, 2001

УДК 530.18

Безручко Б.П., Левин Ю.И., Смирнов Д.А. Моделирование неавтономных систем по временным рядам: учебное пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. 44 с.

Рассматриваются подходы к построению модельных дифференциальных уравнений по временным рядам – последовательностям значений наблюдаемой величины, измеренных в дискретные моменты времени. Наиболее сложной, творческой, неподдающейся алгоритмизации частью такого моделирования является выбор структуры уравнений. Если выбор сделан успешно с учетом специфики объекта, можно получить хорошую модель даже там, где универсальные подходы оказываются бесполезными. Эта важнейшая черта моделирования по временному ряду рассматривается в данной работе на примере объектов, находящихся под внешним гармоническим воздействием. Предлагается убедиться в эффективности специальных «технологий» моделирования: пользуясь готовыми программами, провести реконструкцию неавтономных дифференциальных уравнений, а также по экспериментальным временным рядам построить модели реальных нелинейных электрических цепей.

Предназначено для практических занятий по курсу «Математическое моделирование» для студентов факультета нелинейных процессов и физического факультета Саратовского государственного университета.

Рецензент: старший научный сотрудник Саратовского отделения института радиотехники и электроники РАН, к.ф.-м.н. Селезнев Е.П.

УДК 530.18

© Б.П. Безручко,
Ю.И. Левин,
Д.А. Смирнов, 2001
© Изд-во ГосУНЦ
«Колледж», 2001

Содержание

1. Введение.....	4
2. Общая схема моделирования по временным рядам и стандартная форма модельных дифференциальных уравнений.....	6
3. Особенности реконструкции неавтономных дифференциальных уравнений (работа № 1).....	10
3.1. <i>Трудности универсальных технологий</i>	10
3.2. <i>«Технология» реконструкции неавтономных уравнений</i>	11
3.3. <i>Практическое задание</i>	14
<i>Контрольные вопросы</i>	16
4. Моделирование нелинейных электрических цепей (работа № 2).....	16
4.1. <i>О сложностях моделирования реальных объектов</i>	16
4.2. <i>Контур с переключаемыми конденсаторами</i>	17
4.3. <i>Контур с полупроводниковым диодом</i>	18
4.4. <i>Различные модели контура с диодом</i>	20
4.5. <i>Практическое задание</i>	21
<i>Контрольные вопросы</i>	23
Приложение 1. Описание программы FlowSimulator.....	24
Приложение 2. Описание программы ScalarODE.....	27
Приложение 3. Описание программы VectorODE.....	34
Приложение 4. О модели контура с переключаемыми конденсаторами	40
Приложение 5. О модели контура с полупроводниковым диодом.....	41
Литература.....	42

1. Введение

В последние два десятилетия активно развиваются методы построения динамических моделей в достаточно распространенной на практике ситуации «черного ящика», когда данные об объекте представляют собой временную реализацию одной или нескольких наблюдаемых величин, а информация о природе механизмов, структуре объекта и т.п. отсутствует или недостаточна. На практике обычно приходится иметь дело с *временными рядами* (дискретными последовательностями значений измеряемых величин), поэтому процедуру построения модели называют «реконструкцией по временному ряду» [1-6]. Если измеряются численные значения только одной величины, то ряд называют *скалярным*. В том случае, когда наблюдению и измерению в каждый момент времени t_i доступны несколько величин: x_1, x_2, \dots, x_D , ряд называют *векторным* (так как можно сказать, что в каждый момент времени измеряются координаты D -мерного вектора x).

С 1987 года развиваются *универсальные* способы построения динамических моделей по временным рядам. Исследователь может применять их автоматически, не задумываясь над выбором вида и структуры уравнений. Бывают ситуации, когда такие универсальные заготовки оказываются весьма эффективными¹, но в реальном нелинейном многомерном мире это не может быть правилом. Проиллюстрируем это на примере простой колебательной цепи (рис.1).

Дифференциальные уравнения линейного колебательного контура, состоящего из конденсатора, катушки индуктивности и резистора с постоянными параметрами (C, L, R), имеют одинаковую структуру — уравнение линейного осциллятора, — будучи записанными для разных наблюдаемых (физических величин, характеризующих этот объект). Относительно заряда на емкости q имеем:

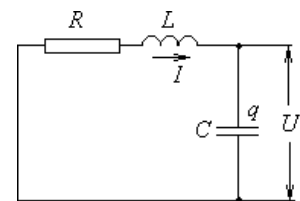


Рис.1. Линейный колебательный контур.

¹ В предыдущих работах по восстановлению дифференциальных и разностных уравнений Вы могли убедиться в работоспособности стандартной формы представления уравнений (с аппроксимацией искомых функций алгебраическими полиномами).

$$L \cdot d^2q/dt^2 + R \cdot dq/dt + q/C = 0. \quad (1)$$

Точно такую же форму (с заменой q на другую переменную) уравнения принимают для напряжения на емкости $U = q/C$ и для силы тока $I = dq/dt$. В этом случае реконструкция модели будет успешна по реализации любой из величин.

Однако ситуация в корне меняется, если, например, емкость конденсатора зависит от заряда $C = C(q)$. Здесь C – дифференциальная емкость: $C = dq/dU$, а напряжение – нелинейная функция заряда $U = U(q)$. Если, например, $C(q) = C_0/(1 - 3\alpha q^2)$, то $U(q) = q + \alpha q^3/C_0$. В этом (нелинейном) случае уравнения, записанные относительно различных наблюдаемых, существенно отличаются друг от друга. Так, относительно заряда q модельное уравнение имеет вид:

$$L \cdot d^2q/dt^2 + R \cdot dq/dt + U(q) = 0. \quad (2)$$

А относительно силы тока I уравнение выглядит следующим образом:

$$L \cdot d^2I/dt^2 + R \cdot dI/dt + I \cdot dU(q)/dq = 0, \quad (3)$$

где первые два слагаемых в левой части аналогичны (2), а последнее в корне отличается. Вместо $U(I)$ оно равно $I \cdot dU(q)/dq$, где q – иррациональное (содержащее радикалы) выражение, в которое входят I и dI/dt .² Успех моделирования такого объекта по временному ряду сильно зависит от выбора наблюдаемой переменной и соответствующей структуры модельных уравнений. Если наблюдаемая — заряд, то достаточно использовать для аппроксимации полином 3-го порядка (подробнее см. [7] или раздел 2), если наблюдаемая – сила тока, то подобрать аппроксимирующую функцию значительно труднее.

Задача еще более усложняется, если моделируются реальные объекты, для которых не представляется возможным угадать структуру уравнений, опираясь на известные законы природы или другие общие соображения. Выбор структуры модели должен опираться на априорную информацию об объекте и результаты дополнительного анализа исходного временного ряда. Так, если на

² Если бы напряжение U было необратимой функцией от q , то уравнения второго порядка для I вообще нельзя было бы записать, поскольку тогда q неоднозначно зависит от I и I .

объект действует внешняя периодическая сила, источник которой не связан с объектом (не зависит от его состояния), то в спектре мощности исходного ряда должны быть дискретные составляющие на частоте воздействия и ее гармониках. Далее мы рассмотрим технологию и примеры реконструкции неавтономных³ модельных ОДУ для систем такого типа.

Будем рассматривать лишь временные ряды, которые содержат значения наблюдаемой величины v , измеренные через равные интервалы времени Δt (Δt называют *выборочным интервалом*). Члены ряда v_i – значения наблюдаемой величины в дискретные моменты t_i – будем называть *точками*, i – порядковым номером точки или *дискретным временем*, количество точек в ряде N – *длиной ряда*. Для обозначения самого ряда будем использовать фигурные скобки:

$$\{v_i\}_{i=1}^N = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N\}.$$

2. Общая схема моделирования по временным рядам и стандартная форма модельных дифференциальных уравнений

Пусть источником информации об объекте является векторный временной ряд $\{x_i\}_{i=1}^N$ (из D -мерных векторов), т.е. в каждый момент времени t_i наблюдению доступны D величин: $x_1(t_i), \dots, x_D(t_i)$. Пусть временные реализации достаточно гладкие и можно считать, что измеренных значений $x_1(t_i), \dots, x_D(t_i)$ достаточно для однозначного описания состояния объекта в момент времени t_i . Тогда модель строят в виде [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_D), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_D), \\ &\dots \\ \dot{x}_D &= F_D(x_1, x_2, \dots, x_D). \end{aligned} \tag{4}$$

Для построения модели используют временной ряд из первых N_{train} значений каждой из наблюдаемых (его называют «тренировочным»). Продолжение тре-

³ Неавтономной называют систему с явной зависимостью от времени в правой части

нировочного временного ряда («тестовый» ряд длиной N_{test}) используют *позже* для проверки эффективности построенной модели (рис.2).

Задача построения модели сводится к тому, чтобы

1. по временному ряду $\{x_i\}$ рассчитать временной ряд $\left\{ \frac{dx(t_i)}{dt} \right\}$,
2. подобрать функции F_j , аппроксимирующие зависимости dx_j/dt от x ,
3. проверить эффективность построенной модели.

Первую задачу решают путем численного дифференцирования⁴. А для решения второй искомые функции представляют в виде суммы известных базисных функций с неизвестными коэффициентами. Стандартным подходом является представление функций F_j полиномами порядков K_j :

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^{K_j} c_{j, l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{k=1}^D x_k^{l_k}, \sum_{k=1}^D l_k \leq K_j. \quad (5)$$

Затем вычисляют значения коэффициентов, которые обеспечивают наилучшее соответствие модели и

экспериментальных

данных (*подгонка* модели к временному ряду).

Обычно для этого используют метод наименьших квадратов, т.е. подбираются такие значения коэффициентов

$c_{j, l_1, l_2, \dots, l_D}$, которые мини-

мизируют среднеквадратичные ошибки аппроксимации ε_j ($j = 1, \dots, D$):

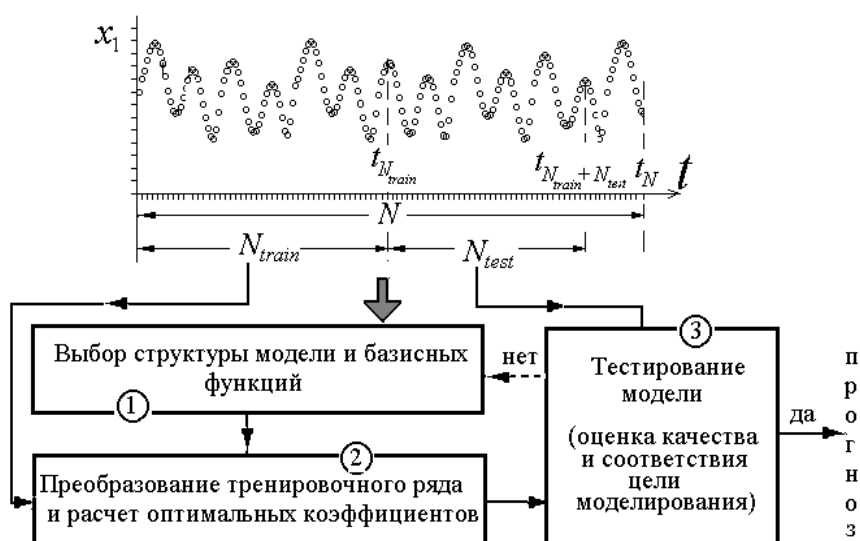


Рис.2. Схема процесса моделирования по временному ряду.

⁴ Отметим, что временной ряд производных содержит меньше значений, чем исходный ряд, т.к. для расчета производной в данный момент времени, используется несколько (скажем, m) соседних точек. Таким образом, если исходный тренировочный ряд содержал N_{train} значений, то ряд производных будет содержать $N_{train} - m + 1$ значений (см. [7]).

$$\varepsilon_j^2 = \frac{1}{N_{train} - m + 1} \sum_i \left[\frac{dx_j(t_i)}{dt} - F_j(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_D(t_i)) \right]^2 = \min. \quad (6)$$

После подгонки модели необходимо проверить ее *эффективность*. Если проверяемая модель окажется не эффективной, то нужно выбрать другой вид функций F_j (например, другие порядки полиномов) и повторить подгонку модели. Критерии эффективности определяются целями моделирования. Критериями могут служить, например, прогностические возможности модели или качественное сходство ее поведения с поведением объекта (подробнее см. [7]).

В том случае, когда наблюдению доступен лишь скалярный временной ряд $\{v_i\}_{i=1}^N$, процедура построения модели включает в себя еще один предварительный этап (по сравнению с моделированием по векторному ряду). Необходимо выяснить, как изменялся во времени вектор состояния системы, т.е. по скалярному временному ряду $\{v_i\}$ построить («восстановить») временной ряд векторов состояния $\{\mathbf{x}_i\}$. Эту процедуру называют *реконструкцией* фазовой траектории [8,9]. Один из часто используемых методов — метод последовательного дифференцирования, согласно которому координатами вектора состояния в момент времени t_i являются последовательные временные производные наблюдаемой в этот момент:

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= v(t_i), \\ x_2(t_i) &= \frac{dv(t_i)}{dt}, \\ &\dots, \\ x_D(t_i) &= \frac{d^{D-1}v(t_i)}{dt^{D-1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выбор размерности модели D можно осуществить на основе предварительного анализа временного ряда⁵. Другой подход состоит в последовательном переборе различных значений размерности, пока не найдется удовлетворительная модель. Модель имеет вид [4]

⁵ Используются методы Брумхеда – Кинга [10], Грассбергера – Прокаччия (см., например, [11]), ложных ближайших соседей [12].

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\dots \\
\dot{x}_D &= F_D(\mathbf{x}),
\end{aligned}
\tag{8}$$

где $x_1 = v$, а F_D — искомая функция, аппроксимирующая зависимость $\dot{x}_D(\mathbf{x})$. Она может быть представлена, например, полиномом (5) некоторого порядка K , значения коэффициентов которого также определяются методом наименьших квадратов.

Несмотря на специфический вид с единственной неизвестной функцией, форма (8) имеет большую степень общности. К ней ценой увеличения размерности системы можно свести любую систему ОДУ. Например, пусть наблюдаемой величиной v является координата x нелинейного осциллятора, находящегося под действием внешней гармонической силы:

$$\ddot{x} + \gamma_0 \dot{x} + f_0(x) = A_0 \cos(\omega_0 t), \tag{9}$$

где функция $f_0(x)$ определяет конкретный вид осциллятора. Для осциллятора Дуффинга $f_0(x) = x + x^3$. Уравнение (9) можно представить в виде неавтономной системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -\gamma_0 x_2 - f_0(x_1) + A_0 \cos(\omega_0 t),
\end{aligned}
\tag{10}$$

или *автономной системы трех уравнений*:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -\gamma_0 x_2 - f_0(x_1) + A_0 \cos x_3, \\
\dot{x}_3 &= \omega_0,
\end{aligned}
\tag{11}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \omega_0 t$. То есть эта динамическая система имеет размерность фазового пространства $D = 3$. Для того чтобы уравнение (9) привести к стандартному виду, нужно дважды продифференцировать (9) по времени и подставить в полученное уравнение вместо $A \cos(\omega_0 t)$ левую часть (9). Получим:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -\gamma_0 x_4 + \left(\frac{df_0(x_1)}{dx_1} - \omega_0 \right) x_3 + \frac{d^2 f_0(x_1)}{dx_1^2} x_2^2 - \omega_0^2 \gamma_0 x_2 + \omega_0^2 f_0(x_1),
\end{aligned} \tag{12}$$

где $x_1 = x$.⁶ Отметим лишь, что это система с большей размерностью $D = 4$.

3. Особенности реконструкции

неавтономных дифференциальных уравнений (работа № 1)

3.1. Трудности универсальных технологий

Использование *универсальных* конструкций, например, системы дифференциальных уравнений (8) и *стандартного* представления искомой функции полиномом (5), часто чревато большой размерностью модели, ростом числа коэффициентов, а в результате и неограниченностью решений (траектории могут уходить на бесконечность). Рассмотрим пример: *объектом моделирования* является уравнение (9) с $f_0(x) = 1 - e^{-x}$ (осциллятор Тоды), а модель строится в стандартном виде (8) и (5) по временной реализации координаты x с добавленным малым шумом. Здесь возникают следующие трудности.

- Во-первых, для восстановления модельных уравнений требуется вычислять четвертую производную наблюдаемой, что является очень сложной задачей при наличии шума (даже малой интенсивности).
- Во-вторых, для аппроксимации функции $f_0(x) = 1 - e^{-x}$ требуется полином высокого порядка. Поэтому правая часть последнего уравнения (8) становится чрезвычайно громоздкой. Так, 4-х-мерная содержит порядка 1000 коэффициентов, причем многие слагаемые являются «лишними» и вносят существенные искажения в модель.
- В-третьих, стандартная полиномиальная модель может существенно реагировать на отклонения своей траектории от восстановленной траектории,

⁶ Если функция f_0 является полиномом, то система (12) — частный случай системы (8).

уходя еще дальше от области наблюдаемого движения. Это связано с тем, что ее структура не учитывает каких-либо специфических черт объекта, а значения полинома имеют отношение к объекту только вблизи восстановленной траектории (по которой и проводится аппроксимация).

При моделировании реальных систем также возникают все указанные проблемы, поэтому рассчитывать на успех моделирования с помощью данного универсального метода затруднительно. Уменьшить число уравнений и коэффициентов, а, следовательно, и частично избежать перечисленных неприятностей можно, если воспользоваться специализированным подходом, оперирующим неавтономными уравнениями [13]. Проиллюстрируем его на примере системы второго порядка.

3.2. «Технология» реконструкции неавтономных уравнений

Модифицируем изложенную стандартную процедуру реконструкции дифференциальных уравнений. Будем строить модель, введя в уравнения явную зависимость от времени:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= f(x_1, x_2) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $x_1 = v$, f — полином, последние два слагаемых описывают силовое воздействие, T — предполагаемое значение периода воздействия⁷. Если есть причины предполагать, что систему можно описать уравнением осциллятора с линейным затуханием, то модель можно строить в еще более простом виде:

⁷ Данный подход можно распространить и на случай моделей большей размерности, и на случай мультипликативного воздействия (тогда следует предполагать явную зависимость от времени коэффициентов полинома). Мы же, исходя из целей работы, — показать особенности реконструкции уравнений с явной зависимостью от времени, ограничимся простыми случаями.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\gamma x_2 - f(x_1) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Параметры A , B и коэффициенты полинома f вычисляются с помощью стандартной процедуры: по скалярному ряду путем численного дифференцирования вычисляются производные и с помощью линейного метода наименьших квадратов определяются значения коэффициентов. Этот метод можно применить, если известно значение периода воздействия T . Вычислить же T проблематично, поскольку этот параметр *нелинейно* входит в правую часть модельных уравнений. Поэтому величина T либо должна быть известна априори, либо предварительно определена по экспериментальным данным.

Процедура вычисления периода воздействия.

Параметр T входит в функции, явно зависящие от времени, поэтому его необходимо вычислить с высокой точностью. Погрешность задания периода $\Delta T = T - T_0$, где T_0 — априори неизвестное истинное значение, при очень большой длине временного ряда неизбежно ведет к “набегу фазы” и плохому описанию воздействия соответствующими слагаемыми в (13) или (14). Погрешность аппроксимации “истинного воздействия” $A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ модельной функцией

$A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ дается формулой:

$$\varepsilon_T = \frac{\sqrt{\frac{1}{T_H} \int_{t_0}^{t_0+T_H} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \right]^2 dt}}{\sqrt{\frac{1}{T_H} \int_{t_0}^{t_0+T_H} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt}}, \quad (15)$$

где $T_H = N_{train} \Delta t$. График этой зависимости при $\Delta T/T_0 = 10^{-3}$ приведен на рис.3.

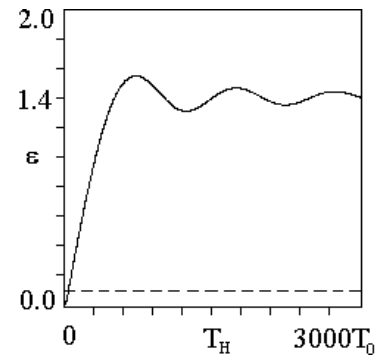


Рис.3. График зависимости нормированной погрешности аппроксимации воздействия от длины ряда при $\Delta T/T_0 = 10^{-3}$ (пунктиром показан уровень $\varepsilon = 0.1$).

Погрешность мала лишь на ограниченном интервале времени, а затем она возрастает и колеблется около величины $\varepsilon_T \approx 1.4$. Поэтому необходимо наложить *ограничение на длину временного ряда* в зависимости от величины относительной погрешности $\Delta T/T_0$.

Чтобы оценить, на каком промежутке времени аппроксимация внешнего воздействия достаточно точна, проинтегрируем (15) и разложим в ряд Тейлора по степеням $\Delta T/T_0$ (т.е. считаем $\Delta T/T_0 \ll 1$). Предполагая затем $T_H/T_0 \gg 1$, получим искомую оценку:

$$\varepsilon_T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\Delta T}{T_0} \frac{T_H}{T_0}. \quad (16)$$

Величина ε_T зависит только от отношений $\Delta T/T_0$ и T_H/T_0 , то есть ограничение нужно наложить на количество охватываемых тренировочным рядом периодов воздействия.

Из (16) следует: если требуется приблизить внешнее воздействие с погрешностью, не превышающей некоторого значения ε_0 , то нужно использовать временной ряд, содержащий не более $\frac{T_H}{T_0} \approx 0.28 \cdot \varepsilon_0 \frac{T_0}{\Delta T}$ периодов воздействия. Например, разумно потребовать, чтобы погрешность не превышала 1 % ($\varepsilon_0 = 0.01$).

Для этого нужно использовать временной ряд длиной не более $28 T_0$, если значение периода известно с относительной погрешностью 10^{-4} . Слишком длинная временная реализация становится помехой для восстановления модели в виде неавтономного осциллятора.

Алгоритм построения неавтономных модельных уравнений. Сначала нужно определить значение периода внешнего воздействия с достаточно малой погрешностью. В качестве первого приближения можно принять положение пика в спектре мощности наблюдаемого временного ряда T^* (см. рис.4).

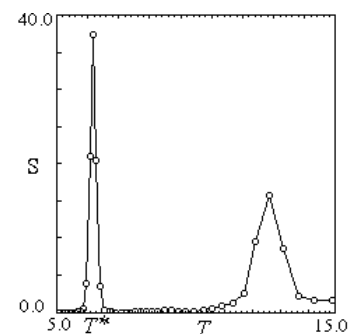


Рис.4. Характерный вид спектра мощности для системы под гармоническим воздействием.

Далее выберем вид модели (13) или (14). Зададим достаточно большое значение порядка полинома K и будем менять пробное значение периода T с некоторым шагом в окрестности начальной оценки T^* , каждый раз проводя аппроксимацию. График зависимости ε от T имеет глубокий минимум (в точке минимума погрешность не превышает примерно 5 %, см. для примера рис.5), указывающий с высокой точностью на истинное значение периода воздействия.

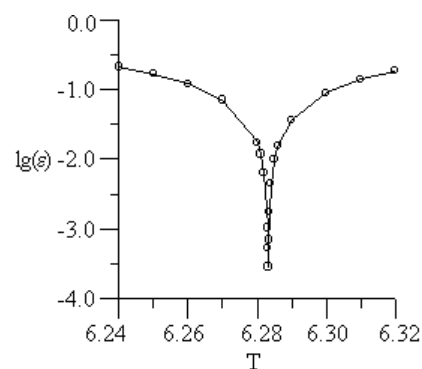


Рис.5. Пример графика зависимости логарифма погрешности аппроксимации ε от T (пробного значения периода воздействия).

Теперь фиксируем найденное значение периода воздействия. Строим модели вида (13) или (14), увеличивая порядок полинома K от 1 до 10 – 20. Выбираем лучшую модель согласно принятым критериям (см. [7]).

К *преимуществам* описанного подхода можно отнести следующие. Во-первых, требуется вычислять по временному ряду две производных, а не четыре. Во-вторых, модель содержит гораздо меньшее количество параметров. В-третьих, некоторым параметрам модели можно придать ясный физический смысл: $\sqrt{A^2 + B^2}$ — амплитуда воздействия, и т.д. И, наконец, учет в модели гармонического воздействия позволяет «ухватить» существенные особенности динамики системы. К *недостаткам* нужно отнести тот факт, что для успешного построения неавтономных модельных уравнений, как правило, нужно иметь некоторую априорную информацию о системе, чтобы верно выбрать нужную структуру уравнений.

3.3. Практическое задание

Цель работы. Применить на практике алгоритм реконструкции неавтономных дифференциальных уравнений:

- потренироваться в выборе параметров алгоритма,
- убедиться в преимуществах специального подхода над стандартным,

- оценить влияние шумов на эффективность моделей.

Задача. Восстановить модельную систему дифференциальных уравнений по временным рядам, генерируемым осцилляторами Дуффинга и Тода под гармоническим силовым воздействием. Сравнить возможности стандартного и специального подходов.

I. Стандартный подход.

- 1) С помощью программы **FlowSimulator** (приложение 1) получите и запишите хаотическую временную реализацию координаты x осциллятора Дуффинга (не зашумленную) длиной 30000 значений при $A = 35.0$, $\omega = 1.0$, $\gamma = 0.1$ (шаг интегрирования 0.01, интервал выборки 0.01).
- 2) Восстановите с помощью программы **ScalarODE** (приложение 2) по временному ряду длиной 10000 значений модельные уравнения вида (5) с $D = 4$ и порядком полинома $K = 3$. Сравните поведение модели и восстановленные значения коэффициентов с исходными.
- 3) Добавьте к тому же временному ряду (п.1) шум (отношение сигнал/шум — 100 дБ и 60 дБ). Выполните для полученных рядов задание 2.
- 4) Запишите хаотическую временную реализацию координаты x осциллятора Тода (не зашумленную) длиной 30000 значений при $A = 6.0$, $\omega = 1.0$, $\gamma = 0.45$ (шаг интегрирования 0.01, интервал выборки 0.01).
- 5) Восстановите по временному ряду длиной 10000 значений уравнения вида (5) с $D = 4$ и с различными значениями порядка полинома K (от 1 до 6).

II. Специальный подход.

- 6) По временному ряду п.2 восстановите неавтономные уравнения (10) и (11) при $K = 3$ и $T = 628.32$. Сравните значения коэффициентов моделей (10) и (11) между собой и с исходными. Прделайте то же самое для одного из зашумленных рядов п.3.
- 7) По временному ряду п.5 восстановите неавтономные уравнения (11) при $T = 628.32$ и различных K (от 1 до 20). Постройте графики $\varepsilon(K)$ и $\tau_{pred}(K)$.

Сравните значения коэффициентов наиболее эффективной модели с истинными (причем, значения коэффициентов полинома — с коэффициентами разложения экспоненты в ряд Тейлора).

- 8) Проведите теперь реконструкцию уравнений с фиксированным оптимальным значением K (найденным в п.7), меняя пробное значение периода T в окрестности истинного. Постройте графики зависимости $\varepsilon(T)$ и $\tau_{pred}(T)$. Сравните результаты с оценкой (13).
- 9) Добавьте к временному ряду осциллятора Тода шумы (отношение сигнал/шум — 100 дБ и 60 дБ). Выполните для зашумленных рядов задание 8. Постройте график $\tau_{pred}(\sigma_{noise})$.

Контрольные вопросы

1. Изложите основные этапы стандартного подхода к построению модельных дифференциальных уравнений по векторному временному ряду.
2. В чем отличие алгоритма построения модели по скалярному ряду?
3. Какие типичные трудности встречаются при построении стандартных (полиномиальных) моделей?
4. Какие представления уравнений неавтономного осциллятора возможны?
5. В чем трудности построения стандартной полиномиальной модели по временной реализации неавтономного осциллятора?
6. Из каких этапов состоит алгоритм построения неавтономных модельных уравнений? В чем его отличие от стандартного алгоритма? В чем преимущества и недостатки такого подхода?

4. Моделирование нелинейных электрических цепей (работа № 2)

4.1. О сложностях моделирования реальных объектов

Построение моделей реальных систем по временным рядам является задачей более высокого уровня сложности по сравнению с задачей реконструкции уравнений динамических систем по генерируемым ими сигналам. Это связано с тем, что для реальной системы не существует какой-либо единственной

«истинной» модели. Подобрать структуру модельных уравнений, наиболее соответствующую ситуации, как правило, весьма затруднительно. Дело осложняется еще и тем, что в нелинейных системах временным рядам различных переменных соответствует свой вид уравнений. Кроме того, в реальной системе всегда есть шумы, что также затрудняет моделирование. Тем не менее, можно привести ряд примеров успешного моделирования реальных объектов по временным рядам (см., например, [11,14]).

В данной работе предлагается использовать стандартный и специальный (изложенный в разделе 3.2) алгоритмы для моделирования реальных радиотехнических систем по хаотическим временным реализациям. В качестве объектов моделирования были выбраны гармонически возбуждаемые нелинейные цепи: контур с переключаемыми конденсаторами и контур с полупроводниковым диодом.

4.2. Контур с переключаемыми конденсаторами

Схема контура с переключаемыми конденсаторами, гармонически возбуждаемого источником внешней ЭДС с амплитудой U_0 и периодом T_0 , представлена на рис.6а. Здесь К — электронный ключ: микросхема, содержащая десятки транзисторов и других пассивных элементов, которая питается от специального источника постоянного напряжения. При малых значениях напряжения U на емкости C_1 происходят линейные колебания в контуре RLC_1 (сопротивление ключа очень велико). Когда напряжение U достигает порогового значения $U_{пор}$, сопротивление ключа резко падает, он замыкает цепь и подключает емкость C_2 . Обратное переключение происходит приблизительно при

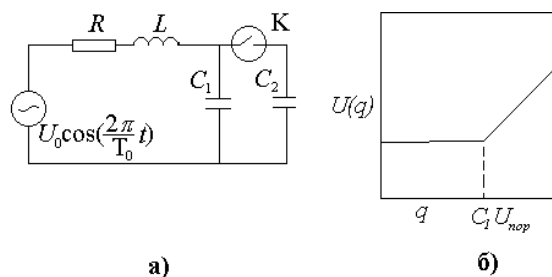


Рис.6. Схема неавтономного колебательного контура с переключаемыми конденсаторами (а); полученная из законов Кирхгофа зависимость напряжения на емкости C_1 от суммарного заряда на емкостях C_1 и C_2 — “возвращающая сила” (б).

том же значении U (реально, при несколько меньшем — имеет место гистерезис). Экспериментальное исследование сложной динамики этой системы проведено в [15].

4.3. Контур с полупроводниковым диодом

Схема гармонически возбуждаемого колебательного контура, содержащего полупроводниковый диод с p - n переходом, представлена на рис.7. Строгое описание физики процессов в диоде требует его рассмотрения как распределенной системы (использования уравнений в частных производных) или сложных эквивалентных представлений, что составляет содержание толстых монографий. Если же ограничиться качественным описанием, об этой системе можно сказать следующее.

Свойства диодов (рис.8а) определяются видом распределения концентрации примесей вдоль диода (между контактами): количеством и распределением акцепторов и доноров, внесенных в полупроводник с собственной проводимостью при создании двух контактирующих областей с p - и n -типами проводимости. В типичном случае

концентрация примеси в одной из половин диода на порядки больше чем в другой (например, в диоде с n^+ - p структурой имеется избыток электронов по сравнению с концентрацией дырок в p -области, рис.8б). Область с большей концентрацией носителей называют эмиттером, а с меньшей — базой; база имеет отно-

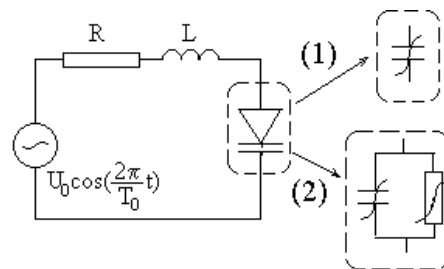


Рис.7. Схема нелинейного колебательного контура с полупроводниковым диодом.

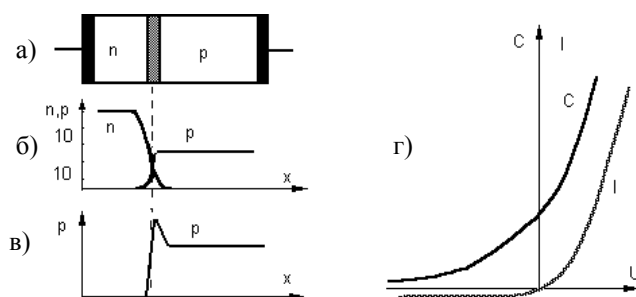


Рис.8. Структура диода с p - n -переходом (а), распределение примесей вдоль диода плавным переходом (б), качественный вид распределения примеси в базе варакторного диода (в), качественный вид ВАХ и ВФХ диода (C — дифференциальная емкость) (г).

сительно большое сопротивление. Для улучшения эксплуатационных качеств диодов различных типов в них обеспечиваются те или иные особенности структуры. Например, в варакторных диодах, используемых как конденсаторы с электрически регулируемой емкостью, с целью улучшения их свойств обеспечивают профиль распределения концентрации примесей в базе с максимумом вблизи области перехода (рис.8в).

Внешнее напряжение меняет ширину перехода (и величину объемных зарядов в переходе). В результате диод проявляет выпрямительные свойства: гораздо лучше проводит в одном направлении («прямом»), чем в другом («обратном»). Кроме того, при «прямых» напряжениях имеет место *инжекция* (введение) носителей из эмиттера в базу. Эти (неосновные) носители *рекомбинируют* (объединяются с основными носителями базы и исчезают), но существуют в течение некоторого конечного времени (времени жизни). На распределение зарядов влияет и *экстракция*, когда из приповерхностного слоя полупроводника забирается часть равновесных носителей. Поскольку новое распределение носителей устанавливается не сразу, диод обладает инерционностью по отношению к *достаточно быстрым* изменениям тока или напряжения. Это эквивалентно емкости, которую можно считать подключенной параллельно р-п-переходу. Эквивалентную емкость принято разделять на две составляющие: *барьерную емкость*, отражающую перераспределение зарядов в переходе, и *диффузионную емкость*, связанную с перераспределением в базе. Соотношение емкостей различно при разных полярностях приложенного напряжения: при «прямой» главную роль играет диффузионная, а при «обратном» – барьерная. Обе емкости нелинейны; например, величина барьерной емкости $C_{\sigma} \sim 1/\sqrt{U}$, где U – «обратное» напряжение. Описанные свойства в какой-то степени отражают:

- зависимость дифференциальной емкости от напряжения смещения (вольт-фарадная характеристика – ВФХ), которая определяется при малых амплитудах воздействия в режиме гармонических колебаний (*на некоторой фиксированной частоте*);

- зависимость тока через диод от напряжения смещения $I(U)$ - в статических условиях или при очень медленном изменении напряжения и токов, когда инерционность не проявляется (ВАХ). Качественный вид ВАХ и ВФХ представлен на рис.8г.

Значительный разброс параметров полупроводниковых элементов, обусловленный особенностями полупроводниковой технологии, деградацией при хранении и использовании, приводит к очень широкому разбросу условий возбуждения нелинейных колебаний даже в экспериментах с однотипными диодами (в том числе, взятыми из одной заводской упаковки).

Этот нелинейный контур представляет собой классическую осцилляторную систему и является эталонным объектом радиофизики. Многообразие колебательных явлений, наблюдаемых в контуре, привело к тому, что подобные системы нашли широкое применение в технике. Исследованию сложной динамики контура с диодом посвящены десятки статей (см., например, [16-22]).

4.4. Различные модели контура с диодом

Предлагались различные модели этого объекта. При их построении использовались законы Кирхгофа и некоторые предположения о свойствах диода. Так, в [16-18] было предложено эквивалентное представление диода в виде нелинейной емкости (рис.7 — представление 1), и при дополнительных предположениях модельное дифференциальное уравнение свелось в [18] к уравнению Тода. Предлагались и другие эквивалентные представления диода, например, в виде нелинейной емкости и нелинейного сопротивления, соединенных параллельно [19-21] (рис.7 — представление 2). Сравнение моделей с экспериментальной системой проводилось путем построения и сопоставления карт динамических режимов. Карты динамических режимов у различных моделей оказываются схожими с экспериментальными. Кроме модельных дифференциальных уравнений предлагались и модельные отображения для контура с диодом. Модельные отображения конструировались из некоторых общих соображений: ав-

торы стремились учесть такие свойства объекта как колебательный характер временной реализации, наличие затухания, линейность колебаний при малых амплитудах воздействия, поведение типа осциллятора с “мягкой” пружиной (см., например, [22]). Сопоставление модельных отображений и объекта проводилось по картам динамических режимов.

4.5. Практическое задание

Цель работы. Познакомиться с возможностями и трудностями моделирования реальных систем. Убедиться в важности выбора адекватной объекту структуры модельных уравнений и соответствующих измеряемых переменных.

Задача. Построить модельные уравнения (изменяя последовательно их структуру) по хаотическим сигналам, генерируемым контуром с переключаемыми конденсаторами и контуром с полупроводниковым диодом. В результате требуется получить эффективную модель контура с переключаемыми конденсаторами (и в смысле качественного описания, и в смысле прогноза) и модель, качественно воспроизводящую поведение контура с диодом.

I. Контур с переключаемыми конденсаторами.

1) Используйте хаотическую временную реализацию величины, пропорциональной напряжению на резисторе R (т.е. пропорциональной и силе тока через резистор)⁸: откройте файл с этой реализацией (pwl.txt). С помощью программы **ScalarODE** (приложение 2) постройте модели в виде автономных дифференциальных уравнений с полиномом в правой части (8) и (5), меняя значения размерности D (от 2 до 4) и порядка полинома K (от 1 до 5) (предварительно нужно подобрать оптимальное количество точек для дифференцирования m). Убедитесь в том, что не удастся получить эффективную модель.

⁸ Значения этой величины измерены с помощью 12-разрядного АЦП с интервалом выборки $\Delta t = 4$ мкс. Параметры схемы (рис.6а) имели значения: $C_1 = 0.1$ мкФ, $C_2 = 4.4$ мкФ, $L = 0.02$ Гн, $R = 10$ Ом, $U_{пор} = -0.2$ В, $T_0 = 84.02\Delta t$.

2) Постройте неавтономные модели (14) при различных значениях K (от 1 до 7) по тому же временному ряду (период воздействия равен $T_0 = 84.02\Delta t$). Убедитесь в том, что не удастся получить эффективную модель.

3) Для построения модели (14) целесообразно использовать в качестве наблюдаемой v проинтегрированную временную реализацию силы тока (см. приложение 4). Откройте файл с этой реализацией (pwl-int.txt) и постройте по нему модели (14) с различными K (от 1 до 15). Выберите модель, поведение которой хорошо воспроизводит поведение объекта. Постройте графики $\varepsilon(K)$ и $\tau_{pred}(K)$. Определите оптимальное значение K .

II. Контур с полупроводниковым диодом

4) Используйте хаотическую временную реализацию величины, пропорциональной напряжению на резисторе R (т.е. пропорциональной силе тока через резистор)⁹. Откройте файл с этой реализацией (diode.txt). С помощью программы **ScalarODE** постройте модели в виде автономных дифференциальных уравнений с полиномом в правой части (5), меняя значения размерности D (от 2 до 4) и порядка полинома K (от 1 до 5), и в виде неавтономных дифференциальных уравнений (10) при различных значениях порядка полинома (от 1 до 7). Убедитесь, что не удастся получить эффективную модель.

5) Как и в случае контура с переключаемыми конденсаторами, временную реализацию тока в контуре с диодом можно предварительно подвергнуть численному интегрированию и строить неавтономные модельные уравнения в виде (10)¹⁰. Откройте файл с проинтегрированной скалярной временной реализацией (diode-i.txt). Постройте неавтономные модели (14) при различных значениях порядка полинома K (от 1 до 10), (период воздействия равен $T_0 = 75\Delta t$). Убедитесь в невозможности построить эффективную модель.

⁹ Значения этой величины измерены с помощью 12-разрядного АЦП с интервалом выборки $\Delta t = 2/3$ мкс. Параметры схемы (рис.7) имели значения: $R = 75$ Ом, амплитуда воздействия $U_0 = 7.8$ В, частота воздействия 20 кГц, индуктивность $L = 0.02$ Гн; использовался диод вида Д242.

¹⁰ Предпосылкой для этого служит предположение о возможном представлении диода в виде нелинейной емкости (см. рис.7 — представление 1).

б) Исходя из других предположений о представлении диода (приложение 5), можно провести моделирование по векторному ряду значений тока и напряжения в контуре с диодом. Откройте файл с таким рядом (diode-v.txt). С помощью программы **VectorODE** (приложение 3) постройте по нему модели вида (П.5.2) с различными значениями порядков полиномов. Выберите наиболее эффективную модель.

Контрольные вопросы

1. В чем состоят трудности моделирования реальных объектов?
2. Что представляет собой контур с переключаемыми конденсаторами?
3. Что представляет собой полупроводниковый диод? Какие модели контура с диодом предлагались? Как они сравнивались с объектом?

Приложение 1. Описание программы FlowSimulator

Программа **FlowSimulator** позволяет записать скалярный или векторный временной ряд, генерируемый одной из эталонных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь можно

- выбрать нужную систему,
- значения ее параметров и начальные условия, при которых будет получен временной ряд,
- добавить нормальный белый шум нужной интенсивности к записываемому ряду,
- выбрать файл для записи данных (или создать новый),
- задать *установки* для записи ряда (длительность переходного процесса N_{trans} — первые N_{trans} значений наблюдаемых не записываются, длину записываемого ряда N , метод и шаг интегрирования дифференциальных уравнений, интервал выборки — интервал, с которым записываются значения переменных в файл данных).

Имеется возможность также изменить все указанные величины и записать другой временной ряд в новый файл. Пример внешнего вида окна программы представлен на рис. П.1.1.

Запустите файл **FlowSimulator.exe**. Откроется окно программы и в левой его части – окно ввода (Input Window).

1) В окне ввода появится пронумерованный список систем, реализации которых можно записать: “You can select one of the following systems: 1 — Rossler system, 2 — Lorenz system, 3 — van der Pol oscillator, ...” («Вы можете выбрать одну из следующих систем: 1 – система Ресслера, 2 — система Лоренца, 3 — осциллятор ван-дер-Поля, ...»): “Select a system: ” («Выберите систему: »). Введите номер нужной системы.

2) Появится явный вид этой системы уравнений, и программа запросит поочередно значения ее параметров: “Enter values of parameters: a = , b = ”

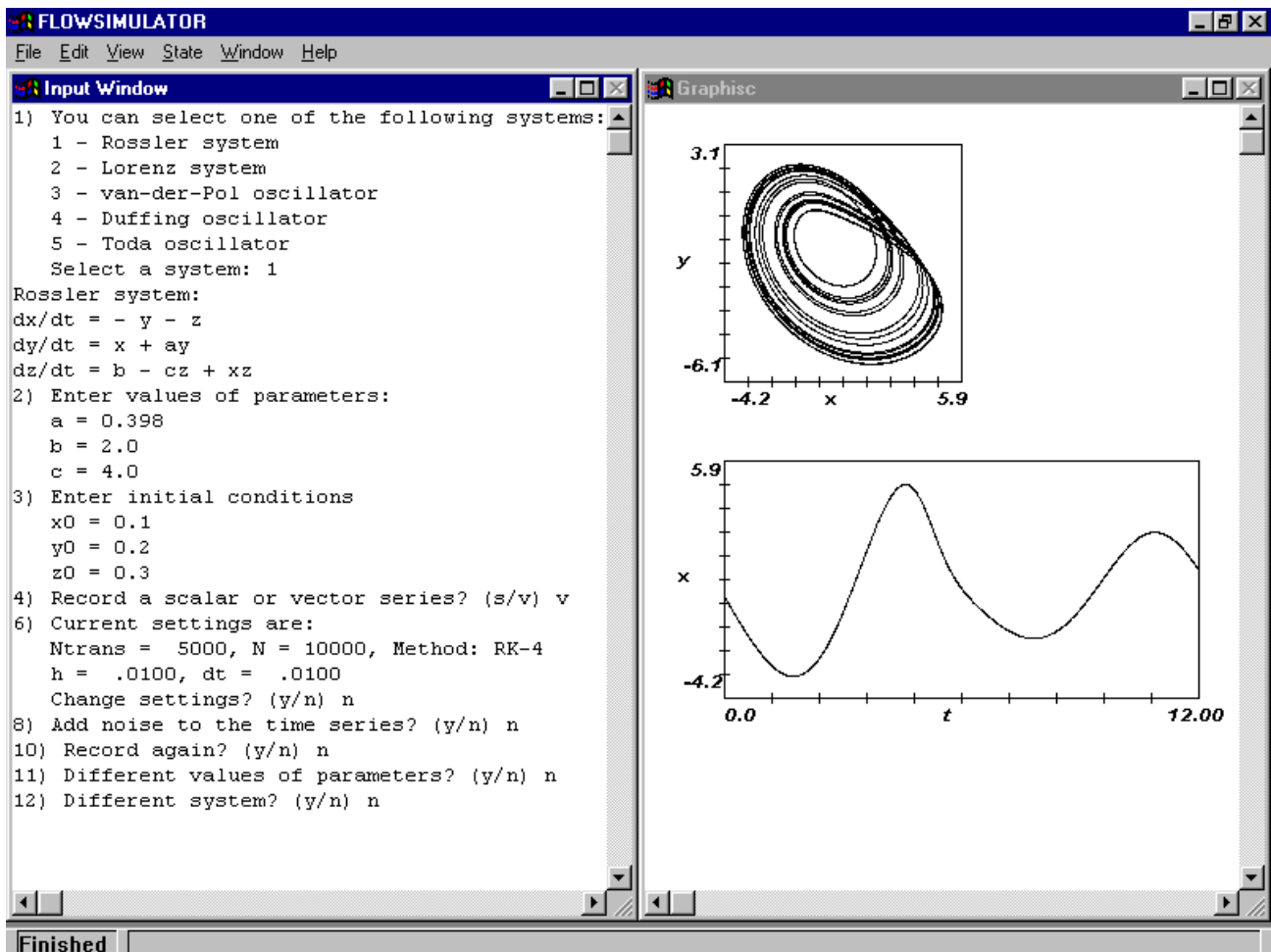


Рис.П.1.1. Внешний вид окна программы **FlowSimulator** (данный сеанс работы с программой включал в себя интегрирование системы Ресслера методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 при значениях параметров $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$ и запись векторного временного ряда длиной 10000 векторов с интервалом выборки, равным шагу интегрирования).

(«Задайте значения параметров: $a =$, $b =$ ») и т.д. Введите нужные значения (обязательно вещественные числа – с разделяющей десятичной точкой).

3) Аналогично потребуется ввести начальные условия: “Enter initial conditions: $x_0 =$, $y_0 =$ ” («Введите начальные условия: $x_0 =$, $y_0 =$ »).

4) Следующий вопрос: “Record a scalar or vector series? (s/v)” («Записать скалярный или векторный временной ряд? (с/в)»). Если нужен скалярный ряд, то введите символ “s” и см. пункт 5. Для записи векторного ряда введите символ “v”, при этом будут записываться реализации всех динамических переменных системы, см. далее пункт 6.

5) Программа запросит номер динамической переменной, временная реализация которой будет записана: “Number of the variable to record: ” («Номер

переменной для записи: »). Введите соответствующее целое число: переменные нумеруются сверху вниз — по левой части системы уравнений.

6) Появится сообщение: “Current settings are: Ntrans = ..., N = ..., Method: ..., h = ..., dt = ...” («Текущие установки: Ntrans = ..., N = ..., Method: ..., h = ..., dt = ...») и вопрос: “Change settings? (y/n)” («Изменить установки? (да/нет)»). Если установки Вас не устраивают, то отвечайте положительно (введите символ “y”) и см. п. 7. Иначе отвечайте “n” и далее см. пункт 8.

7) Потребуется ввести длину переходного процесса N_{trans} : “Length of a transient process: Ntrans = ” («Длительность переходного процесса: Ntrans = »), длину записываемого временного ряда N : “Length of the series to record: N = ” («Длительность временного ряда для записи: N = »). Введите нужные целые числа.

“Methods of integration: 1 — Euler, 2 — 4-th order Runge-Kutta routine, 3 — 5-th and 6-th order Runge-Kutta. Select a method: ” («Методы интегрирования: 1 — метод Эйлера, 2 — метод Рунге-Кутты 4-го порядка, 3 — метод Рунге-Кутты 5-го и 6-го порядков с автоматической подстройкой шага. Выберите метод »). “Step of integration: h = ” («Шаг интегрирования: h = »), “Sampling interval: ” («Интервал выборки: »). Введите номер, соответствующий нужному методу интегрирования модельных уравнений. Задайте величину шага интегрирования (для 3-го метода имеется в виду начальное значение шага) и интервала выборки — вещественные числа с разделяющей десятичной точкой.

8) Следующий вопрос: “Add noise to the time series? (y/n)” («Добавить шум к временному ряду? (да/нет)»). Если хотите записать зашумленный ряд, ответьте положительно и см. пункт 9, иначе отвечайте “n” и см. пункт 10.

9) Потребуется ввести величину стандартного отклонения случайной величины: “Noise standard deviation: std = ” («Стандартное отклонение шума: std = »). При этом к значениям «чистых» временных реализаций $x_j(t_i)$ при записи в файл прибавляются независимые случайные величины ξ_i , распределенные по нормальному закону с нулевым средним и заданным стандартным от-

клонением. В сами дифференциальные уравнения случайная составляющая не вводится, т.е. в данном случае добавленный шум моделирует шумы измерительной аппаратуры, а не флуктуации в системе.

10) Далее откроется окно диалога для выбора файла, в который будет записан временной ряд. Выберите нужный файл (или создайте новый). Временной ряд будет записываться в заданный файл, а в правой части окна программы появится окно “Graphics” («Графика»). В этом окне представлены фазовая траектория системы и участок записанной временной реализации (или одной из реализаций).

Появится вопрос: “Record again? (y/n)” («Записать снова? (да/нет)»). В случае положительного ответа — переходите к пункту 4: можно изменить настройки для записи временного ряда, выбрать шум другой интенсивности, другую динамическую переменную для записи, другой файл. Иначе см. пункт 11.

11) Следующий вопрос: “Different values of parameters? (y/n)” («Другие значения параметров? (да/нет)»). Отвечайте “y”, если нужно повторить запись временного ряда при других значениях параметров и/или начальных условий — возвращайтесь к пункту 2. Иначе см. пункт 12.

12) Последний вопрос: “Different system? (y/n)” («Другая система? (да/нет)»). Отвечайте положительно, если хотите выбрать другое отображение и см. пункт 1.

Иначе выполнение программы завершится и появится окно диалога с вопросом: “Exit Window?” «Закреть окно?». Можно ответить «нет», если нужно еще раз просмотреть последние графики. Окно программы можно закрыть позже. В случае положительного ответа окно программы закроется.

Приложение 2. Описание программы **ScalarODE**

Программа **ScalarODE** позволяет построить по скалярному временному ряду модельные дифференциальные уравнения. Можно выбрать необходимые значения *параметров алгоритма реконструкции*:

- количество векторов в тренировочном временном ряде,

- вид аппроксимирующих функций,
- порядок полинома, если выбрана полиномиальная аппроксимация, порядки двух полиномов, если выбрана рациональная аппроксимация, период воздействия, если выбрана аппроксимация с внешним гармоническим воздействием,

и *установок* для проверки эффективности модели:

- длину участка тестового временного ряда L_{test} ,
- количество этих участков K_{test} ,
- величину сдвига между соседними участками S_{test} ,
- метод интегрирования модельных дифференциальных уравнений,
- шаг интегрирования модельных дифференциальных уравнений.

Значения всех этих параметров можно менять в течение сеанса работы с программой. Значения всех параметров и установок алгоритма и основные результаты построения моделей выводятся в файл отчета report.txt, который создается в текущем каталоге (если файл с таким именем уже существовал до запуска программы, то новые результаты добавляются к ранее записанной информации). Примеры внешнего вида окна программы и содержимого файла отчета представлены на рис.П.2.1 и рис.П.2.2.

Запустите файл **ScalarODE.exe**. Откроется окно программы и окно диалога для выбора файла данных. Откройте файл, который содержит скалярный временной ряд. Это должен быть текстовый файл (в ASCII-формате), в котором в столбец записаны последовательные значения наблюдаемой — вещественные числа (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

В левой части обрамляющего окна открывается окно ввода (Input Window), которое остается открытым в течение всего сеанса работы с программой — это окно диалога пользователя с программой. Сначала программа считает количество значений наблюдаемой N в данном временном ряде и выдает сообщение: “The time series contains ... values” («Временной ряд содержит ... значений»).

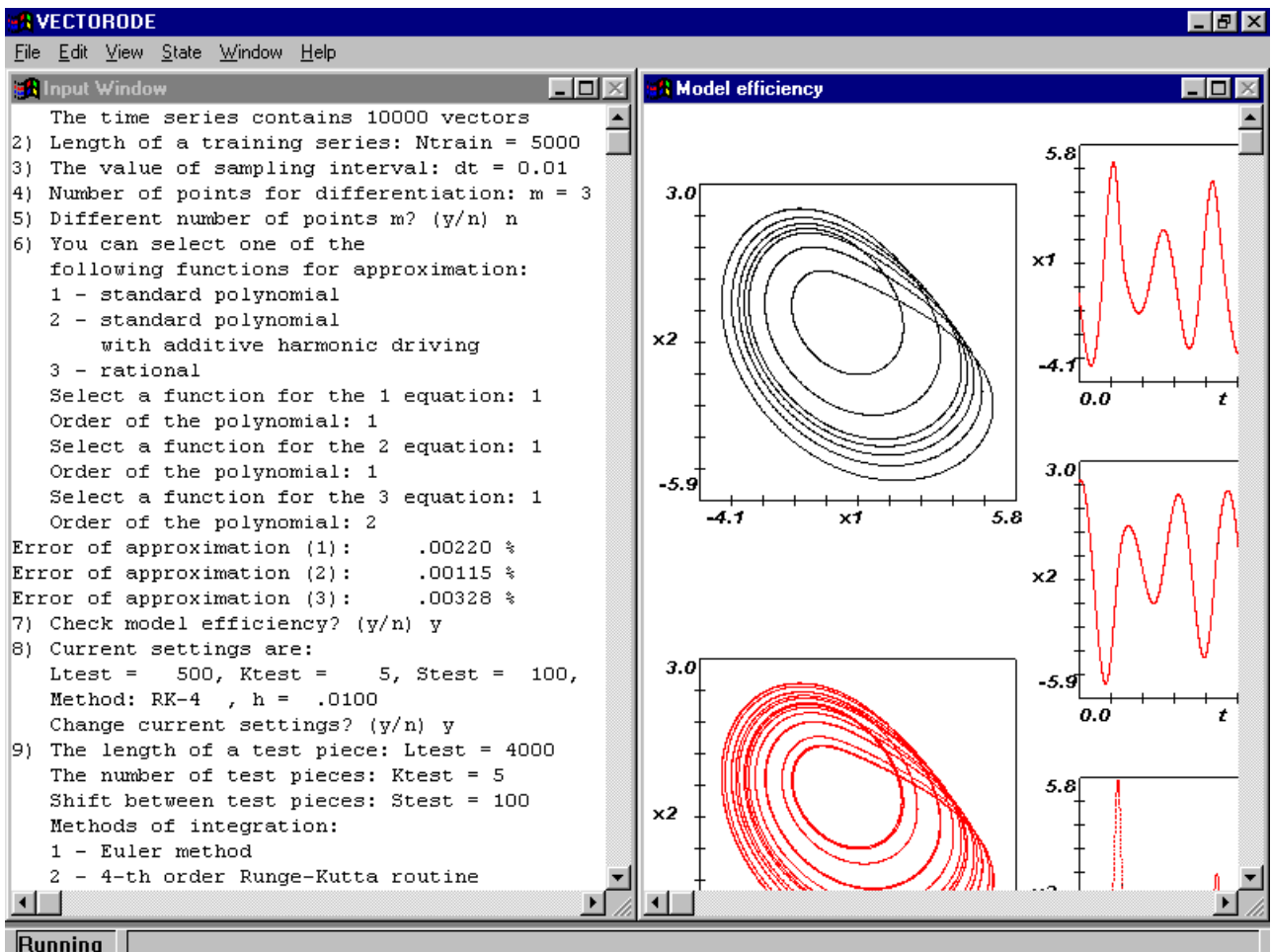


Рис.П.2.1. Внешний вид окна программы **ScalarODE** (данный сеанс работы с программой включал в себя восстановление модельных уравнений по временной реализации координаты y системы Ресслера, полученной интегрированием этой системы ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 при значениях параметров $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$).

1) Появится приглашение задать длину тренировочного временного ряда (количество значений): “Length of a training time series: Ntrain = ” («Длина тренировочного временного ряда Ntrain = »). Если нужно будет проверять эффективность построенных моделей, то задайте длину тренировочного ряда меньше длины всего ряда, чтобы осталось необходимое количество данных и для тестирования. Значение N_{train} — целое число, для которого справедливо.

2) Будет запрошено значение интервала выборки: “The value of sampling interval: dt = ” («Величина интервала выборки dt = »). Введите нужное вещественное число (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

```

report.txt - Блокнот
Файл  Правка  Поиск  ?

The number of values in a training time series Ntrain =  5000
Sampling interval dt =  .010
The number of model equations D =  3
The number of points for differentiation m =  5

The type of function for the model equation: standard polynomial
Polynomial order nu =  2
Coefficients of the model equation:
-1.9993766351
-3.9988749461
 .5914249749
-3.6009749120
-.3980461923
 1.1580004519
-.3980961902
-.3978429686
 .9996227508
-.0000467970
Error of approximation:  .00277 %

Error of approximation (test series):  .00337 %
Length of a test piece: Ltest =  4000
Number of test pieces: Ktest =  5
Shift between test pieces: Stest =  100
Method of integration: RK-4
Step of integration: h =  .01000
Prediction time for the 1 variable is equal to  4000
Prediction time for the 2 variable is equal to  4000
Prediction time for the 3 variable is equal to  4000
Number of infinite solutions:  0

```

Рис.П.2.2. Содержимое файла отчета для сеанса работы, проиллюстрированного на рис.П.2.1.

3) Программа запросит количество уравнений модели: “Number of model equations: D = ” («Количество уравнений модели D = »). Задайте целое число $D > 1$.

4) Появится приглашение задать количество точек для вычисления производных m : “Number of points for differentiation: m = ” («Количество точек для дифференцирования m = »). Введите целое число $m > D$.

Производные наблюдаемой будут рассчитаны и выведены графически в окне “Differentiation” («Дифференцирование»), которое откроется в правой части окна программы. Собственные значения и координаты собственных векторов матрицы ковариаций будут выведены соответственно в файлы `s_values.txt` и `s_vectors.txt` в текущем каталоге.

5) Появится вопрос: “Different number of points m? (y/n) ” («Другое количество точек m? (да/нет)»). Если графики производных недостаточно гладкие, то отвечайте положительно (введите символ “y”) и используйте большее коли-

чество точек для дифференцирования — возврат к пункту 4, иначе отвечайте “n” и см. пункт 6.

6) Появится нумерованный список функций, которые можно использовать для аппроксимации: “You can select one of the following functions for approximation: 1 — standard polynomial, 2 — standard polynomial with additive harmonic driving, 3 — rational, 4 — function for a harmonically driven oscillator with linear damping” («Вы можете выбрать один из следующих видов функций для аппроксимации: 1 — стандартный полином, 2 — стандартный полином с аддитивным гармоническим воздействием, 3 — дробно-рациональная функция, 4 — функция для гармонически возбуждаемого осциллятора с линейным затуханием¹¹»). И последует запрос: “Select a function: ” («Выберите вид функции»). Введите соответствующий номер.

7) Затем потребуется задать порядок полинома (если выбрана полиномиальная аппроксимация): “Order of the polynomial: ” («Порядок полинома: »). Задайте целое число $K \geq 0$.

Если выбран 2-ой или 4-ый вид функции, то потребуется задать и период воздействия: “Period of driving (in dt units): ” («Период воздействия (в единицах dt)»). Введите вещественное число (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

Если выбрана рациональная аппроксимация, то потребуется задать поочередно порядок каждого полинома (в числителе и в знаменателе): “Order of the numerator polynomial: Order of the denominator polynomial: ...” («Порядок полинома в числителе: Порядок полинома в знаменателе: ...»).

После этого рассчитываются коэффициенты модельных уравнений. В окне ввода появляется сообщение: “Error of approximation: ... %” («Погрешность аппроксимации: ... %»). Значения коэффициентов выводятся в файл отчета¹².

¹¹ 4-ый вид функции может использоваться только при $D = 2$.

¹² Для каждого уравнения значения коэффициентов записываются в столбец в следующем порядке. Сначала записывается свободный член полинома. Затем — коэффициенты при слагаемых в первой степени: x_1, \dots, x_D . Затем — при слагаемых во второй степени:

8) Появится вопрос: “Check model efficiency? (y/n)” («Проверить эффективность модели? (да/нет)»). Введите символ “y”, если Вы хотите протестировать модель, и далее см. пункт 9. Иначе отвечайте “n” и далее см. пункт 12.

9) Далее появится сообщение о текущих установках для проверки эффективности модели: “Current settings are: Ltest = ..., Ktest = ..., Stest = ..., Method: ..., h = ...” («Текущие установки: Ltest = ..., Ktest = ..., Stest = ..., Method: ..., h = ...»), и вопрос: “Change settings? (y/n)” («Изменить установки? (да/нет)»). Дайте положительный ответ, если установки Вас не устраивают, и см. пункт 10. В противном случае ответьте “n” и см. пункт 11.

10) Программа предложит задать установки для тестирования модели. “The length of a test piece: Ltest = ” («Длина тестового участка: Ltest = »), “The number of test pieces: Ktest = ” («Количество тестовых участков: Ktest = »), “Shift between test pieces: Stest = ” («Сдвиг между тестовыми участками: Stest = »). Введите нужные значения (положительные целые числа), причем нужно следить, чтобы для тестового ряда хватило данных, т.е. $N_{train} + N_{test} \leq N$.

“Methods of integration: 1 — Euler, 2 — 4-th order Runge-Kutta routine, 3 — 5-th and 6-th order Runge-Kutta. Select a method: ” («Методы интегрирования: 1 — метод Эйлера, 2 — метод Рунге-Кутты 4-го порядка, 3 — метод Рунге-Кутты 5-го и 6-го порядков с автоматической подстройкой шага. Выберите метод»). “Step of integration: h = ” («Шаг интегрирования: h = »). Введите номер, соответствующий нужному методу интегрирования модельных уравнений. Задайте величину шага интегрирования (для 3-го метода имеется в виду начальное значение шага) — вещественное число с разделяющей десятичной точкой.

$x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_D, x_2^2, x_2x_3, \dots, x_D^2$. И так далее с повышением степени слагаемых. Если использовалась дробно-рациональная функция, то сначала выводятся коэффициенты полинома в числителе, затем — полинома в знаменателе, причем свободный член полинома в знаменателе, равный 1, не выводится. Если использовалась аппроксимация с внешней силой, то после коэффициентов полинома выводятся коэффициенты при косинусе и синусе. Если использовалась аппроксимация № 4 (т.е. уравнения вида (14)), то коэффициенты будут выведены в следующем порядке: $c_0, c_1, \gamma, c_2, c_3, \dots, c_K, A, B$.

11) Будет проведено тестирование модели. В правой части окна программы появится окно “Model efficiency” («Эффективность модели»). В нем иллюстрируются результаты тестирования.

Слева: сверху показана фазовая траектория объекта, восстановленная по тестовому временному ряду, ниже — рассчитанная фазовая траектория модели.

В центре представлены временные реализации переменных объекта (черным цветом) и модели (красным) при одинаковых начальных условиях.

Справа приведены графики зависимости ошибки прогноза каждой из переменных от времени.

В окне ввода распечатываются результаты тестирования: “Error of approximation (test): ... %”, “Prediction time for the ... variable: ...”, “Number of infinite solutions: ...” («Погрешность аппроксимации (по тестовому ряду): ... %», «Дальность прогноза для ... переменной: ...», «Количество неограниченных решений: ...»). Все результаты записываются также в файл отчета.

Появится вопрос: “Check again? (y/n)” («Проверить снова? (да/нет)»). Если Вы хотите проверить модель с другими установками, то отвечайте “y” и возвращайтесь к п. 8. Иначе отвечайте отрицательно и см. пункт 12.

12) Последует вопрос: “Different model? (y/n)” («Другую модель? (да/нет)»). Отвечайте положительно, если нужно построить модель, например, с другим порядком полинома, и см. п. 6. Иначе отвечайте “n” и см. пункт 13.

13) Очередной вопрос: “Different number of equations? (y/n)” («Другое количество уравнений модели? (да/нет)»). Если требуется построить модель большей размерности и/или выбрать другое количество точек для дифференцирования, то нужно ответить «да» — и возвратиться к пункту 4. Иначе — см. пункт 14.

14) Появится вопрос: “Different length Ntrain? (y/n)” («Другую длину тренировочного ряда Ntrain? (да/нет)»). Отвечайте “y”, если нужно провести моделирование по тренировочному ряду большей или меньшей длины — см. пункт 1. Иначе отвечайте “n” и переходите к пункту 15.

15) Последний вопрос: “ Different time series? (y/n) ” («Другой временной ряд? (да/нет)»). В случае положительного ответа Вам будет предложено выбрать новый файл данных для анализа (см. начало описания программы).

Иначе выполнение программы завершится и появится окно диалога с вопросом: “Exit Window?” («Закреть окна?»). Можно ответить «нет», если нужно еще раз посмотреть последние графики (окно программы можно закрыть позже). В случае положительного ответа окно программы закроется.

Приложение 3. Описание программы VectorODE

Программа **VectorODE** позволяет построить по векторному временному ряду модельные дифференциальные уравнения. Можно выбрать необходимые значения *параметров алгоритма реконструкции*:

- количество векторов в тренировочном временном ряде,
- вид аппроксимирующих функций,
- порядок полинома, если выбрана полиномиальная аппроксимация, порядки двух полиномов, если выбрана рациональная аппроксимация, период воздействия, если выбрана аппроксимация с внешним гармоническим воздействием,

и *установок* для проверки эффективности модели:

- длину участка тестового временного ряда L_{test} ,
- количество этих участков K_{test} ,
- величину сдвига между соседними участками S_{test} ,
- метод интегрирования модельных дифференциальных уравнений,
- шаг интегрирования модельных дифференциальных уравнений,

Значения всех этих параметров можно менять в течение сеанса работы с программой. Значения всех параметров и установок алгоритма и основные результаты построения моделей выводятся в файл отчета report.txt, который создается в текущем каталоге (если файл с таким именем уже существовал до запуска программы, то новые результаты добавляются к ранее записанной информа-

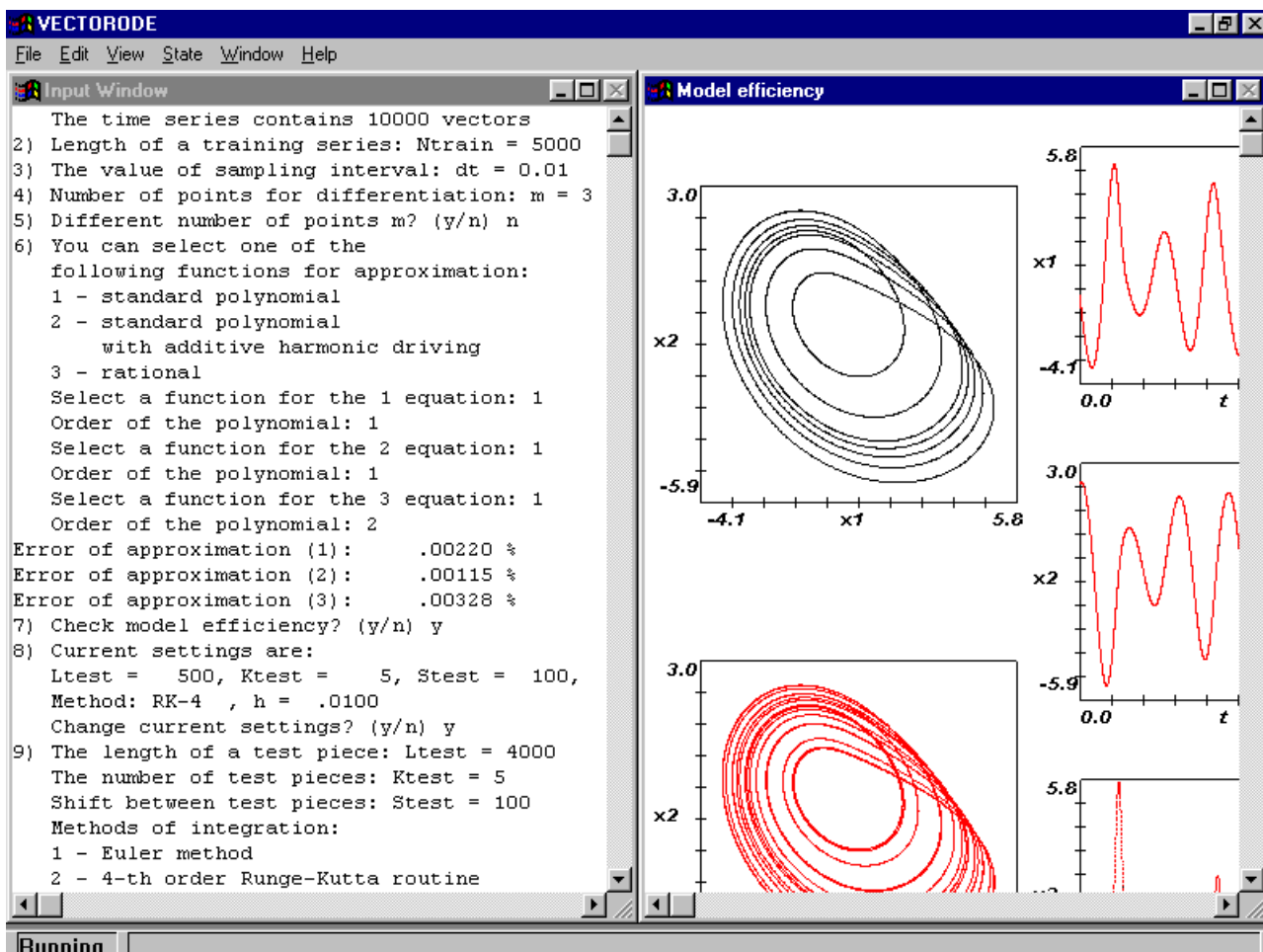


Рис.П.3.1. Внешний вид окна программы **VectorODE** (данный сеанс работы с программой включал в себя восстановление модельных уравнений по векторному временному ряду, полученного интегрированием системы Ресслера методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.01 при значениях параметров $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$).

ции). Примеры внешнего вида окна программы и содержимого файла отчета представлены на рис.П.3.1 и рис.П.3.2.

Запустите файл **VectorODE.exe**. Откроется окно программы и окно диалога для выбора файла данных. Откройте файл, который содержит скалярный временной ряд. Это должен быть текстовый файл (в ASCII-формате), в котором значения переменных записаны в столбец в следующем порядке: $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_D(t_1), x_1(t_2), \dots, x_D(t_2), \dots$. Эти значения должны представлять собой вещественные числа (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

1) Программа запросит значение размерности векторов временного ряда: “Dimension of vectors: D = ” («Размерность векторов D = »). Введите нужное число $D > 1$.

```
report.txt - Блокнот
Файл Правка Поиск ?
Dimension of vectors D = 3
The number of vectors in a training time series Ntrain = 5000
Sampling interval dt = .010
Number of points for differentiation m = 3

The type of function for the 1 equation:
standard polynomial
Polynomial order nu = 1
Coefficients of the 1 equation:
.0000620934
.0000235032
-1.0000097188
-1.0000779873
Error of approximation: .0022048764 %

The type of function for the 2 equation:
standard polynomial
Polynomial order nu = 1
Coefficients of the 2 equation:
-.0000001186
1.0000187337
.3980074457
.0000000616
Error of approximation: .0011500720 %

The type of function for the 3 equation:
standard polynomial
Polynomial order nu = 2
Coefficients of the 3 equation:
1.9996495255
```

Рис.П.3.2. Содержимое файла отчета для сеанса работы, проиллюстрированного на рис.П.3.1.

2) Программа сообщит общее количество векторов во временном ряде “The time series contains ... vectors” («Временной ряд содержит ... векторов») и запросит количество векторов тренировочного ряда: “Length of a training series: Ntrain = ” («Длина тренировочного ряда Ntrain = »). Если нужно будет проверять эффективность построенных моделей, то задайте длину тренировочного ряда меньше длины всего ряда, чтобы осталось необходимое количество данных и для тестирования.

3) Будет запрошено значение интервала выборки: “The value of sampling interval: dt = ” («Величина интервала выборки dt = »). Введите нужное вещественное число (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

4) Появится приглашение задать количество точек для вычисления производных m : “Number of points for differentiation: $m =$ ” («Количество точек для дифференцирования $m =$ »). Введите целое число $m > 1$.

Производные наблюдаемых будут рассчитаны и выведены графически в окне “Differentiation” («Дифференцирование»), которое откроется в правой части окна программы.

5) Появится вопрос: “Different number of points m ? (y/n) ” («Другое количество точек m ? (да/нет)»). Если графики производных недостаточно гладкие, то отвечайте положительно (введите символ “y”) и используйте большее количество точек для дифференцирования — возврат к пункту 4, иначе отвечайте “n” и см. пункт 6.

6) Появится нумерованный список функций, которые можно использовать для аппроксимации: “You can select one of the following functions for approximation: 1 — standard polynomial, 2 — standard polynomial with additive harmonic driving, 3 — rational” («Вы можете выбрать один из следующих видов функций для аппроксимации: 1 — стандартный полином, 2 — стандартный полином с аддитивным гармоническим воздействием, 3 — дробно-рациональная функция»). И последует запрос: “Select a function for the 1 equation: ” («Выберите вид функции для первого уравнения»). Введите соответствующий номер.

Затем потребуется задать порядок полинома (если выбрана полиномиальная аппроксимация): “Order of the polynomial: ” («Порядок полинома: »). Задайте целое число $K \geq 0$.

Если выбран 2-ой вид функции, то потребуется задать и период воздействия: “Period of driving (in dt units): ” («Период воздействия (в единицах dt)»). Введите вещественное число (обязательно с разделяющей десятичной точкой).

Если выбрана рациональная аппроксимация, то потребуется задать поочередно порядок каждого полинома (в числителе и в знаменателе): “Order of the numerator polynomial: Order of the denominator polynomial: ...” («Порядок полинома в числителе: Порядок полинома в знаменателе: ...»).

Далее необходимо сделать выбор для каждого из D уравнений модели.

После этого рассчитываются коэффициенты модельных уравнений. В окне ввода появляется сообщение: “Error of approximation (1): ... %”, “Error of approximation (2): ... %”, ... («Погрешность аппроксимации (1-го уравнения): ... %», «Погрешность аппроксимации (2-го уравнения): ... %», ...). Значения коэффициентов выводятся в файл отчета¹³.

7) Появится вопрос: “Check model efficiency? (y/n) ” («Проверить эффективность модели? (да/нет)»). Введите символ “y”, если Вы хотите протестировать модель, и далее см. пункт 8. Иначе отвечайте “n” и далее см. пункт 11.

8) Далее появится сообщение о текущих установках для проверки эффективности модели: “Current settings are: Ltest = ..., Ktest = ..., Stest = ..., Method: ..., h = ...” («Текущие установки: Ltest = ..., Ktest = ..., Stest = ..., Method: ..., h = ...»), и вопрос: “ Change settings? (y/n) ” («Изменить установки? (да/нет)»). Дайте положительный ответ, если установки Вас не устраивают, и см. пункт 9. В противном случае ответьте “n” и см. пункт 10.

9) Программа предложит задать установки для тестирования модели. “The length of a test piece: Ltest = ” («Длина тестового участка: Ltest = »), “The number of test pieces: Ktest = ” («Количество тестовых участков: Ktest = »), “Shift between test pieces: Stest = ” («Сдвиг между тестовыми участками: Stest = »). Введите нужные значения (положительные целые числа), причем нужно следить, чтобы для тестового ряда хватило данных, т.е. $N_{train} + N_{test} \leq N$.

“Methods of integration: 1 — Euler, 2 — 4-th order Runge-Kutta routine, 3 — 5-th and 6-th order Runge-Kutta. Select a method: ” («Методы интегрирования: 1 — метод Эйлера, 2 — метод Рунге-Кутты 4-го порядка, 3 — метод Рунге-Кутты 5-го, 6-го порядков с автоматической подстройкой шага. Выберите метод »). “Step of

¹³ Для каждого уравнения значения коэффициентов записываются в столбец в следующем порядке. Сначала записывается свободный член полинома. Затем — коэффициенты при слагаемых в первой степени: x_1, \dots, x_D . Затем — при слагаемых во второй степени: $x_1^2, x_1x_2, \dots, x_1x_D, x_2^2, x_2x_3, \dots, x_D^2$. И так далее. Если использовалась аппроксимация с внешней силой, то после коэффициентов полинома выводятся коэффициенты при косинусе и синусе.

integration: $h =$ ” («Шаг интегрирования: $h =$ »). Введите номер, соответствующий нужному методу интегрирования модельных уравнений. Задайте величину шага интегрирования (для 3-го метода имеется в виду начальное значение шага) — вещественное число с разделяющей десятичной точкой.

10) Будет проведено тестирование модели. В правой части окна программы появится окно “Model efficiency” («Эффективность модели»). В нем иллюстрируются результаты тестирования.

Слева: сверху показана фазовая траектория объекта, восстановленная по тестовому временному ряду, ниже — рассчитанная фазовая траектория модели.

В центре представлены временные реализации переменных объекта (черным цветом) и модели (красным) при одинаковых начальных условиях.

Справа приведены графики зависимости ошибки прогноза каждой из переменных от времени.

В окне ввода распечатываются результаты тестирования: “Error of approximation (test) (1): ... %”, “Error of approximation (test) (2): ... %”, ..., “Prediction time (1): ...”, “Prediction time (2): ...”, ..., “Number of infinite solutions: ...” («Погрешность аппроксимации (по тестовому ряду) (1-го уравнения): ... %», «Погрешность аппроксимации (по тестовому ряду) (2-го уравнения): ... %», «Дальность прогноза (1-ой переменной): ...», «Дальность прогноза (2-ой переменной): ...», ..., «Количество неограниченных решений: ...»). Все результаты записываются также в файл отчета.

Появится вопрос: “Check again? (y/n)” («Проверить снова? (да/нет)»). Если Вы хотите проверить модель с другими установками, то отвечайте “y” и возвращайтесь к п. 8. Иначе отвечайте отрицательно и см. пункт 11.

11) Последует вопрос: “Different model? (y/n) ” («Другую модель? (да/нет)»). Отвечайте положительно, если нужно построить модель, например, с другими порядками полинома, и см. п. 6. Иначе отвечайте “n” и см. пункт 12.

12) Появится вопрос: “ Different length Ntrain? (y/n)” («Другую длину тренировочного ряда Ntrain? (да/нет)»). Отвечайте “y”, если нужно провести моде-

лирование по тренировочному ряду большей или меньшей длины — см. пункт 2. Иначе отвечайте “n” переходите к пункту 13.

13) Последний вопрос: “ Different time series? (y/n) ” («Другой временной ряд? (да/нет)»). В случае положительного ответа Вам будет предложено выбрать новый файл данных для анализа (см. начало описания программы).

Иначе выполнение программы завершится и появится окно диалога с вопросом: “Exit Window?” («Закреть окна?»). Можно ответить «нет», если нужно еще раз просмотреть последние графики (окно программы можно закрыть позже). В случае положительного ответа окно программы закроется.

Приложение 4. О модели контура с переключаемыми конденсаторами

Для схемы рис.6 можно записать модельные уравнения, исходя из законов Кирхгофа, — это уравнения неавтономного осциллятора с кусочно-линейной возвращающей силой:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= I, \\ L \frac{dI}{dt} &= -RI - U(q) + U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right), \end{aligned} \quad (\text{П.4.1})$$

где q – суммарный заряд на емкостях, U — напряжение на емкости C_1 (рис.6б):

$$U(q) = \begin{cases} \frac{q - C_1 U_{\text{нор}}}{C_1}, & q > C_1 U_{\text{нор}}, \\ \frac{q}{C_1 + C_2}, & q < C_1 U_{\text{нор}}. \end{cases} \quad (\text{П.4.2})$$

Таким образом, для построения модели вида (14) нужно использовать в качестве наблюдаемой проинтегрированную временную реализацию силы тока I , т.к. в роли координаты x_1 должна выступать величина заряда q .

Приложение 5. О модели контура с полупроводниковым диодом

Физически выбор модельных уравнений вида (13) или (14) для моделирования контура с диодом по проинтегрированной временной реализации силы тока соответствует эквивалентному представлению диода в виде нелинейной

емкости (представление 1 на рис.7). Таким образом, невозможность подобрать удовлетворительную модель свидетельствует о том, что существенную роль для количественного описания временных реализаций играют не только емкостные свойства диода.

Предположим теперь, что справедливо представление диода в виде параллельного соединения емкости и сопротивления (представление 2 на рис.7). Тогда, исходя из законов Кирхгофа, можно записать для такого эквивалентного представления следующие модельные уравнения:

$$\begin{aligned} L \frac{dI}{dt} &= -RI - U + U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right), \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{I - I_\delta(U)}{C_{\text{дифф}}(U)}, \end{aligned} \tag{П.5.1}$$

где I — сила тока через резистор R , U — напряжение на диоде, L — индуктивность, U_0 и T_0 — амплитуда и период внешней ЭДС, $I_\delta(U)$, $C_{\text{дифф}}(U)$ — нелинейные характеристики диода (ток проводимости и дифференциальная емкость). Уравнение (П.5.1) является предпосылкой для поиска модели с учетом внешнего воздействия в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{П.5.2}$$

Здесь x_1 имеет смысл силы тока через резистор R , x_2 — напряжения на диоде. Для построения модели требуется использовать векторный временной ряд значений силы тока и напряжения на диоде¹⁴.

Литература

1. Crutchfield J.P., McNamara B.S. Equations of motion from a data series // Complex Systems. 1987. Vol. 1. P. 417-452.
2. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equations from experimental

¹⁴ Можно получить модель вида (П.5.2), имеющую аттрактор качественно идентичный экспериментальному. Этому удастся достичь с использованием полинома f_1 первого порядка и полинома f_2 второго порядка.

- data // Z.Naturforschung A. 1987. Vol. 42. P. 797-802.
3. Baake E., Baake M., Bock H.J., Briggs K.M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys.Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 5524-5529.
 4. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys.Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955-4972.
 5. Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R. Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // Phys.Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3784-3800.
 6. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г. Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. В. 2. С. 269-277.
 7. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Реконструкция обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам: учебно-методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2000. 46 с.
 8. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series // Phys.Rev.Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 712-716.
 9. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence, in Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980, eds. D.Rang and L.S.Young, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 898. P. 366-381.
 10. Broomhead D.S., King G.P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D. 1986. Vol. 20. P. 217-236.
 11. Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Моделирование динамических систем по экспериментальным данным // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С.112-121.
 12. Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // Phys.Rev. A, 1992. Vol. 45. P. 3403-3411.
 13. Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А. Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду (модели, экспери-

- мент) // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1999. Т.7, № 1. С. 49-67.
14. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г., Чепурнов А.С. Построение по экспериментальным данным модели систем стабилизации резонансной частоты и температуры секции линейного ускорителя электронов // Вестник МГУ. 1994. Сер. 3. Т. 35, № 1. С. 96-98.
 15. Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Сложная динамика возбуждаемого осциллятора с кусочно-линейной характеристикой // Письма в ЖТФ, 1994. Т. 20. В. 19. С. 75-79.
 16. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator // Phys.Rev.Lett. 1981. Vol. 47, № 19. P. 1349-1352.
 17. Testa J., Perez J., Jeffries C. Evidence for universal behavior of a driven nonlinear oscillator // Phys.Rev.Lett. 1982. Vol. 48, № 11. P. 714-717.
 18. Klinker T., Meyer-Ilse W., Lauterborn W. Period doubling and chaotic behavior in a driven Toda oscillator // Phys.Lett. A. 1984. Vol. 101, № 8. P. 371-375.
 19. Bronson S.D., Dewey D., Linsay P.S. Self-replicating attractor of a driven semiconductor oscillator // Phys.Rev. A. 1983. Vol. 28. P. 1201-1203.
 20. Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П. Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии // Радиотехника и электроника, 1987. Т. 32, № 12. С. 2558-2566.
 21. Matsumoto T., Chua L.O., Tanaka S. Simplest chaotic nonautonomous circuit // Phys.Rev. A. 1984. Vol. 30. P. 1155-1158.
 22. Прохоров М.Д., Смирнов Д.А. Эмпирическая дискретная модель колебательного контура с диодом // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 11. С. 1340-1343.

Учебное издание

БЕЗРУЧКО Борис Петрович
ЛЕВИН Юрий Иванович
СМИРНОВ Дмитрий Алексеевич

Моделирование неавтономных систем по временным рядам

Учебное пособие

ГосУНЦ «Колледж», Лицензия ЛР №020773 от 15.05.98

Подписано к печати 03.04.2001. Формат 60×84, 1/16.
Бумага Сыктывкарская. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 2.56 (2.75). Уч.-изд. л. 2.5. Тираж 100 экз. Заказ № 201.

Издательство ГосУНЦ «Колледж»
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83.
Тел. (845-2) 523864



Отпечатано на ризографе издательства ГосУНЦ «Колледж»