

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

УДК 530.18

**ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ СВЯЗИ
МЕЖДУ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ ПО ВРЕМЕННЫМ РЕАЛИЗАЦИЯМ
ФАЗ КОЛЕБАНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВАХ
ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ**

© 2017 г. Е. В. Сидак^{1, 2, *}, Д. А. Смирнов^{1, 2}, Б. П. Безручко^{1, 2}

¹*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Российская Федерация, 410019, Саратов, ул. Зеленая, 38*

²*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83*

*E-mail: sidakev@gmail.com

Поступила в редакцию 17.06.2015 г.

Рассмотрена задача интервального оценивания времени запаздывания связи между колебательными системами по наблюдаемым временным рядам. Показано, что известные асимптотические оценки, основанные на эмпирической модели в виде системы фазовых осцилляторов первого порядка и формализме максимального правдоподобия, могут приводить к ошибочным выводам о величине запаздывания в двух типичных ситуациях: 1) нелинейные низкоразмерные системы, фазы которых хорошо определены, но значительные амплитудные флуктуации приводят к тому, что фазовое приближение при описании динамики недостаточно; 2) системы, фазы которых определены не вполне корректно из-за слишком больших амплитудных флуктуаций. Предложен способ эмпирической диагностики проблематических ситуаций и модификация метода (огрубленная оценка), обеспечивающая малую вероятность ошибочных выводов и в этих ситуациях. На эталонных системах с различными свойствами динамики (линейные стохастические осцилляторы, генераторы Ван-дер-Поля, хаотические системы Ресслера и Лоренца) показана эффективность предложенного диагностического критерия и огрубленной оценки.

DOI: 10.7868/S0033849417030196

ВВЕДЕНИЕ

Фазовое приближение широко используется при описании динамики колебательных систем в радиофизике и теории колебаний (см., например, [1–4]), а также в различных областях их приложений (см., например, [5, 6]). Благодаря снижению размерности используемых моделей и сохранению в них существенных свойств динамики, фазовое описание оказывается эффективным подходом для решения ряда задач, включая исследование условий синхронизации [6], генерации хаотических режимов с требуемыми характеристиками [5] и др. Из-за высокой чувствительности фазы колебаний к наличию внешних воздействий на систему, анализ фазовой динамики используется для выявления связей между колебательными системами по наблюдаемым временным рядам [7–11], что востребовано в различных областях исследований, от радиофизики [12] до геофизики [8, 13] и биомедицины [8, 9, 14–17]. В рамках такого анализа важно иметь средства для оценки времени запаздывания связи, например, при определении времени распространения

возмущений в климатической системе [13] и при распространении патологической активности в мозге [9, 16]. При работе с относительно короткими временными рядами длительностью в несколько десятков характерных периодов, что типично на практике, важно получить не только значение времени запаздывания (точечную оценку), но и обоснованную оценку его погрешности (доверительный интервал, интервальную оценку).

Разработке таких средств посвящен ряд недавних исследований [18–20], в которых методы оценки основаны на построении эмпирических моделей в виде системы фазовых осцилляторов первого порядка. При выводе формул для интервальных оценок [19, 20] используется то обстоятельство, что в эмпирической модели будущие флуктуации фаз определяются текущими значениями фаз и *независимыми от них* внешними шумами – случайными процессами со спектром белого [19] или цветного [20] шума. Эта форма модели строго обоснована при выполнении условий, что исследуемые автоколебательные системы в отсутствие связей и шумов демонстриру-

ют предельный цикл, а наличие связей и шумов приводит лишь к его слабым возмущениям [1, 3]. Численные тесты показывают, что разработанные оценки могут быть применимы при умеренном нарушении указанных условий [21]. Однако при их сильном нарушении, например, из-за наличия интенсивных шумов, ведущих к значительным амплитудным флуктуациям или из-за хаотических режимов низкоразмерных нелинейных систем, фазовое описание неполно, а модель фазовых осцилляторов первого порядка является весьма грубым приближением. Вполне вероятно, что это приближение и в таких более трудных случаях окажется достаточным, а соответствующие оценки времени запаздывания связи – применимыми, но это предположение требует проверки. В случае выявления ситуаций, ведущих к ошибочным оценкам, необходимо найти критерии для распознавания таких ситуаций на практике, а также поправки к имеющимся оценкам времени запаздывания связи, расширяющие область их применимости на такие проблематические случаи. Этим трем вопросам (выявлению проблематических ситуаций, разработке диагностических критериев и модификации оценок) посвящена данная работа.

1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

А. Метод получения оценки

Согласно методу, развитому в работах [18–20], по имеющимся временным рядам значений наблюдаемых величин $x_1(t)$ и $x_2(t)$ рассчитывают значения фаз колебаний $\{\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_N)\}$ и $\{\varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_N)\}$ ($t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки, N – длина ряда) при помощи одного из известных подходов, например, путем введения аналитического сигнала [2]. Во всех рассмотренных ниже примерах мы будем использовать такой подход. Затем строят модель фазовой динамики, форму которой выбирают из тех соображений, что фазовая динамика периодических автоколебательных слабо связанных процессов, возмущенных слабыми шумами, описывается [3, 22] стохастическими дифференциальными уравнениями

$$d\varphi_k(t)/dt = \omega_k + G_k(\varphi_k(t), \varphi_j(t - \Delta_{j \rightarrow k}^*)) + \xi_k(t), \quad k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \quad (1)$$

где ω_k – угловая частота колебаний (при $G_k \equiv 0$), $\xi_k(t)$ – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией (АКФ) $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = D_{\xi_k} \delta(t - t')$, $\Delta_{j \rightarrow k}^*$ – время запаздывания связи. Функции G_k определяют взаимодействие осцилляторов и их собственную фазовую нелиней-

ность. При анализе временных рядов удобно рассматривать разностные уравнения, которые можно получить путем интегрирования уравнений (1) на интервале длительности τ :

$$\begin{aligned} \varphi_k(t + \tau) - \varphi_k(t) &= \\ &= F_k(\varphi_k(t), \varphi_j(t - \Delta_{j \rightarrow k}^*)) + \varepsilon_k(t), \quad (2) \\ &k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$ – гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx D_{\xi_k} \tau$, АКФ которого $C_k(t') = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t - t') \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2$ (угловые скобки означают математическое ожидание) спадает до нуля на интервале от нуля до τ . Таким образом, для оценки времени запаздывания связи нужно построить модель вида (2) с тригонометрическими многочленами невысокого порядка, коэффициенты которых при каждом пробном $\Delta_{j \rightarrow k}$ следует определять путем минимизации среднего по времени квадрата остаточных ошибок модели

$$s_k^2 = \langle (\varphi_k(t_i + \tau) - \varphi_k(t_i) - F_k(\varphi_k(t_i), \varphi_j(t_i - \Delta_{j \rightarrow k})))^2 \rangle_i.$$

Достигнутое минимальное значение $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ затем минимизируют как функцию $\Delta_{j \rightarrow k}$ (рис. 1а). Обозначим точку минимума $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k} = \arg \min_{\Delta_{j \rightarrow k}} s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$. Для системы (1) несмещенной оценкой времени запаздывания является скорректированная величина $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k} + \tau/2$, а асимптотическая оценка ее дисперсии на основе формализма максимального правдоподобия определяется соотношением

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N'} \left(\frac{\partial^2 s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})}{\partial \Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где N' – число статистически независимых значений ε_k на длине временного ряда [19, 20]. Для исходной системы (1) с белым шумом значения ε_k , разделенные интервалом τ , являются независимыми, так

что $N' = \frac{N - \tau/\Delta t}{\tau/\Delta t}$. Если же АКФ шума ε_k , оцененная по остаточным ошибкам модели (2), спадает до малой величины (например, до 0.2 [20, 21]) за время $T > \tau$, то $N' = N\Delta t/T$. Таким образом, в общем случае $N' = N\Delta t/L$, где $L = \max[T, \tau]$. Параметр τ можно выбирать в диапазоне от десятых долей характерного периода до полного периода с близкими результатами, причем значение τ , равное четверти периода, дает во многих случаях не-

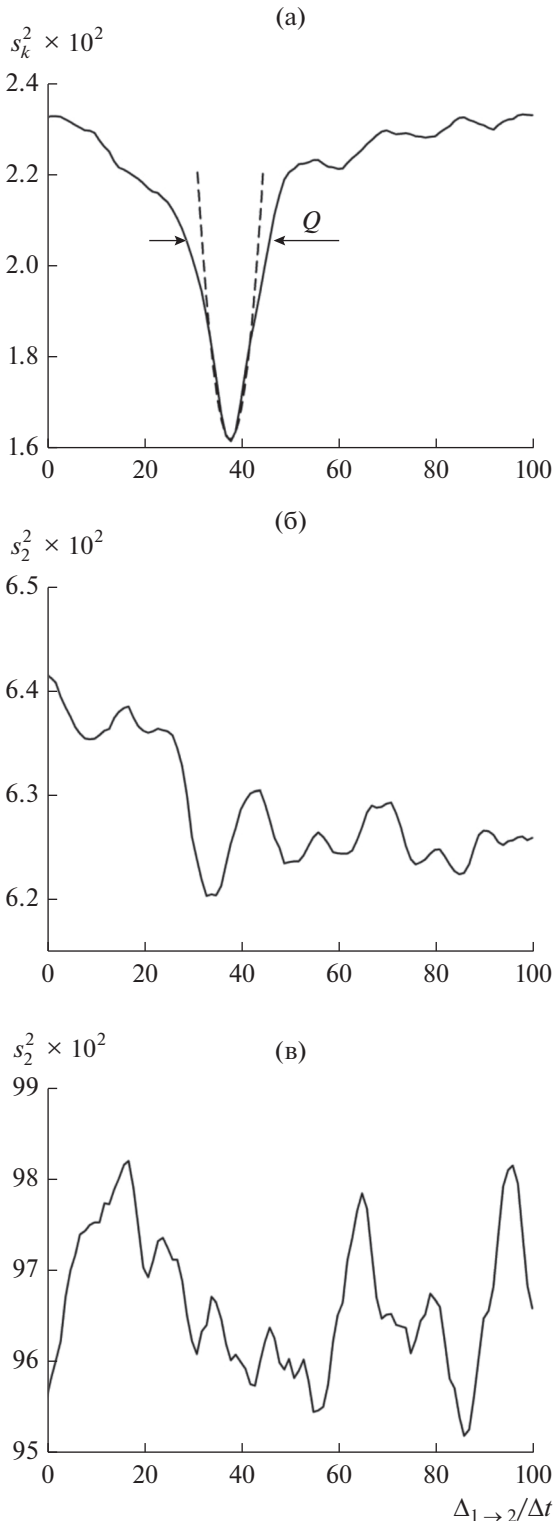


Рис. 1. Иллюстрация метода оценки запаздывания по ряду длиной 100 характерных периодов на примере фазовых осцилляторов (1) с $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 1.05$ в случае однонаправленной связи с запаздыванием $\Delta_{1 \rightarrow 2} = 40\Delta t$, $G_2(\varphi_2, \varphi_1) = 0.1 \sin(\varphi_2, \varphi_1)$ и белых шумов ξ_1 и ξ_2 с $D_{\xi_1} = 0.36$, $D_{\xi_2} = 0.01$ (а); $D_{\xi_1} = 0.01$, $D_{\xi_2} = 0.04$ (б); $D_{\xi_1} = 0.01$, $D_{\xi_2} = 0.64$ (в).

сколько лучшую точность оценки [19–21] и будет использовано далее. Для оценки второй производной в (3) зависимость $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ в окрестности точки минимума (шириной Q порядка характерного периода, рис. 1а) будем аппроксимировать квадратичной параболой (штриховая линия). При достаточной длине ряда оценка $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}}$ распределена приближенно по нормальному закону, так что 95%-ный доверительный интервал принимает вид

$$[\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}} - 2\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}; \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}} + 2\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}].$$

При этом ширина интервала $M = 4\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$.

Эффективность такой интервальной оценки была показана в работах [19, 20] на примере системы связанных фазовых осцилляторов, находящихся под воздействием белого или цветного шума. Однако эта оценка может давать ошибочные результаты, если зависимость $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ не имеет одного четкого определенного минимума (рис. 1б, 1в). Такая ситуация возникает при малом уровне шума в “ведущем” осцилляторе ϵ_j (см. рис. 1б) или при большом уровне шума в “ведомом” осцилляторе ϵ_k (см. рис. 1в). В обоих случаях вид графика $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ определяется конкретной реализацией шума ϵ_k , а не оцениваемой связью.

Б. Пример применения оценки и методика численного исследования

Для иллюстрации оценки в случае систем, слабо отличающихся от системы (1), и описания используемой далее методики исследования свойств оценок рассмотрим однонаправленно связанные генераторы Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \mu_1(1 - x_1^2(t)) \frac{dx_1}{dt} - \omega_1^2 x_1(t) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \mu_2(1 - x_2^2(t)) \frac{dx_2}{dt} - \omega_2^2 x_2(t) + \\ &+ K(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициент связи $K = 0.05$, время запаздывания $\Delta_0 = 12$, угловые частоты $\omega_1 = 1.02$, $\omega_2 = 0.98$, параметры $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0.2$, интенсивность D_{ξ_1} шума ξ_1 менялась в широком диапазоне, $D_{\xi_2} = 0.09$. При определении амплитуд и фаз соотношениями $x_{1,2} = A_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$ и $\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2} A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}$ фазовая динамика ведомого осциллятора описывается следующим (не укороченным) уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} = & \omega_2 + \frac{\mu_2(1 - A_2^2(t)/2)}{2} \sin 2\varphi_2(t) - \\ & - \frac{\mu_2 A_2^2(t)}{8} \sin 4\varphi_2(t) + \frac{K(1 + \cos 2\varphi_2(t))}{\omega_2} - \\ & - \frac{KA_1(t) \cos(\varphi_1(t - \Delta_0) + \varphi_2(t)) + \cos(\varphi_1(t - \Delta_0) - \varphi_2(t))}{\omega_2 A_2(t)} - \frac{\xi_2(t) \cos \varphi_2(t)}{\omega_2 A_2(t)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение для фазы можно представить как фазовый осциллятор (1) с модуляцией параметров меняющимися амплитудами и модуляцией шумов амплитудами и фазами. При этом в уравнении для амплитуды A_2 есть зависимость от фазы колебаний (которая здесь не представлена). Если флуктуации амплитуд малы, то различия между уравнениями (5) и (1) также малы. При осреднении уравнений (5) на интервале τ , сопоставимом с периодом колебаний, роль амплитудных флуктуаций несколько снижается. Таким образом, и при варьирующих амплитудах можно полагаться на применимость упрощенной модели (2) и соответствующих оценок времени запаздывания связи.

В численных экспериментах временные ряды были получены путем интегрирования уравнений (4) методом Эйлера с шагом 0.01. Для оценки связей были использованы сигналы $x_{1,2}$, записанные с интервалом выборки $\Delta t = 0.3$ (20 точек на периоде), длина ряда составляла $N = 2000$ (около 100 характерных периодов), параметр $\tau = 1.5$. Фазы, введенные методом аналитического сигнала, близки при рассматриваемом малом μ к фазам, полученным тригонометрической заменой координат [6]. По ансамблю из 100 пар временных рядов подсчитывалась частота $f_{\text{ош}}$ ложных выводов о величине Δ_0 , т.е. ситуаций, когда Δ_0 не принадлежит интервалу $[\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}} - 2\hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}; \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}} + 2\hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}]$. Оценка применима, если вероятность ложных выводов не больше 0.05, так как доверительный интервал 95%-ный. При учете статистических флуктуаций частоты $f_{\text{ош}}$, которая распределена по закону Бернулли, допустимое пороговое значение $f_{\text{ош}}$ для используемого размера ансамбля составляет 0.1.

На рис. 2 приведены результаты оценок времени запаздывания. Величина $f_{\text{ош}}$ при $D_{\xi_2} = 0.09$ (рис. 2а, кривая 1) не превышает ожидаемый уровень 0.1 (штриховая линия) при интенсивности шума в ведущей системе $D_{\xi_1} > 0.3$. При этом и достаточно большие уровни шума в ведущем генераторе не приводят к ошибкам: амплитудные флуктуации в ведомом генераторе присутствуют, но не велики, а график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ демонстрирует четкий минимум (рис. 2б). При $D_{\xi_1} < 0.3$ число

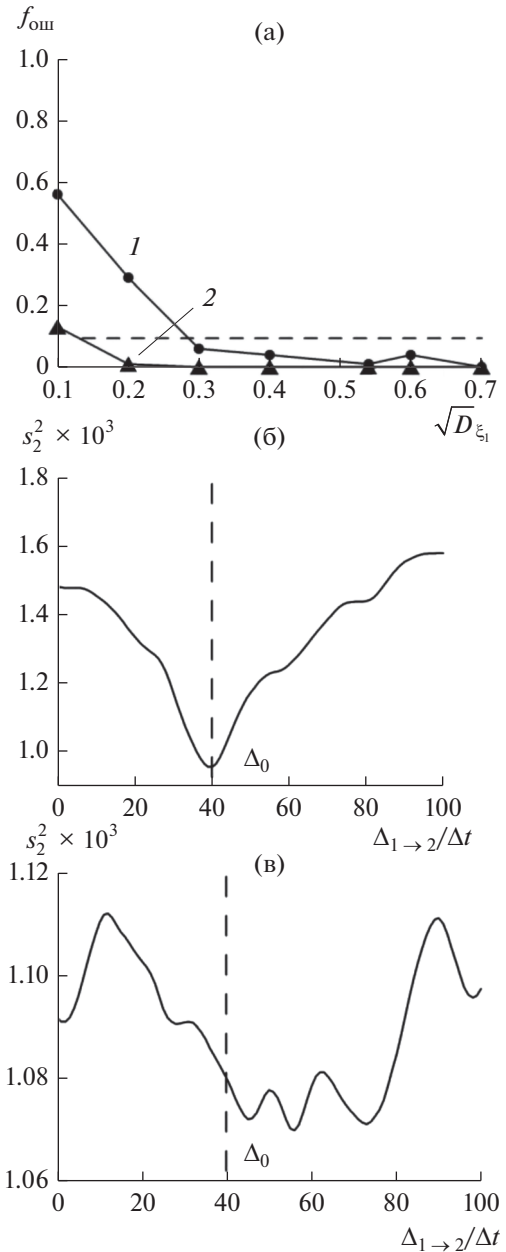


Рис. 2. Оценивание времени запаздывания связи для системы (4): а – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе для асимптотического метода (кривая 1), для огрубленной оценки (кривая 2); б – график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельного ряда при $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.1, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.09$; в – аналогичный график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ при $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.7, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.09$.

ошибок становится большим, что на практике может быть диагностировано по изрезанности графика $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ (рис. 2в) аналогично рис. 1б. Таким образом, как ожидалось, асимптотические оценки применимы при небольшом отличии динамики систем от (1). Рассмотрим теперь более сложные варианты такого отличия.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\omega_1 y_1(t) - z_1(t) + \xi_1, \\ \dot{y}_1(t) = \omega_1 x_1(t) + a y_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = b - z_1(t)(r - x_1(t)); \\ \dot{x}_2(t) = -\omega_2 y_2(t) - z_2(t) + K(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2, \\ \dot{y}_2(t) = \omega_2 x_2(t) + a y_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = b - z_2(t)(r - x_2(t)), \end{cases} \quad (6)$$

где угловые частоты $\omega_1 = 1.015$, $\omega_2 = 0.985$, $a = 0.1$, $b = 0.1$, параметр r меняли в широком диапазоне, обеспечивая различные динамические режимы [23], от цикла периода один через каскад бифуркаций удвоения периода до хаоса; $\xi_{1,2}$ – белые шумы с

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ХОРОШО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФАЗОЙ

А. Связанные системы Ресслера

В качестве примера низкоразмерных нелинейных систем с возможностью как периодической, так и хаотической динамики с хорошо определенной фазой рассмотрим системы Ресслера:

интенсивностями $D_{\xi_{1,2}}$, $\Delta_0 = 12$ – время запаздывания связи, K – коэффициент связи. При определении амплитуд и фаз по формулам $x_{1,2} = A_{1,2} \cos \varphi_{1,2}$ и $y_{1,2} = A_{1,2} \sin \varphi_{1,2}$ фазовая динамика ведомой системы описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 + \frac{z_2(t)}{A_2(t)} \sin \varphi_2(t) + \frac{K+a}{2} \sin 2\varphi_2(t) - \\ - \frac{KA_1(t) \sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t - \Delta_0)) + \sin(\varphi_2(t) + \varphi_1(t - \Delta_0))}{2} - \frac{\xi_2(t) \sin \varphi_2}{A_2(t)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно из уравнения (7), для систем Ресслера и при нулевых $D_{\xi_{1,2}}$ в приближенную модель фазовой динамики вида (1) или (2) необходимо ввести “шумовые” слагаемые, аппроксимирующие влияния амплитуды и третьей координаты z . Такие слагаемые иногда называют “эффективными фазовыми шумами”, а свойства таких “шумов” в случае маломерных нелинейных систем (особенно со сложной динамикой) могут быть весьма нетривиальными [6, 24]. Это определяет интерес к данной ситуации и может привести к трудностям при применении асимптотической оценки. При ненулевых $D_{\xi_{1,2}}$ в системе (6) шумы в фазовых моделях (1) или (2) являются аппроксимацией комбинированного воздействия случайных процессов $\xi_{1,2}$ и неучтенных динамических переменных исходной системы.

В численных экспериментах сигналы $x_{1,2}$ были получены, как в предыдущем примере (только шаг интегрирования был равен 0.001), и проанализированы аналогичным образом. На рис. 3 и 4 приведены результаты оценивания при $K = 0.05$ для периодического ($r = 4$) и хаотического ($r = 10$) режимов по временным рядам длиной 2000 точек

(100 характерных периодов) и 20000 точек (1000 характерных периодов). “Благополучными” случаями ($f_{\text{ош}} < 0.1$) являются следующие: возмущенный периодический режим при $\sqrt{D_{\xi_1}} > 0.7$ (рис. 3а, кривая I) и возмущенный хаотический режим при $\sqrt{D_{\xi_1}} > 0.6$ (рис. 4а, кривая I). При меньших уровнях шума $f_{\text{ош}}$ превышает 0.1. Это аналогично предыдущему примеру, так как ошибки при малых уровнях шума диагностируются по отсутствию четкого минимума на графике $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$.

Ситуация усложняется при увеличении длины временного ряда до 1000 периодов, где наблюдается большая частота ошибочных выводов и при больших уровнях шума: $\sqrt{D_{\xi_1}} > 0.9$ для периодического режима (рис. 3б, кривая I) и $\sqrt{D_{\xi_1}} > 1$ для хаотического режима (рис. 4б, кривая I). При этом оказывается, что смещение величины $\hat{\Delta}_{1 \rightarrow 2}$ относительно Δ_0 отличается от значения $-\tau/2$, так что оценка $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}}$ остается смещенной относительно истинного времени запаздывания Δ_0 . Формула для ее дисперсии (3) остается приближенно вер-

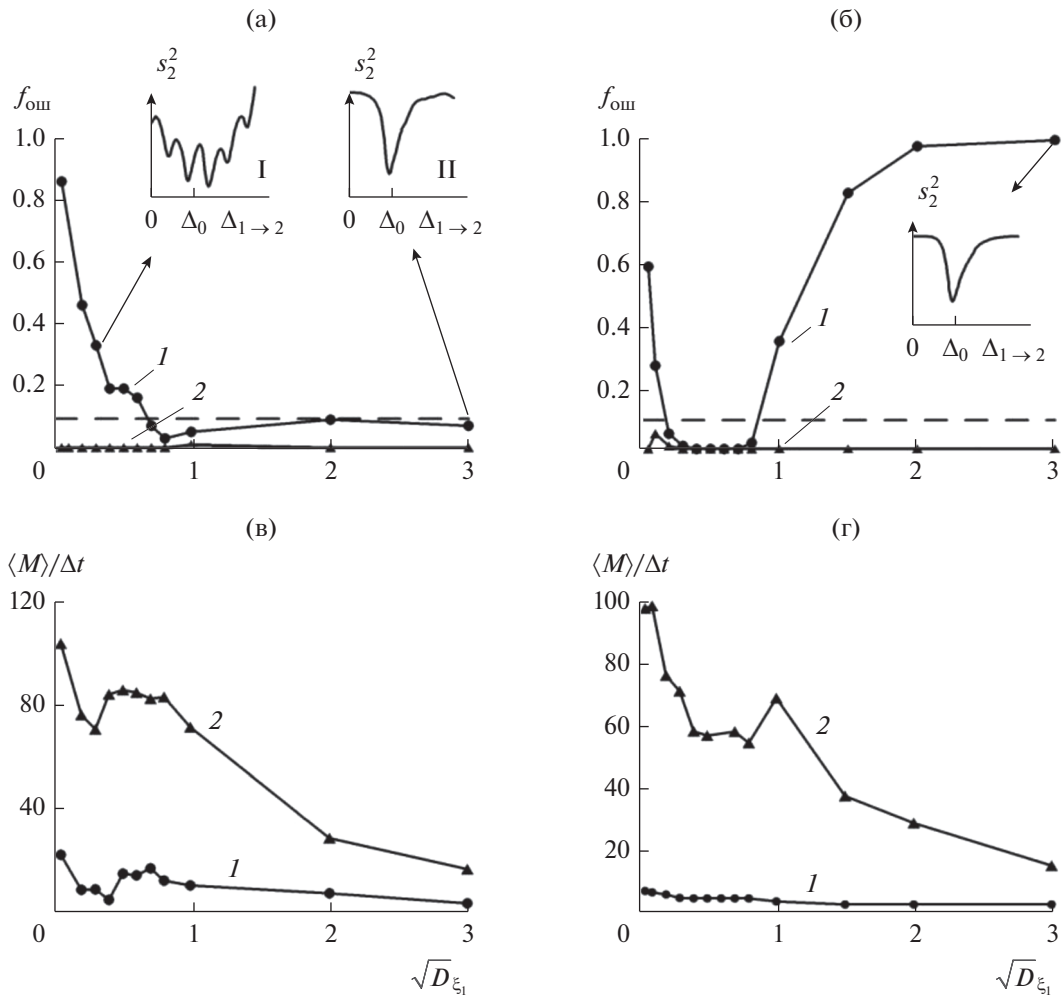


Рис. 3. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) при $a = 0.1, b = 0.1, r = 4$, соответствующих периодическому режиму, и $K = 0.05$: частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N = 2000$ (а) и 20000 точек (б) для асимптотического метода (кривая 1) и для модифицированной “огрубленной” оценки (кривая 2); средняя ширина доверительного интервала $\langle M \rangle$ при $N = 2000$ (в) и 20000 (г); на вставках – графики $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов: а) I – для $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.3, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.089$, II – для $\sqrt{D_{\xi_1}} = 3, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.089$; б) для $\sqrt{D_{\xi_1}} = 3, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.089$.

ной и дает малые значения для длинного ряда, так что ширина доверительного интервала становится также малой – порядка ненулевого смещения оценки $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{кор}$, что и приводит к частым ошибкам.

При введении связи между системами в уравнение (6) получаются аналогичные результаты (соответствующие графики мы не приводим), отличающиеся, однако, более многочисленными ситуациями с большой частотой ошибочных выводов, что связано с еще более сильным смещением оценки $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{кор}$. По всей видимости, ненулевые смещения $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{кор}$ вызваны особенностями взаимодействия фазы с не учитываемыми в модели (2) амплитудой и координатой z , что ведет к неадекват-

ности фазового описания (2) с независимыми внешними шумами. Для различных нелинейных систем или одной системы с различными параметрами это смещение может быть разным. Для диагностики таких ситуаций на практике недостаточно прежних соображений об отсутствии четкого минимума на графике $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ (см. вставку на рис. 3б). Однако можно отметить, что рассмотренные ситуации отличаются от случая исходной системы (1) с белыми шумами (см. рис. 1а) тем, что, хотя график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ демонстрирует явный глобальный минимум, его форма не близка к квадратичной параболе. Он является или несимметричным относительно точки минимума (см. вставки на рис. 3а, 3б), или более “плоским”, либо имеет

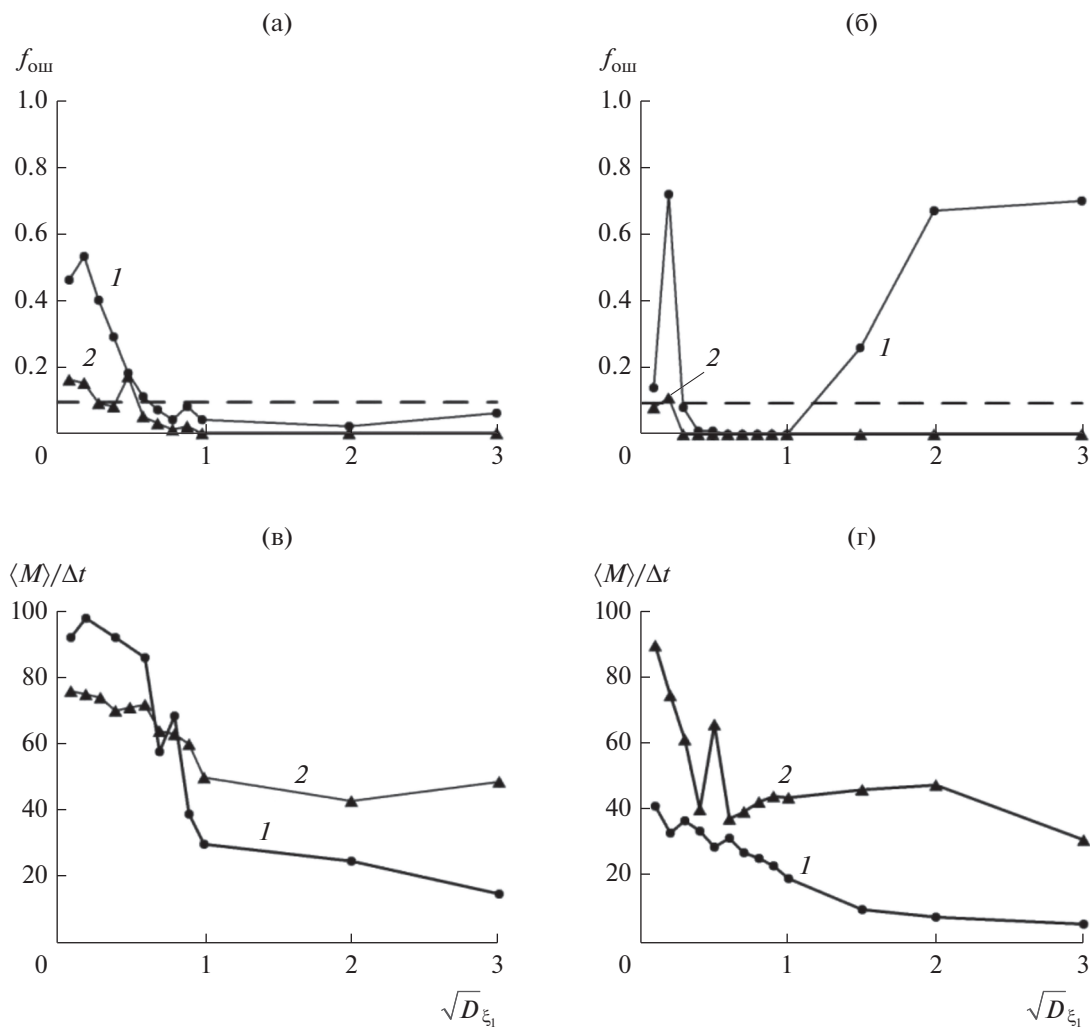


Рис. 4. Оценивание времени запаздывания связи для системы (6) в хаотическом режиме ($a = 0.1, b = 0.1, r = 10$) при $K = 0.05$: частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $N = 2000$ (а) и 20000 точек (б) для асимптотического метода (кривая 1) и для модифицированной “огрубленной” оценки (кривая 2); средняя ширина доверительного интервала $\langle M \rangle$ при $N = 2000$ (в) и при $N = 20000$ (г).

кроме глобального минимума еще и глубокие локальные минимумы (см. вставку на рис. 3а). Эти черты, по-видимому, определяются характером нелинейности рассматриваемой системы. В случае распознавания такой проблемы на практике, нужно дополнить асимптотические оценки более надежными, что сделано ниже.

Б. Огрубленные оценки времени запаздывания

Для получения более надежных оценок запаздывания при наличии четкого минимума $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ с “неправильной” формой следует отказаться от локальной аппроксимации графика параболой и использовать огрубленную оценку ширины глобального минимума. Мы предлагаем провести на

плоскости $(\Delta_{1 \rightarrow 2}, s_2^2)$ секущую, параллельную оси абсцисс на уровне $y = s_{2, \text{мин}}^2 + (s_{2, \text{макс}}^2 - s_{2, \text{мин}}^2)/2$, где $s_{2, \text{мин}}^2 = \min_{\Delta_{1 \rightarrow 2}} s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ и $s_{2, \text{макс}}^2 = \max_{\Delta_{1 \rightarrow 2}} s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ —

минимальное и максимальное значения s_2^2 в выбранном диапазоне пробных $\Delta_{1 \rightarrow 2}$ (рис. 5). В качестве интервальной оценки времени запаздывания примем отрезок $[\Delta_L; \Delta_R]$ между “самой левой” и “самой правой” точками пересечения секущей с графиком $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ (см. рис. 5), тогда ширина $M = \Delta_R - \Delta_L$.

На рис. 3а, 3б, 4а, 4б показаны результаты оценки запаздывания с использованием огрубленной оценки (кривые 2). В случае как периодического, так и хаотического режимов вероятность

ошибочных оценок оказывается не более 0.05 во всех проблематических ситуациях (см. рис. 3а, 3б, 4а, 4б), а также и для способа введения связи через координату y . Исключение составляют такие случаи при малых значениях $\sqrt{D_{\xi_1}}$, когда график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ не имеет выраженного глобального минимума. Надежность выводов достигается за счет уширения доверительного интервала (см. кривые 1 и 2 на рис. 3в, 3г, 4в, 4г, которые показывают средние по ансамблю реализаций значения M), т.е. уменьшения чувствительности оценки при выявлении ненулевого запаздывания. Однако и огрубленная интервальная оценка в рассмотренных ситуациях зачастую не включает нуль, выявляя запаздывание: например, при $K = 0.05$, $\sqrt{D_{\xi_1}} = 2$, $\sqrt{D_{\xi_2}} = 0.089$, $N = 20000$ имеем для огрубленного метода $f_{\text{ош}} = 0$ при доверительном интервале $\pm 15\Delta t$ относительно истинного значения $\Delta_0 = 40\Delta t$, а для асимптотической оценки $-f_{\text{ош}} = 0.98$.

Предложенный вариант секущей на среднем уровне, судя по результатам численных экспериментов, “с запасом” позволяет избежать ошибочных выводов для широкого класса колебательных систем, т.е. является “консервативной” оценкой. Чтобы получить более узкий доверительный интервал, можно использовать величину y не на среднем уровне между максимумом и минимумом, а несколько ниже. Такое значение y можно подбирать эмпирически для выделенных классов осцилляторов, чтобы вероятность ошибочных выводов о величине запаздывания была мала, что требует дополнительных исследований. Если же нужна повышенная надежность вывода о наличии запаздывания связи и ошибки крайне нежелательны, то предложенная оценка с использованием секущей на среднем уровне вполне подходит.

3. СИСТЕМЫ С ТРУДНОСТЯМИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФАЗЫ

Исследуем работоспособность предложенной огрубленной оценки в распространенных на практике ситуациях, где фаза определяется не вполне корректно, так как нет вращения аналитического сигнала на комплексной плоскости вокруг хорошо определенного центра. При этом дисперсия шума в эмпирической модели фазовой динамики оказывается значительно больше, чем в предыдущих примерах. Это может быть вызвано как случайными воздействиями на систему и относительно широким спектром мощности сигнала (см. разд. 3А), так и особенностями динамики на хаотическом аттракторе системы, включая интенсивную диффузию фазы (см. разд. 3Б).

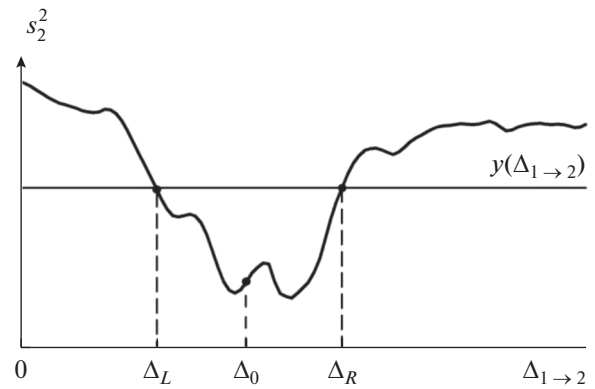


Рис. 5. Иллюстрация огрубленной интервальной оценки времени запаздывания.

А. Линейные стохастические осцилляторы

Однонаправленно связанные линейные диссипативные осцилляторы под действием белого шума описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\gamma_1 \frac{dx_1(t)}{dt} - \omega_1^2 x_1(t) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\gamma_2 \frac{dx_2(t)}{dt} - \omega_2^2 x_2(t) + \\ &+ K(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь коэффициент связи $K = 0.05$, время запаздывания $\Delta_0 = 12$ (т.е. $40\Delta t$), угловые частоты $\omega_1 = 1.05$, $\omega_2 = 0.95$, параметр диссипации γ_k определяет добротность колебаний и индивидуальную ширину спектра мощности. При больших γ_k добротность низка, сигнал $x_k(t)$ имеет широкий спектр и не вполне корректно определенную фазу из-за частых возвратов фазовой траектории в окрестность нуля. При этом из-за достаточно частых малых значений амплитуды значительно возрастает интенсивность фазовой диффузии. При малых γ_k этот эффект проявляется меньше и можно рассчитывать как на применимость эмпирической модели (2), так и достаточно высокую точность соответствующей асимптотической оценки времени запаздывания.

На рис. 6 приведены результаты оценки запаздывания связи для системы (8). Частоты ошибок $f_{\text{ош}}$ представлены в зависимости от $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ на рис. 6а для асимптотической (кривая 1) и огрубленной (кривая 2) оценок: при $\gamma < 0.8$ оба подхода дают $f_{\text{ош}}$ не более допустимого уровня 0.1. Ошибки асимптотической оценки при больших значениях γ , когда спектр широк и фаза плохо определена, вновь связаны с тем, что график зависимости $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ сильно изрезан (соответствующий график здесь не приводится). Огрубленная

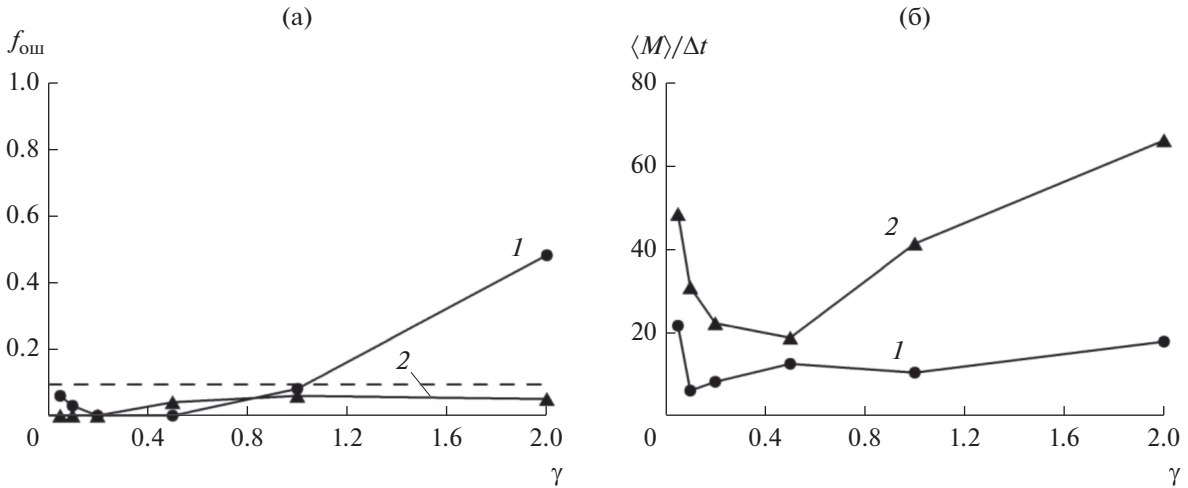


Рис. 6. Оценивание времени запаздывания связи для системы (8) при $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.4, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.1$: а – частота ложных выводов в зависимости от γ для асимптотической оценки (кривая 1) и для огрубленной оценки (кривая 2); б – средняя по ансамблю реализаций ширина доверительного интервала $\langle M \rangle$ для асимптотической оценки (кривая 1) для огрубленной оценки (кривая 2).

оценка при всех рассмотренных γ дает частоту ошибок, не более допустимого уровня. На рис. 6б приведена средняя ширина доверительного интервала M . Ее значения при $\gamma \approx 0.5$ близки для обеих оценок, при других γ огрубленная оценка дает более широкий доверительный интервал (кривая 2) по сравнению с асимптотической (кривая 1).

Б. Системы Лоренца

В качестве примера систем с интенсивной диффузией фазы, в значительной степени обусловленной собственной низкоразмерной хаотической динамикой, рассмотрим связанные системы Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sigma_1(y_1(t) - x_1(t)) + \xi_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = x_1(t)(r_1 - z_1(t)) - y_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = x_1(t)y_1(t) - b_1z_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = \sigma_2(y_2(t) - x_2(t)) + \\ + K(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = x_2(t)(r_2 - z_2(t)) - y_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = x_2(t)y_2(t) - b_2z_2(t), \end{cases} \quad (9)$$

где K – коэффициент связи, $\Delta_0 = 6$ (т.е. $20\Delta t$) – время запаздывания, параметры $\sigma_1 = \sigma_2 = 10, r_1 = 40, r_2 = 35, b_1 = b_2 = 8/3$ соответствуют хаотическому режиму, $\xi_{1,2}$ – белые шумы. Были проанализированы сигналы $z_{1,2}$ с интервалом выборки $\Delta t = 0.0628$ (10 точек на периоде) при длине ряда $N = 10000$ (примерно 1000 периодов).

На рис. 7а приведена зависимость $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ при $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.6$ и $\sqrt{D_{\xi_2}} = 0.2$ (при нулевых шумах результаты оказываются сходными). Согласно предложенному диагностическому критерию асимптотическая оценка запаздывания может быть не вполне надежна, поскольку наблюдаются дополнительные достаточно глубокие минимумы вблизи глобального минимума. Как видно из рис. 7б (кривая 1), доля ошибок $f_{\text{ош}}$ для асимптотической оценки велика (близка к единице) при различных уровнях шума $\sqrt{D_{\xi_1}}$. Эти частые ошибки вновь вызваны ненулевым смещением оценки $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{кор}}$, т.е. имеет место недооценка величины Δ_0 на $6\Delta t$. Как и в случае систем Ресслера (разд. 2А), смещение оценки, по-видимому, определяется особенностями низкоразмерной нелинейной динамики, влиянием неучтенных в (2) координат на фазы колебаний. Частота ошибок для огрубленной оценки не превышает заявленный уровень значимости (см. рис. 7б, кривая 2). Ширина доверительного интервала M при этом больше, чем для асимптотической оценки (рис. 7в), но позволяет установить отличие запаздывания от нуля.

Отметим, что для системы (9) использование более коротких рядов (например, длиной 100 периодов) приводит к тому, что график зависимости $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ при любых интенсивностях шумов $\xi_{1,2}$ не демонстрирует явного минимума, так как интенсивность диффузии фазы велика уже за счет собственной хаотической динамики, что приближает этот случай к ситуации на рис. 1в.

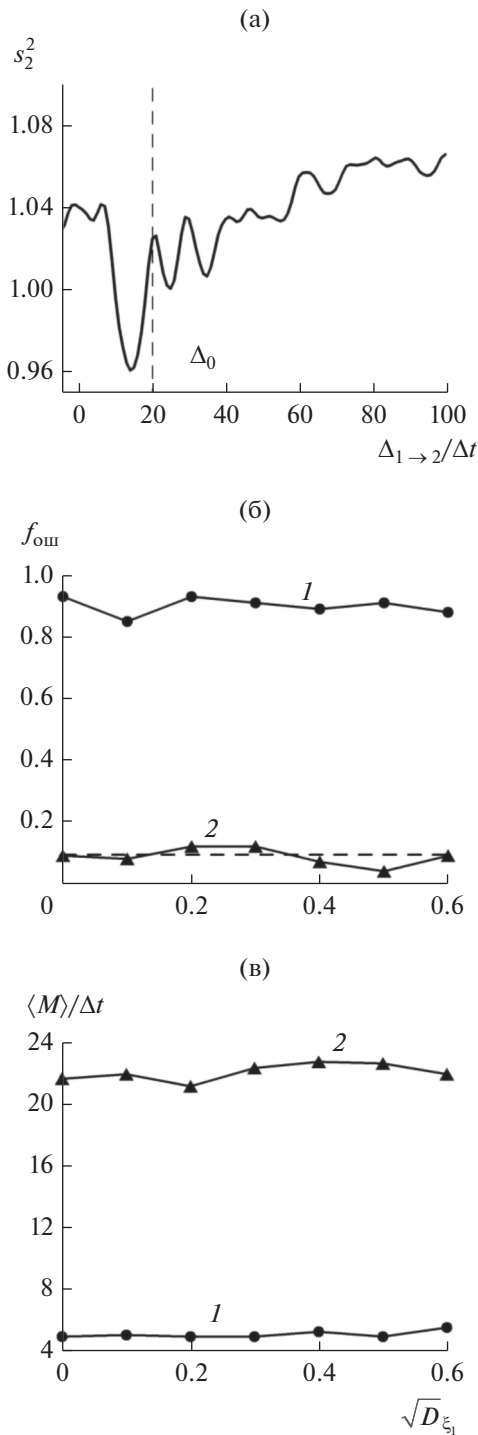


Рис. 7. Оценивание времени запаздывания связи для системы (9): а – график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельного ряда при $\sqrt{D_{\xi_1}} = 0.6, \sqrt{D_{\xi_2}} = 0.2$; б – частота ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе для асимптотической оценки (кривая 1) и для огрубленной оценки (кривая 2); в – средняя по ансамблю ширина доверительного интервала $\langle M \rangle$ для асимптотической оценки (кривая 1) и для огрубленной оценки (кривая 2).

Таким образом, случайные внешние воздействия и собственная низкоразмерная хаотическая динамика исследуемых систем могут приводить к не вполне корректно определенным фазам и большой интенсивности фазовой диффузии. Однако и в этих случаях предложенная огрубленная оценка, наряду с диагностическим критерием трудностей по графику $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$, позволяет получать надежные интервальные оценки времени запаздывания связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы возможности интервальной оценки времени запаздывания связи между колебательными системами по наблюдаемым временным рядам при различных свойствах их фазовой динамики. Показано, что известная асимптотическая оценка на основе метода моделирования фазовой динамики может приводить к ошибочным выводам о величине запаздывания в случае хаотических или сильно возмущенных периодических режимов динамики низкоразмерных нелинейных систем, а также при не вполне корректно определенной фазе и большой интенсивности фазовой диффузии в эмпирической модели фазовой динамики. Предложен диагностический критерий для распознавания таких ситуаций на практике, основанный на виде графика зависимости ошибки модели от пробного запаздывания. Получена дополнительная огрубленная оценка, которая позволяет избежать частых ошибочных выводов. Последнее достигается за счет некоторого уширения доверительного интервала и, тем самым, некоторого снижения чувствительности метода. Эффективность предложенного диагностического критерия и огрубленной поправки проиллюстрирована на эталонных колебательных системах с различными свойствами динамики (линейных стохастических осцилляторах, генераторах Ван-дер-Поля, системах Ресслера и Лоренца в различных режимах динамики). Предложенные поправки полезны в тех практических ситуациях, когда крайне нежелательны ошибочные выводы о величине запаздывания и важно обеспечить их малую вероятность. Полученные результаты расширяют возможности достоверного оценивания времени запаздывания связей между колебательными системами с различными свойствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00291).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.

2. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
3. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
4. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
5. *Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* Динамический хаос в фазовых системах. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2007.
6. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
7. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 4. P. 045202(R).
8. *Смирнов Д.А.* // РЭ. 2006. Т. 51. № 5. С. 569.
9. *Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. и др.* // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 323.
10. *Smirnov D.A., Bezruchko V.P.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. № 4. P. 046204.
11. *Kralemann B., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Chaos. 2011. V. 21. № 2. P. 025104.
12. *Bezruchko V., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Chaos. 2003. V. 13. № 1. P. 179.
13. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 2006. Т. 42. № 5. С. 650.
14. *Brea J., Russell D.F., Neiman A.B.* // Chaos. 2006. V. 16. № 2. P. 026111.
15. *Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. et al.* // Chaos. 2009. V. 19. № 3. P. 033112.
16. *Tass P., Smirnov D., Karavaev A. et al.* // J. Neural Engineering. 2010. V. 7. 016009.
17. *Suprunenko Y.F., Clemson P.T., Stefanovska A.* // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. № 2. P. 024101.
18. *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 4. P. 046213.
19. *Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 3. № 1. С. 64.
20. *Сидак Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. № 20. С. 104.
21. *Сидак Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58. № 7. С. 587.
22. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2291.
23. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* // Успехи физ. наук. 2005. Т. 175. № 2. С. 163.
24. *Smirnov D.A., Sidak E.V., Bezruchko V.P.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. № 10. P. 2441.