



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 530.182, 51-73

MSC 2010: 37M10

Реконструкция матрицы связей ансамбля идентичных нейрopodobных осцилляторов с запаздыванием в связи

И. В. Сысоев, В. И. Пономаренко

Реконструкция уравнений колебательных систем по экспериментальным данным является важной задачей, поскольку результаты могут быть использованы для самых различных практических приложений, включая прогноз поведения исследуемых систем, косвенное измерение их параметров и диагностику взаимодействия. Одним из вариантов практически важных приложений является задача о реконструкции коэффициентов связи в ансамблях большого числа осцилляторов. Целью данной работы является разработка метода восстановления ансамбля идентичных нейрopodobных осцилляторов при наличии задержек в связях в предположении, что общий вид уравнения известен.

Предложен метод, который опирается на ранее разработанный подход для реконструкции ансамблей диффузионно связанных осцилляторов с запаздыванием. Для определения коэффициентов связи для каждого осциллятора ансамбля отдельно минимизируется методом наименьших квадратов целевая функция, характеризующая непрерывность экспери-

Получено 21 сентября 2016 года

После доработки 14 октября 2016 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 16-34-00203, 16-02-00091, и стипендии Президента РФ для молодых учёных СП-1510.2015.4.

Сысоев Илья Вячеславович

ivssci@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Пономаренко Владимир Иванович

ponomarenkovi@gmail.com

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН

410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

ментальных данных. Времена запаздывания в связях вычисляются методом градиентного спуска, адаптированным к дискретному случаю.

В численном эксперименте показано, что предложенный метод позволяет точно восстановить подавляющее большинство ($\sim 99\%$) времён запаздывания даже при использовании коротких временных рядов, а также является асимптотически несмещённым.

Ключевые слова: временные ряды, ансамбль осцилляторов, задержка в связях, реконструкция уравнений

1. Введение

Изучение сложных хаотических режимов динамических систем началось с исследования достаточно простых маломерных объектов, таких как логистическое отображение и система Лоренца [1]. Далее сложное нерегулярное поведение было выявлено в ансамблях простых колебательных систем, неспособных демонстрировать сложную динамику самостоятельно [2], в том числе было показано существование в таких ансамблях аттракторов гиперболического типа. Значительный прогресс в понимании коллективной сложной динамики дало изучение явления синхронизации [3, 4]. В настоящее время значительное число работ посвящено изучению коллективной динамики очень простых элементов, описываемых уравнениями первого порядка и неспособных в отсутствие связи демонстрировать даже колебательные режимы. На примере фазовых осцилляторов [9] было показано существование особого динамического режима, известного как состояние химеры [10]. Системы простейших нейроподобных элементов [5] также демонстрируют сложные режимы. Интересно, что в [5] и [9] рассматриваются только ансамбли идентичных осцилляторов, а переход к сложной динамике доказан в пределе $D \rightarrow \infty$, где D — число осцилляторов (размерность системы). Сложное поведение в больших конечных ансамблях исследуется в обеих работах численно, но является ли оно действительно аттрактором или соответствует очень длинному переходному процессу — до конца не ясно.

Параллельно с изучением свойств динамических систем развивались методы решения обратной задачи — восстановления оператора эволюции по экспериментально измеренным временным рядам. Большинство из них относится к некоторым сравнительно узким классам объектов: осцилляторы с полиномиальной нелинейностью и нелинейностью, выраженной в виде отношения полиномов [11], в том числе под гармоническим [12], периодическим и квазиопериодическим воздействием [13], осцилляторы с одним [14] и двумя [15] запаздывающими аргументами, системы с известным оператором эволюции, но при наличии скрытых переменных [16]. Подходы к реконструкции связанных систем в большинстве случаев опираются на аналогичные подходы к реконструкции одиночных элементов [17], то есть предполагается, что колебательный режим в связанной системе слабо отличается от режима автономных колебаний. Однако при реконструкции систем вида

$$\dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j), \quad (1.1)$$

описанных в [5, 6], данный подход неприменим, так как индивидуальные элементы такого ансамбля в отсутствие связей не совершают колебаний (в принципе, возможна реконструкция по временному ряду переходного процесса аналогично [18], но чтобы этот ряд был достаточно длинным, необходимо многократно возмущать динамику отдельного элемента, что мало отличается от задачи реконструкции неавтономной системы).

В данной работе предлагается алгоритм реконструкции ансамбля связанных нейродобных элементов типа (1.1) при условии небольшой модификации: предполагается, что связи между элементами имеют запаздывание, в каждой связи своё. Алгоритм состоит из двух частей: подхода к реконструкции данного осциллятора при известных временах запаздывания, который основан на сортировке значений временного ряда реконструируемого колебательного элемента, как в [19], и подхода к реконструкции времён запаздывания. Предлагаемый алгоритм позволяет восстановить все коэффициенты связи, а также все времена запаздывания. Его эффективность показана в численном эксперименте.

2. Метод

2.1. Рассматриваемая система

Рассмотрим ансамбль D подсистем, описываемых уравнением вида (2.1). Система

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(t - \tau_{i,j})), \\ h(x) &= \text{th}(gx). \end{aligned} \quad (2.1)$$

представляет собою модификацию системы вида (1.1), рассмотренной в [5, 6]. Основное отличие системы (2.1) от системы (1.1), рассмотренной в [5], заключается в наличии задержек в связи $\tau_{i,j}$. Наличие задержек в связи приближает систему (2.1) к моделям реальных взаимодействий нейронов мозга. Далее для определённости будем рассматривать систему (2.1) при $g = 1$.

В [5] показано, что в ансамбле (1.1) реализуется за счёт связей хаотический режим при $D \rightarrow \infty$, если параметр $gJ = g \sqrt{\langle k_{i,j}^2 \rangle_{i,j}} / D$, характеризующий среднюю силу связей, достаточно велик (хаотическое поведение в пределе $D \rightarrow \infty$ показано для $gJ > 2$) при условии, что коэффициенты связи $k_{i,j}$ суть нормально распределённые с нулевым средним случайные числа.

Действительно, даже исходная система (1.1) демонстрирует нерегулярное поведение при некоторых наборах $k_{i,j}$ и достаточно большом D (например, при $D \geq 64$). Численная оценка старшего ляпуновского показателя даёт значения, значимо превосходящие 0. Однако, поскольку существование хаотического аттрактора в системе (1.1) с конечным числом элементов строго не показано, а бифуркационные механизмы не изучены, наблюдаемое сложное поведение может быть также и очень продолжительным переходным процессом. Впрочем, для целей моделирования реальных систем вопрос о существовании хаотического аттрактора гиперболического типа, хотя и важен, не является принципиальным.

При введении задержек $\tau_{i,j}$, различных для всех элементов ансамбля, требования к числу элементов, при котором наблюдается сложное поведение, существенно ослабляются. В частности, уже при $D = 16$ удаётся пронаблюдать хаотический режим (см. рис. 1), причём коэффициенты связи нет нужды подбирать специально — годится почти любая случайно сгенерированная матрица.

2.2. Реконструкция отдельного элемента

Пусть нам доступны временные ряды $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$ длиной N всех D элементов системы (2.1), измеренные с шагом выборки Δt . Обозначим $x_i(t_n) = x_i(n)$ и $x_i(t_n - \tau_{i,j}) =$

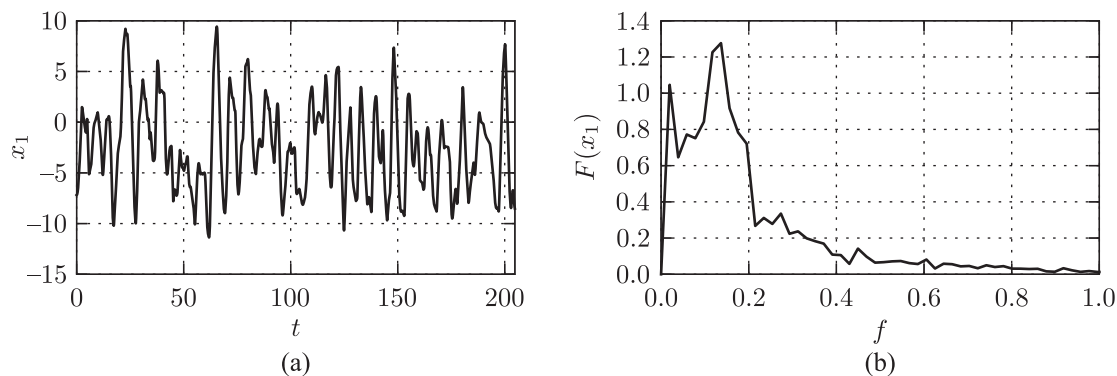


Рис. 1. Временной ряд (а) и спектр (б) колебаний первого элемента системы (2.1) при $D = 16$, $\tau \in [2.5, 3.5]$.

$= x_i(n - \theta_{i,j})$, где $\theta_{i,j} = \tau_{i,j}/\Delta t$ — дискретное время запаздывания в шагах выборки. Временные ряды производных $\dot{x}_i(t)$ рассчитаем численно, обозначив $\dot{x}_i(t_n) = \dot{x}_i(n)$.

Тогда можно для каждого момента времени n выписать, опираясь на (2.1), следующее соотношение:

$$x_i(n) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} h(x_j(n - \theta_{i,j})) - \dot{x}_i(n). \quad (2.2)$$

Отсортируем все значения $x_i(n)$ по возрастанию, сопоставив исходному номеру n значения $x_i(n)$ во временном ряде $\{x_i(n)\}_{n=1}^N$ номер $Q_i(n)$ в отсортированном ряде, где $Q_i(n)$ — отображение, преобразующее исходный ряд в отсортированный. Далее для краткости зависимость Q от i писать не будем. Обратное отображение, сопоставляющее номеру точки $Q_i(n)$ в отсортированном ряде её номер n в исходном, обозначим как Q^{-1} .

Рассмотрим два соседних значения в отсортированном ряде: текущее с номером n и предыдущее с номером $p_n = Q^{-1}(Q(n) - 1)$. Обозначим разность значений измеряемой величины x в этих точках как $\delta_i(n)$:

$$\delta_i(n) = x_i(n) - x_i(p_n). \quad (2.3)$$

Рассмотрим также значения $x_j(n - \theta_{i,j})$, входящие в уравнении (2.1) в сумму для внешнего воздействия в n -й момент времени, и $x_j(r_{j,n})$, где $r_{j,n} = Q^{-1}(Q(n - \theta_{i,j}) - 1)$, входящие в том же уравнении (2.1) в сумму для внешнего воздействия в p_n -ный момент времени. Используя (2.2) и эти новые обозначения, уравнение (2.3) может быть переписано в виде

$$\delta_i(n) = \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n), \quad (2.4)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \quad (2.5)$$

$$\Delta h_{i,j}(n) = h(x_i(n - \theta_{i,j})) - h(x_i(r_{i,n})). \quad (2.6)$$

Рассмотрим сумму квадратов $\delta_i(n)$:

$$S_i^2(\mathbf{k}_i) = \sum_{n=\theta_i+1}^N \delta_i(n)^2 = \sum_{n=\theta_i+1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \Delta h_{i,j}(n) - \Delta \dot{x}_i(n) \right)^2, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{k}_i = (k_{i,0}, \dots, k_{i,D})$.



Любые реальные колебания, даже хаотические, имеют, как правило, конечный диапазон. Будем считать, что значения $x_i(n)$ ограничены сверху величиной $\sup(x_i)$ и снизу величиной $\inf(x_i)$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ значения $x_i(n)$ будут всё плотнее заполнять диапазон $[\inf(x_i); \sup(x_i)]$. Следовательно, $\delta_i(n) \sim \frac{1}{N}$ и $S_i^2 \sim N \cdot \frac{1}{N^2}$, то есть при $N \rightarrow \infty$ имеем $S_i^2 \rightarrow 0$.

При этом важно отметить, что близость значений в отсортированном по возрастанию ряде x_i не ведёт к близости соответствующих им значений \dot{x}_i , то есть при $N \rightarrow \infty$ формула (2.5) не обращается в нуль. Также отметим, что оба рассмотренных нами преобразования (Q и обратное к нему Q^{-1}) являются перемешивающими, поэтому значения $x_i(n - \theta_i)$ и $x_i(r_{j,n})$ не являются близкими в силу сдвига индекса на 1 в аргументе преобразования Q^{-1} при определении $r_{j,n}$. Таким образом, (2.6) также не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Резюмируя, в пределе $N \rightarrow \infty$ формулу (2.7) можно рассматривать как целевую функцию для отыскания значений \mathbf{k}_i , причём истинным $k_{i,j}$ будет соответствовать нуль (абсолютный минимум, так как по определению $S_i^2 \geq 0$) функции (2.7). Поскольку величина S_i зависит от всех $k_{i,j}$ квадратично, она имеет единственный минимум, который можно отыскать линейным методом наименьших квадратов, где величины (2.6) можно рассматривать как значения базисных функций, а величины (2.5) — как значения аппроксимируемой величины. В пренебрежении ошибками при численном нахождении производных $\dot{x}_i(n)$ и в пределе $N \rightarrow \infty$ предложенный подход даст точные оценки $k_{i,j}$, то есть является асимптотически несмещённым. С физической точки зрения асимптотическое поведение $S_i^2(\mathbf{k}_i) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow 0$ означает непрерывность экспериментальных сигналов — невозможность мгновенного изменения измеряемой физической величины.

2.3. Восстановление времён запаздывания

Изложенный выше подход позволяет восстановить коэффициенты связи \mathbf{k}_i при известном векторе задержек $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,D})$ для отдельного i -го осциллятора. Однако на практике значения задержек неизвестны. В [19] для восстановления собственных времён запаздывания осцилляторов используется простой перебор, поскольку для каждого i -го осциллятора необходимо восстановить только одно время запаздывания вне зависимости от размера ансамбля D . Но для реконструкции системы типа (2.1) такой подход не годится, поскольку перебор придётся осуществлять в пространстве очень большой размерности $(D - 1)$, что ведёт к неограниченному росту вычислительных затрат. Вместо этого мы предлагаем использовать модификацию метода градиентного спуска с дискретным шагом, поскольку все значения $\theta_{i,j}$ целые.

Для i -го осциллятора зададим некоторые пробные времена запаздывания $\tilde{\theta}_i$, всего $(D - 1)$ штук. Далее проведём реконструкцию коэффициентов связи при $\tilde{\theta}_i$ предложенным выше методом, соответствующее значение целевой функции (2.7) обозначим $S_{i,0}^2$. Далее введём возмущение стартовых догадок $\tilde{\theta}_i$, добавив 1 к каждому $\tilde{\theta}_{i,j}$ по очереди и проведя реконструкцию коэффициентов, а затем оценив целевую функцию (2.7) в каждом случае, которые обозначим как $S_{i,j+}^2$. Далее сделаем то же, вычтя 1 из каждого $\tilde{\theta}_{i,j}$ по очереди, соответствующие значения целевой функции обозначим как $S_{i,j-}^2$; всего получится $2(D - 1)$ значений функции (2.7) при смещённых догадках. Найдём минимальное среди всех $S_{i,j+}^2$ и $S_{i,j-}^2$. Если оно меньше значения $S_{i,0}^2$, следует сместиться на +1 или -1 по соответствующему $\theta_{i,j}$, то есть заменить стартовую догадку на исправленное значение, соответствующее минимальному значению (2.7) по всем рассмотренным смещённым догадкам.

Описанную процедуру следует повторять до тех пор, пока не окажется, что все смещённые догадки дают значение (2.7) большее, чем текущая догадка. В результате будет найден некоторый локальный минимум функции (2.7), который при удачном стечении обстоятельств совпадёт с глобальным. Чтобы повысить вероятность попадания в глобальный минимум, весь алгоритм следует повторить для различных стартовых догадок.

3. Результаты численного эксперимента

В численном эксперименте рассматривались ансамбли из $D = 16$ элементов вида (2.1). Времена запаздывания $\tau_{i,j}$ выбирались случайно равномерно распределёнными в диапазоне $[2.5, 3.5]$. Уравнения (2.1) решались методом Эйлера с шагом интегрирования 10^{-3} на временном интервале 2638.4 единиц безразмерного времени, из которых первые 1000 единиц отбрасывались как переходной процесс. Полученные временные ряды далее перевыбирались с шагом $\Delta t = 0.05$, в результате получались временные ряды длиной в $N = 2^{15}$ значений (фрагмент длиной в 4096 значений представлен на рисунке 1а).

3.1. Восстановление времён запаздывания

Всего было рассмотрено 40 ансамблей со случайными матрицами связи и временами запаздывания. Из них 20 демонстрируют хаотическое поведение, 18 — периодическое, 2 — состояние равновесия в виде устойчивой неподвижной точки. Для всех ансамблей использовались одинаковые стартовые догадки для времён запаздывания τ_i , идентичные для всех осцилляторов и равные 3 (середина диапазона). На рисунке 2 показана сходимость (зависимость целевой функции (2.7) от номера шага) предложенного метода для первого ансамбля с хаотической динамикой. Различия в стартовом и итоговом значении целевой функции определяются индивидуальными особенностями динамики отдельных осцилляторов и зависят от амплитуды колебаний, конкретных значений силы связи, начальных условий. Число шагов зависит от того, как далеко оказались стартовые догадки для времён запаздывания от итоговых значений. В результате реконструкции из 250 времён запаздывания для первого ансамбля верно оказались восстановлены 247; в трёх значениях были допущены ошибки (обозначим их как $\Delta\tau'/\Delta t$) на 1 (осциллятор № 9 на рис. 2), на 3 (осциллятор № 6 на рис. 2) и на 4 (осциллятор № 10 на рис. 2) единицы времени выборки.

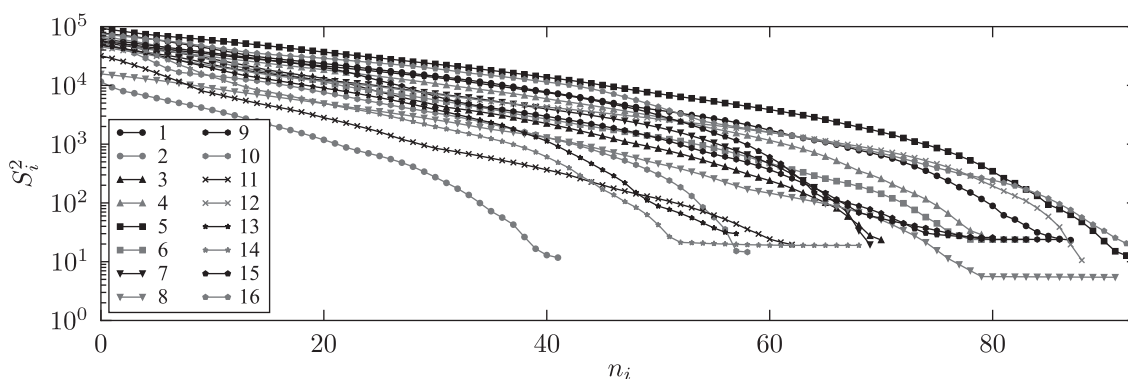


Рис. 2. Зависимость целевой функции (2.7) от номера шага при реконструкции времён запаздывания для всех 16 осцилляторов ансамбля.

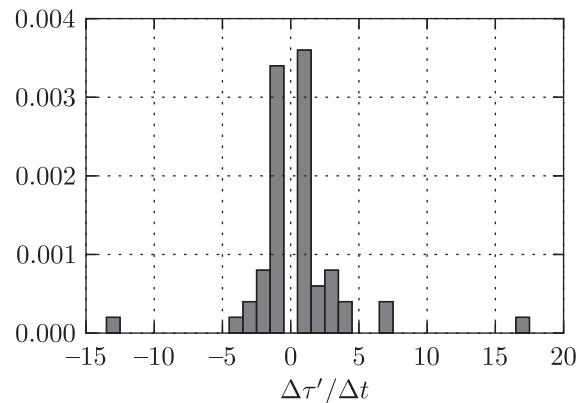


Рис. 3. Гистограмма плотности распределения ошибок оценок времён запаздывания. Столбец, соответствующий точной оценке (ошибка равна 0), вырезан, поскольку его высота слишком велика для наглядного представления других столбцов.

Общие результаты по 20 ансамблям при длине ряда в 2^{12} точек приведены на рисунке 3 в виде гистограммы. Всего из 5000 времён запаздывания неверно были оценены 55 (1.1%), в том числе с ошибкой в ± 1 время дискретизации (то есть $|\Delta\tau'/\Delta t| = 1$) — 35 (0.7%). Для трёх ансамблей все времена запаздывания были восстановлены точно.

3.2. Асимптотическая точность метода

При описании метода было показано, что он должен давать асимптотически точные оценки при $N \rightarrow \infty$. Чтобы подтвердить это в численном эксперименте, следует рассмотреть все существующие источники ошибок. Их четыре:

- 1) ошибки, связанные с недостаточно точным представлением экспериментальных данных (квантование, шумы измерения и проч.),
- 2) ошибки, возникающие при численном расчёте производной,
- 3) ошибки, обусловленные конечностью точности расчётов,
- 4) ошибки, вызванные неточностью метода при конечном N .

Чтобы показать, что метод действительно является асимптотически точным, необходимо понять, как ведут себя все типы ошибок при $N \rightarrow \infty$. В натурном эксперименте при наличии шумов измерений основной вклад дают ошибки первых двух типов, их вклад в целевую функцию (2.7) пропорционален N . В численном моделировании ошибкой первого типа можно пренебречь, если числа записаны с максимальной (родной) точностью, так как она заведомо не превышает погрешностей, возникающих при расчётах (тип 3).

Ошибкой второго типа можно пренебречь при стремлении шага выборки к нулю $\Delta t \rightarrow 0$. Однако на практике даже в численном эксперименте это невозможно, поэтому при исследовании асимптотических свойств метода мы дополнительно записали временные ряды производных для всех элементов ансамбля и использовали их вместо рядов производных, оцененных численно. Влияние, которое численная оценка производной оказывает на точность восстановления коэффициентов, очень невелико, но становится заметно при $N > 2^{13}$.

Ошибки, обусловленные конечностью точности расчётов, можно оценить теоретически, но это довольно сложно, так как используемые алгоритмы, реализованные в популярных библиотеках вроде `Lapack` или `numpy`, имеют множество оптимизаций по точности. В любом

случае, из-за матричных операций они имеют порядок не менее $N^{3/2}$. Оценить эти ошибки можно, если использовать различную точность расчётов. К сожалению, в настоящее время все основные библиотеки методов ограничиваются одинарной (32 бита) и двойной (64 бита) точностями при операциях с плавающей запятой. Численный эксперимент показал, что при одинарной точности даже при $N = 2^{10}$ ошибка точности расчётов вносит заметный вклад. В то же время при использовании двойной точности надёжно выявить её наличие при длинах ряда до $N = 2^{15}$ включительно не удалось.

Чтобы показать асимптотическую сходимость метода, была проведена реконструкция 20 ансамблей из 16 осцилляторов по хаотическим временным рядам различной длины: от $N = 2^{10}$ (данная длина как минимальная была обозначена N_0) до $N = 2^{15}$. Поскольку из-за различий во временах запаздывания и коэффициентах связи итоговые значения целевой функции $S_{i,l}^2$ (i соответствует номеру осциллятора, l — номеру ансамбля) сильно варьировали, они были отнормированы на значение, соответствующее минимальной рассмотренной длине ряда $S_{i,l}^2(N_0)$, а затем усреднены по всем осцилляторам во всех ансамблях (см. рис. 4).

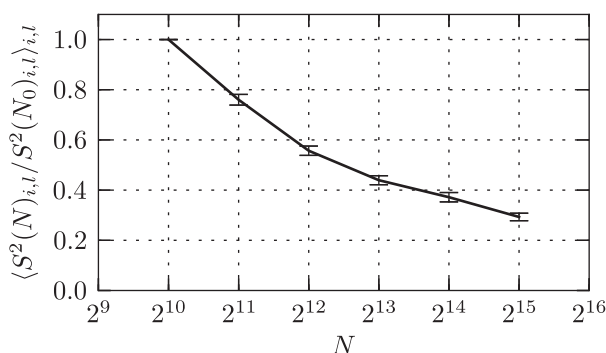


Рис. 4. Усреднённая по всем 16 осцилляторам и по всем 20 ансамблям нормированная зависимость значения целевой функции (2.7) и его стандартного отклонения от длины временного ряда N .

Видно, что значение целевой функции уменьшается с ростом длины ряда N , что подтверждает гипотезу об асимптотической сходимости метода, при этом ошибки оценки среднего невелики и интервалы даже между соседними значениями N не пересекаются. Следует отметить, что при выбранном способе нормировки для $N = N_0$ разброс будет нулевым по определению, но падение, которое должно быть линейным по нашей гипотезе, не является таковым и замедляется при больших N , что может быть обусловлено конечностью точности расчётов.

4. Заключение и обсуждение

Предложен метод восстановления архитектуры связей в ансамблях нейроподобных колебательных систем, описанных в работах [5, 6] при наличии запаздывания в связях по их хаотическим временным рядам. Показано, что метод даёт возможность восстановить как все коэффициенты связи, так и времена запаздывания в связях. Метод основан на той же идее, что и подход, предложенный в [19]: при известных временах запаздывания члены модели, ответственные за связь, рассматриваются как базисные функции и сами коэффициенты связи восстанавливаются как коэффициенты при них методом наименьших квадратов.

Для восстановления времён запаздывания использована модификация метода градиентного спуска, адаптированная к дискретному случаю. Это необходимо, поскольку одновременно для каждого из D осцилляторов восстанавливаются $D - 1$ времён запаздывания, следовательно, простой перебор, использованный в [19], уже неприменим.

Принципиально важным для работоспособности метода является наличие запаздывания, как и в [19], поскольку за счёт этого отдельные компоненты целевой функции (2.7) оказываются независимы. Это позволяет, в частности, проводить реконструкцию даже при очень малом объёме экспериментальных данных: например, восстановить ансамбль из 16 осцилляторов с 240 неизвестными коэффициентами связи и 240 неизвестными временами запаздывания по векторному ряду длиной в 512 значений. Подход к реконструкции сходной по структуре сети, но без учёта запаздывания и при ином способе введения связи, был предложен в [20]. Отсутствие запаздывания приводит автора [20] к необходимости решать однородную систему линейных уравнений, переходя к поиску сингулярных чисел матрицы.

Предложенный подход может быть расширен на случай систем более высокого порядка, а также систем, имеющих нелинейную функцию не только в связи, но в собственной динамике. Предложенный подход имеет два принципиальных ограничения. Во-первых, класс и порядок уравнений, описывающих каждый отдельный осциллятор, а также способ введения связи должны быть известны из первых принципов. Во-вторых, должны быть доступны для измерения временные ряды всех элементов ансамбля.

Список литературы

- [1] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [2] Pastor I., Pérez-García V. M., Encinas F., Guerra J. M. Ordered and chaotic behavior of two coupled van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, no. 1, pp. 171–182.
- [3] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. Москва: Техносфера, 2003. 494 с.
- [4] Анищенко В. В., Астахов Т. Е., Вадивасова Т. Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Москва: Интеллект, 2009. 336 с.
- [5] Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.-J. Chaos in random neural networks // *Phys. Rev. Lett.*, 1988, vol. 61, no. 3, pp. 259–262.
- [6] Kadmon J., Sompolinsky H. Transition to chaos in random neuronal networks // *Phys. Rev. X*, 2015, vol. 5, no. 4, 041030, 28 pp.
- [7] Jalnina A. Yu. Hyperbolic and non-hyperbolic chaos in a pair of coupled alternately excited FitzHugh–Nagumo systems // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, vol. 23, nos. 1–3, pp. 202–208.
- [8] Hoff A., dos Santos J. V., Manchein C., Albuquerque H. A. Numerical bifurcation analysis of two coupled FitzHugh–Nagumo oscillators // *Eur. Phys. J. B*, 2014, vol. 87, no. 7, Art. 151, 9 pp.
- [9] Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.
- [10] Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 93, no. 17, 174102, 4 pp.
- [11] Gouesbet G. Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series // *Phys. Rev. A* (3), 1991, vol. 43, no. 10, pp. 5321–5331.
- [12] Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E* (3), 2001, vol. 63, no. 1, part 2, 016207, 7 pp.
- [13] Безручко Б. П., Смирнов Д. А., Сысоев И. В., Селезнев Е. П. Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия // *Письма в ЖТФ*, 2003, т. 29, № 19, с. 69–76.

- [14] Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Восстановление уравнений системы с задержкой по экспериментальному временному ряду // Изв. вузов. ПНД, 2002, т. 10, № 1–2, с. 52–64.
- [15] Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Реконструкция уравнений систем с двумя временами запаздывания по временным рядам // Письма в ЖТФ, 2004, т. 30, № 22, с. 23–30.
- [16] Baake E., Baake M., Bock H. G., Briggs K. M. Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys. Rev. A, 1992, vol. 45, no. 8, pp. 5524–5529.
- [17] Прохоров М. Д., Пономаренко В. И. Восстановление модельных уравнений цепочек связанных систем с запаздыванием по временным рядам // Письма в ЖТФ, 2008, т. 34, № 8, с. 29–35.
- [18] Безручко Б. П., Диканев Т. В., Смирнов Д. А. Глобальная реконструкция уравнений динамической системы по временной реализации переходного процесса // Изв. вузов. ПНД, 2001, т. 9, № 3, с. 3–12.
- [19] Сысоев И. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Идентификация структуры взаимодействий и собственных параметров элементов в сетях, состоящих из систем с задержкой // Письма в ЖТФ, 2016, т. 42, № 1, с. 95–102.
- [20] Pikovsky A. Reconstruction of a neural network from a time series of firing rates // Phys. Rev. E, 2016, vol. 93, no. 6, 062313, 4 pp.

Reconstruction of the coupling matrix in the ensemble of identical neuron-like oscillators with time delay in coupling

Ilya V. Sysoev¹, Vladimir I. Ponomarenko²

^{1,2}National Research Saratov State University
ul. Astrakhanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

²Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch
ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019, Russia

¹ivssci@gmail.com, ²ponomarenkovi@gmail.com

Reconstruction of equations of oscillatory systems from time series is an important problem, since results can be useful in different practical applications, including forecast of future dynamics, indirect measurement of parameters and diagnostics of coupling. The problem of reconstruction of coupling coefficients from time series of ensembles of a large number of oscillators is a practically valid problem. This study aims to develop a method of reconstruction of equations of an ensemble of identical neuron-like oscillators in the presence of time delays in couplings based on a given general form of equations.

The proposed method is based on the previously developed approach for reconstruction of diffusively coupled ensembles of time-delayed oscillators. To determine coupling coefficients, the target function is minimized with least-squares routine for each oscillator independently. This function characterizes the continuity of experimental data. Time delays are revealed using a special version of the gradient descent method adapted to the discrete case.

It is shown in the numerical experiment that the proposed method allows one to accurately estimate most of time delays (~99%) even if short time series are used. The method is asymptotically unbiased.

MSC 2010: 37M10

Keywords: time series, ensembles of oscillators, time delay in coupling, reconstruction of equations

Received September 21, 2016, accepted October 14, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 567–576 (Russian)

