

01;11

## Влияние нелинейной амплитудной динамики на оценку времени запаздывания связи между осцилляторами

© Е.В. Сидак<sup>1,2,3</sup>, Д.А. Смирнов<sup>1,2</sup>, Г.В. Осипов<sup>3</sup>,  
Б.П. Безручко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

<sup>3</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород

E-mail: sidakev@gmail.com

Поступило в Редакцию 22 октября 2015 г.

Известный метод интервального оценивания времени запаздывания связи между осцилляторами по временным рядам основан на построении эмпирической модели фазовой динамики в виде системы фазовых осцилляторов первого порядка. При этом предполагается, что амплитудными флуктуациями можно пренебречь. В данной работе исследуется применимость метода при значительных амплитудных флуктуациях, вызванных внешними шумами или хаотической динамикой осцилляторов. На эталонных системах с различными видами связей показано, что в ряде ситуаций исследуемый метод дает ошибочные оценки; предложен способ диагностики таких ситуаций и обоснована модификация метода, устраняющая эти ошибки.

Определение времени запаздывания связи между колебательными системами по временным рядам востребовано в различных областях исследований, от радиофизики [1–4] до медицинской техники [5,6]. В работах [2–4] был предложен метод оценивания времени запаздывания, основанный на предположении, что фазовая динамика исследуемых систем подчиняется уравнениям фазовых осцилляторов первого порядка

$$d\phi_i(t)/dt = \omega_i + f_i(\phi_i(t), \phi_j(t - \Delta_i)) + \xi_i(t); \quad i, j = 1, 2, i \neq j, \quad (1)$$

где  $\phi_i$  — мгновенная фаза  $i$ -го осциллятора;  $\omega_i$  — параметр, определяющий его угловую частоту;  $f_i$  — функция, определяющая его собствен-

ную фазовую нелинейность, а также связь (воздействие) в направлении  $j \rightarrow i$  с запаздыванием  $\Delta_i$ ;  $\xi_i$  — внешние шумы (стационарные случайные процессы, характеристики которых не зависят от значений  $\phi_i$ ). Оценку величины  $\Delta_i$  получают путем подгонки к наблюдаемым данным соответствующей разностной модели фазовой динамики (см. ниже), где остаточные ошибки отражают, как предполагается, действие внешних шумов. В работах [3,4] получены формулы для интервальной оценки запаздывания в случае белых и цветных шумов.

Ограничение метода состоит в том, что фазовое приближение (1) строго применимо лишь для систем, динамика которых происходит вблизи предельного цикла, так что амплитудными флуктуациями можно пренебречь [1,7]. Для маломерных нелинейных автоколебательных систем в хаотических или сильно возмущенных периодических режимах эти условия могут нарушаться из-за того, что на фазы существенно влияют амплитудные флуктуации, которые в свою очередь зависят от фаз. Остаточные ошибки модели фазовой динамики вызываются тогда не только внешними шумами, но и амплитудами. Эти ошибки можно назвать „эффективным“ фазовым шумом, статистические свойства которого могут быть весьма нетривиальными [1,8]. Ниже исследуется применимость метода в таких условиях, предлагается способ диагностики проблематических ситуаций и устранения ошибок при интервальном оценивании.

По наблюдаемым временным рядам  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  одним из известных методов [9] рассчитываются временные ряды фаз колебаний  $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$  и  $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$ , где  $t_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  — интервал выборки,  $N$  — длина ряда. Ограничиваясь фазовым описанием [1,7,10], для оценки воздействия первого осциллятора на второй строят модель в виде разностного стохастического уравнения (для оценки „в обратную сторону“ все аналогично)

$$\phi_2(t + \tau) - \phi_2(t) = F_2(\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta)) + \varepsilon_2(t), \quad (2)$$

где приращения фазы берутся на интервале фиксированной длины  $\tau$  (параметр метода),  $\varepsilon_2$  — эффективный фазовый шум на интервале  $\tau$ ,  $\Delta$  — пробное время запаздывания,  $F_2$  — тригонометрический многочлен, коэффициенты которого определяются минимизацией  $S_2(\Delta) = \langle \hat{\varepsilon}_2^2(t_i) \rangle$ , где  $\hat{\varepsilon}_2(t_i) = \phi_2(t_i + \tau) - \phi_2(t_i) - F_2(\phi_2(t_i), \phi_1(t_i - \Delta))$ , угловые скобки означают усреднение по  $t_i$ .  $S_2(\Delta)$  минимизируется по  $\Delta$ , что дает точечную оценку времени запаздывания связи  $\hat{\Delta} = \Delta_{\min} + \tau/2$ ,

где  $\Delta_{\min} = \arg \min_{\Delta} S_2(\Delta)$ . Дисперсия  $\hat{\Delta}$  оценивается как

$$\hat{\sigma}_{\Delta}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2}{N'} \left( \frac{d^2 S_2(\Delta)}{d\Delta^2} \Big|_{\Delta=\Delta_{\min}} \right)^{-1},$$

где  $\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2 = \min_{\Delta} S_2(\Delta)$ ,  $N' = N\Delta t/L$ ,  $L = \max[T, \tau]$ ,  $T$  — время спада автокорреляционной функции (АКФ)  $\varepsilon_2$  до 0.2, вторую производную оценивают путем аппроксимации  $S_2(\Delta)$  квадратичной параболой в окрестности  $\Delta_{\min}$ . Интервальная оценка времени запаздывания (95%-ный интервал) имеет вид  $\hat{\Delta} \pm 2\hat{\tau}_{\Delta}$ .

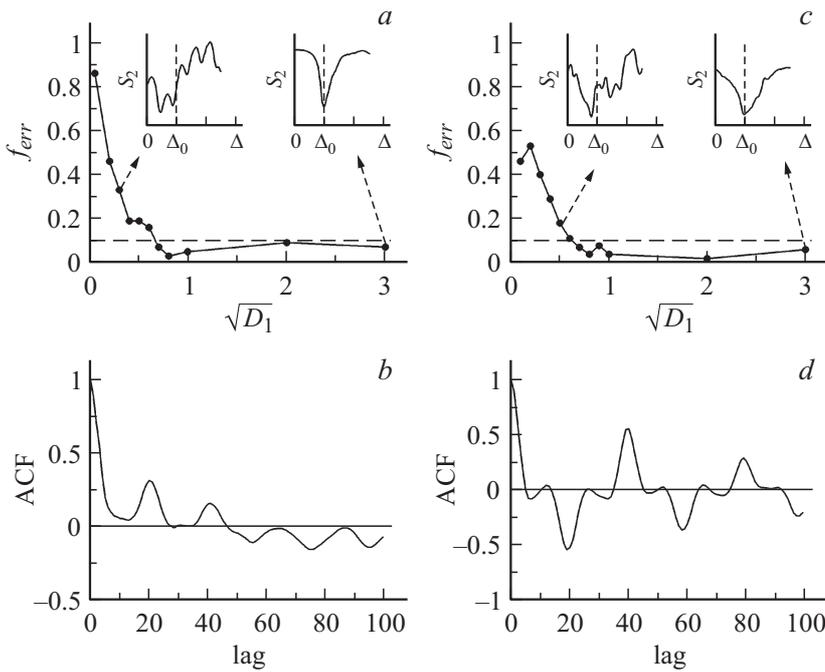
В целях исследования применимости метода для более широкого круга систем, чем фазовые осцилляторы с внешними шумами (1), рассмотрим связанные системы Ресслера, в которых свойства эффективных фазовых шумов в динамике фаз сигналов  $x_i(t)$  определяются внешними шумами  $\xi_i(t)$ , амплитудами  $\sqrt{x_i^2(t) + y_i^2(t)}$  и координатами  $z_i(t)$  [1,8]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\omega_1 y_1(t) - z_1(t) + \xi_1, \\ \dot{y}_1(t) = \omega_1 x_1(t) + a y_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = b - z_1(t)(r - x_1(t)); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = -\omega_2 y_2(t) - z_2(t) + \gamma_x(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)) + \xi_2, \\ \dot{y}_2(t) = \omega_2 x_2(t) + a y_2(t) + \gamma_y(x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)), \\ \dot{z}_2(t) = b - z_2(t)(r - x_2(t)). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\xi_{1,2}$  — белые шумы с автоковариационными функциями  $\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle = D_k \delta(t - t')$ ,  $\gamma_x \gamma_y$  — коэффициенты связи. Рассматривались два вида связи: только в уравнении для  $x$  ( $\gamma_x = 0.05$ ,  $\gamma_y = 0$ ) или только для  $y$  ( $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = 0.05$ ). Время запаздывания принималось равным  $\Delta_0 = 12$ , угловые частоты  $\omega_1 = 1.015$ ,  $\omega_2 = 0.985$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ , параметр  $r$  менялся в широком диапазоне, обеспечивая различные динамические режимы [11], от цикла периода один через каскад бифуркаций удвоения периода до хаоса.

Для получения временных рядов уравнения (3) интегрировались методом Эйлера с шагом 0.001. Анализировались сигналы  $x_{1,2}$  с интервалом выборки  $\Delta t = 0.3$  (20 точек на периоде), фазы рассчитывались с помощью преобразования Гильберта (см., например, [1,9]). При



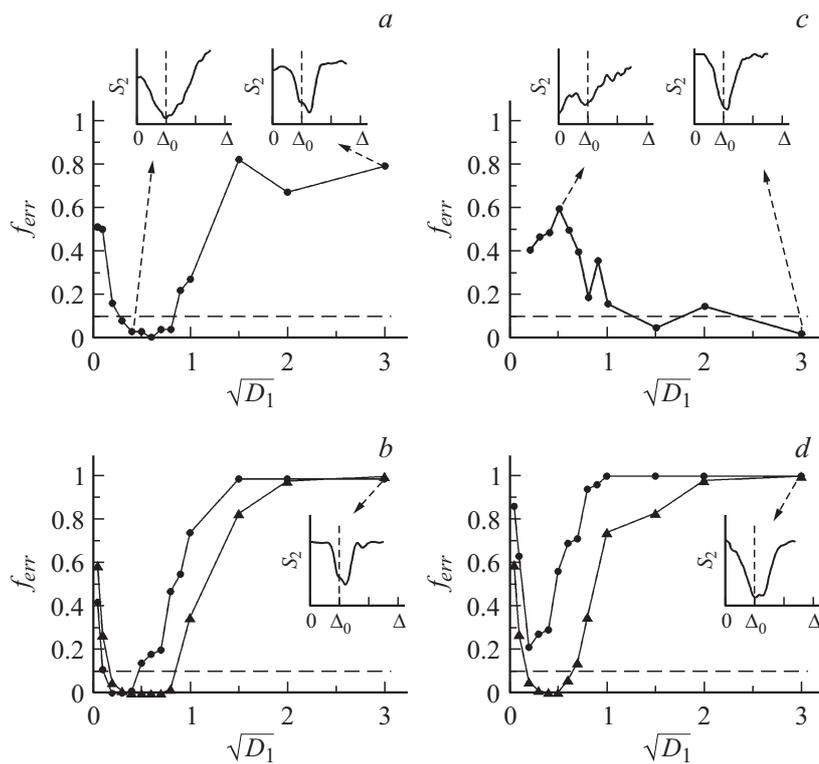
**Рис. 1.** Частота ложных выводов о величине запаздывания в системе (3) (a, c) и автокорреляционные функции шума  $\varepsilon_2$  при  $\sqrt{D_1} = 0.3$  (b) и  $\sqrt{D_1} = 0.5$  (d). Параметры  $\sqrt{D_2} = 0.089$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ ,  $\gamma_x = 0.05$ ,  $\gamma_y = 0$ ,  $N = 2000$ . Панели a и b соответствуют  $r = 4$  (периодический режим), панели c и d —  $r = 10$  (хаотический режим). На вставках — графики  $S_2(\Delta)$  для отдельных временных рядов.

каждом наборе значений параметров генерировалось 100 пар временных рядов и подсчитывалась частота  $f_{err}$  ложных выводов о величине запаздывания, т.е. таких ситуаций, когда  $\Delta_0$  не принадлежит интервалу  $\hat{\Delta} \pm 2\hat{\tau}_\Delta$ . Оценка применима, если вероятность ложных выводов не больше 0.05, так как доверительный интервал 95%-ный. При учете статистических флуктуаций частоты  $f_{err}$ , распределенной по закону Бернулли, допустимое значение  $f_{err}$  для указанного размера ансамбля равно 0.1 [3,4].

На рис. 1 приведены результаты оценки времени запаздывания связи в системе (3) при  $\gamma_x = 0.05$ ,  $\gamma_y = 0$  для периодического ( $r = 4$ ) и хаотического ( $r = 10$ ) режимов по временным рядам длиной 2000 точек (100 характерных периодов). АКФ остаточных ошибок  $\varepsilon_2$  при малом уровне шума в периодическом режиме немонотонно и долго спадает до 0.2 (рис. 1, *b*), а в хаотическом режиме имеет еще более сложную форму (рис. 1, *d*). На рис. 1 можно выделить „благополучные“ случаи, где исследуемый метод обеспечивает вероятность ошибочных выводов не более 0.1: это возмущенный периодический режим при  $\sqrt{D_1} > 0.7$  (рис. 1, *a*) и возмущенный хаотический режим при  $\sqrt{D_1} > 0.6$  (рис. 1, *c*). При меньших уровнях шума  $f_{err}$  превышает 0.1. Диагностировать эту ситуацию можно по графику  $S_2(\Delta)$ , который не демонстрирует одного четко выраженного минимума (левая вставка, рис. 1, *a, c*) в отличие от „благополучной“ ситуации на правой вставке.

При  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = 0.05$  результаты отличаются в сторону еще большего числа проблематических ситуаций (рис. 2, *a, c*), а именно,  $f_{err}$  превышает допустимый уровень 0.1 даже при значительных уровнях шума в ведущей системе  $\sqrt{D_1}$ . Это вызвано тем, что смещение  $\Delta_{min}$  относительно  $\Delta_0$  оказывается не равно величине  $-\tau/2$ , полученной для системы (1). Большая вероятность ошибочных выводов наблюдается и при увеличении длины ряда (рис. 2, *b, d*) как в случае периодического, так и хаотического режимов для обоих вариантов введения связи. Это также вызвано тем, что смещение  $\Delta_{min}$  относительно  $\Delta_0$  не равно  $-\tau/2$ , а ширина доверительного интервала становится малой.

В проблематических случаях график  $S_2(\Delta)$  не близок к параболе (вставки на рис. 1 и 2). Мы предлагаем рассматривать несимметричность графика относительно точки минимума, наличие точек перегиба или глубоких локальных минимумов как свидетельства того, что метод может дать ошибочные оценки. Во всех рассмотренных проблематических ситуациях такой критерий позволяет диагностировать ошибки. Для получения более надежных оценок запаздывания тогда представляется обоснованным отказ от локальной аппроксимации  $S_2(\Delta)$  параболой и грубая оценка ширины глобального минимума. Используя в качестве интервальной оценки ширину минимума на уровне середины между минимальным и максимальным значениями  $S_2(\Delta)$ , получили вероятность ошибочных оценок менее 0.05 во всех рассмотренных случаях за счет умеренного уширения доверительного интервала (графики не показаны).



**Рис. 2.** Частота ложных выводов о величине запаздывания в системе (3) при  $\gamma_x = 0.05$ ,  $\gamma_y = 0$  (треугольники) и  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = 0.05$  (кружки) для  $N = 2000$  (a, c) и  $N = 20000$ . Параметры  $\sqrt{D_2} = 0.089$ ,  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$ . Панели a и b соответствуют  $r = 4$  (периодический режим), панели c и d —  $r = 10$  (хаотический режим). На вставках — графики  $S_2(\Delta)$  для отдельных временных рядов.

Таким образом, применимость интервальной оценки времени запаздывания связи между осцилляторами, основанной на моделировании фазовой динамики, может нарушаться при значительных амплитудных флуктуациях, вызванных внешними шумами или собственной хаотической динамикой осцилляторов. Диагностика проблематических ситуаций возможна по графику зависимости дисперсии остаточных

ошибок модели от пробного времени запаздывания: если график не близок к квадратичной параболе в окрестности глобального минимума или имеются глубокие локальные минимумы, то вероятны ошибочные оценки. Для расширения области применимости интервальной оценки возможна ее модификация, основанная на использовании „крупномасштабных“ свойств основного минимума дисперсии остаточных ошибок.

Е.В. Сидак поддержана МОН РФ и ННГУ (соглашение № 02.В.49.21.0003 от 27.08.2013) и РФФИ (грант 14-02-31129-мол-а); Г.В. Осипов поддержан РФФИ (грант 14-12-00811). Модифицированная оценка развита в рамках проекта РФФИ № 14-12-00291.

## Список литературы

- [1] *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [2] *Симпониу Л., Розенблюм М., Пиковский А.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046 213.
- [3] *Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 3. В. 1. С. 64-71.
- [4] *Сидак Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. В. 20. С. 104-110.
- [5] *Киселев А.Р., Хорев В.С., Гриднев В.И.* и др. // Физиология человека. 2012. Т. 38. № 3. С. 92-99.
- [6] *Tass P., Smirnov D., Karavaev A.* et al. // J. Neural Eng. 2010. V. 7. P. 016 009.
- [7] *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968. 660 с.
- [8] *Smirnov D., Sidak E., Bezruchko B.* // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2441-2451.
- [9] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. P. 2291-2305.
- [10] *Kuramoto Y.* // Chemical Oscillations. Waves and Turbulence. Berlin. Springer-Verlag, 1984.
- [11] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* // УФН. 2005. Т. 175. С. 163-179.