

01;11

Влияние интервала выборки на эффект ложной связи осцилляторов с различными параметрами собственных колебаний

© С.Н. Крылов^{1,2,3}, Д.А. Смирнов^{1,2}, Г.В. Осипов³,
Б.П. Безручко^{1,2}

¹ Саратовский филиал института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова, РАН

² Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

³ Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: krylov.sn@nxt.ru

Поступило в Редакцию 13 января 2015 г.

Для анализа связей между колебательными системами по временным рядам широко используется оценка „причинности по Грейнджеру“ — улучшение прогноза авторегрессионной модели. Известно, что в случае однонаправленно связанных систем возможны ошибочные выводы о наличии двунаправленной связи, если интервал выборки достаточно велик. Однако остается неясным, при каких условиях этот „эффект ложной связи“ значителен, так что нет и критериев необходимости его учета на практике. В данной работе такие условия исследованы и количественно сформулированы для эталонной системы связанных осцилляторов. В частности, показано, что при достаточно редкой выборке эффект пренебрежимо мал, если „быстрый“ осциллятор (с меньшим периодом колебаний и временем релаксации) влияет на „медленный“, и силен в противном случае. Если оба периода существенно больше интервала выборки, то эффект усиливается с ростом времени релаксации ведущего осциллятора и уменьшается с ростом времени релаксации ведомого.

Необходимость количественной оценки „направленных связей“ между колебательными системами по временным рядам — дискретным последовательностям значений наблюдаемых величин — возникает в различных областях физических исследований. При этом в ряде постановок важен вопрос о том, является ли связь одно- или двунаправленной. Для ответа часто используют метод „причинности

по Грейнджеру⁶, основанный на расчете улучшения прогноза (УП) совместной авторегрессионной модели по сравнению с индивидуальной авторегрессионной моделью, который предложен в эконометрике [1] и применяется все чаще в технике связи [2], геофизике [3], биофизике [4]. Однако при достаточно большом интервале выборки (дискретизации данных по времени) могут наблюдаться ненулевые УП в обе стороны и для однонаправленно связанных систем [5]. Недооценка этого может вести к ошибочным выводам о связях, что мы назовем „эффектом ложной связи“. Чтобы на практике судить о том, когда следует использовать дополнительные достаточно громоздкие и сложные тесты [6] во избежание эффекта ложной связи, а когда им можно пренебречь, в данной работе проводится исследование свойств колебательных систем, при которых эффект заведомо мал или велик.

Пусть от двух процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ наблюдаются временные ряды $\{x_{1,n}\}$ и $\{x_{2,n}\}$, где $x_{k,n} = x_k(n\Delta t)$, $k = 1, 2$, n — целое число, Δt — интервал выборки. При линейной оценке причинности по Грейнджеру сначала рассматривается индивидуальное авторегрессионное представление исследуемых процессов

$$x_k(t) = A_{k,0} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{k,i} x_k(t-i) + \xi_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где ξ_k — нормальный белый шум. Дисперсию ξ_k обозначим σ_k^2 , она равна среднему квадрату ошибки одношагового прогноза модели (1). Затем рассматривают совместную модель

$$x_k(t) = a_{k,0} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} x_k(t-i) + \sum_{i=1}^{\infty} b_{k,i} x_j(t-i) + \eta_k(t),$$

$$k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \quad (2)$$

где η_1, η_2 — двумерный нормальный белый шум. Дисперсию η_k обозначим $\sigma_{k|j}^2$. Нормированная величина УП $G_{j \rightarrow k} = (\sigma_k^2 - \sigma_{k|j}^2) / \sigma_k^2$ характеризует воздействие $j \rightarrow k$ и может принимать значения от 0 до 1. Представления (1) и (2) существуют и единственны для стационарных гауссовых процессов. На практике для оценки теоретических характеристик $G_{j \rightarrow k}$ используются модели (1) и (2) конечного порядка, а коэффициенты оцениваются методом наименьших квадратов [1,7]. Если

$G_{j \rightarrow k}$ положительна, то при прямолинейном подходе делают вывод о наличии воздействия $j \rightarrow k$.

Однако возможны ситуации, когда связь однонаправленная $j \rightarrow k$, а УП „в ложную сторону“ $G_{k \rightarrow j}$ положительно и достаточно велико [5,6]. Чем больше теоретическая характеристика $G_{k \rightarrow j}$, тем по более короткому временному ряду она будет признана значимо отличной от нуля (а именно, по ряду длиной порядка $4/G_{k \rightarrow j}$ значений, как следует из теста Фишера [8]), что приведет к ложному выводу о наличии воздействия $k \rightarrow j$. В данной работе условимся считать „сильным“ эффектом ложных связей такую ситуацию, когда УП „в ложную сторону“ превышает значение 0.05. Пренебрежимо малым будем считать этот эффект, если УП составляет менее 0.005.

Исследуем условия сильного и слабого эффекта ложных связей на эталонной системе стохастических линейных диссипативных осцилляторов, описываемых разностными уравнениями [9]

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1 x_1(t-1) + b_1 x_1(t-2) + \xi_1(t), \\ x_2(t) &= a_2 x_2(t-1) + b_2 x_2(t-2) + \xi_2(t) + c x_1(t-1), \end{aligned} \quad (3)$$

где t — дискретное время, c — коэффициент связи, $a_k = 2 \cos(2\pi/T_k) \times \exp(-1/\tau_k)$, $b_k = -\exp(-2/\tau_k)$, $k = 1, 2$, T_k — собственные периоды колебаний, τ_k — времена релаксации, ξ_k — гауссовы взаимно некоррелированные белые шумы с дисперсиями σ_k^2 . Наблюдаются x_1 и x_2 с интервалом выборки $\Delta t > 1$, т.е. прореженные временные ряды.

Эта простая и достаточно общая модель колебательных процессов позволяет провести точный расчет УП через матрицы ковариаций, которые определяются путем решения линейных разностных уравнений для моментов [10], вместо обычных оценок по длинным временным рядам. Ниже найдены значения „ложной связи“ $G_{2 \rightarrow 1}$ при различных значениях c , Δt , периодов колебаний и времен релаксации, что описывает широкий круг практических ситуаций. Полученные результаты в значительной степени можно перенести и на нелинейные осцилляторы, где идея причинности по Грейнджеру обобщается путем использования нелинейных моделей и где вполне аналогичен эффект ложной связи [11].

Для одинаковых отношений временных масштабов $\tau_1/\tau_2 = T_1/T_2$, т.е. одинаковой добротности колебаний, рассмотрим последовательно

характерные случаи идентичных осцилляторов ($T_1 = T_2$), более быстрого ведущего осциллятора ($T_1 < T_2$) и более медленного ведущего осциллятора ($T_1 > T_2$). Для первого случая зависимость $G_{2 \rightarrow 1}$ от $T_1/\Delta t$ представлена на рис. 1, *a* при различных Δt и временах релаксации, заметно превосходящих Δt . Результаты мало отличаются друг от друга при любых $\Delta t > 10$, что имеет место и для осцилляторов с другими параметрами. Поэтому далее все результаты представлены для $\Delta t = 11$, что соответствует типичным ситуациям, где система (3) представляет собой адекватную разностную схему при малом шаге по времени, а наблюдения проводятся с заметно большим интервалом Δt . Что касается величины c , то значения $G_{2 \rightarrow 1}$ малы только при очень малых значениях „эффективного“ параметра связи $c_{eff} = c\sigma_1/\sigma_2$ (рис. 1, *b*, толстая линия) и с его ростом быстро увеличиваются и выходят на насыщение при $c_{eff} = 0.25$ (рис. 1, *b*), несмотря на то что максимальное значение взаимной корреляционной функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ еще не очень велико (при $c_{eff} = 0.25$ оно принимает значения от 0.02 до 0.41, в зависимости от $T_1/\Delta t$). Далее принято $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ и $c = 0.5$, что дает наиболее полную иллюстрацию различных характерных случаев в отношении силы эффекта ложной связи.

Рис. 1 показывает, что значение $G_{2 \rightarrow 1}$ может быть велико: оно достигает почти 0.1 при $T_1/\Delta t \approx 1.7$ и превышает 0.05 при $1.05 \leq T_1/\Delta t \leq 1.15$, $1.6 \leq T_1/\Delta t \leq 1.9$ и $2.1 \leq T_1/\Delta t \leq 2.6$. При очень редкой выборке $T_1/\Delta t < 1$ проявляются множественные локальные максимумы с большими значениями $G_{2 \rightarrow 1}$, этот специфический случай не представлен на отдельных иллюстрациях. Рис. 2 показывает, что по сравнению со случаем идентичных параметров эффект ложной связи становится более типичным и сильным, когда „медленный“ осциллятор влияет на „быстрый“ (рис. 2, *a*, сплошная толстая линия — $T_2/T_1 = \tau_2/\tau_1 = 8$). В противоположном случае эффект ложной связи слаб и им можно пренебречь (рис. 2, *b*, сплошная толстая линия — $T_2/T_1 = \tau_2/\tau_1 = 0.1$). Эти выводы относятся к наиболее интересному для нас случаю, когда интервал выборки не намного меньше хотя бы одного из собственных периодов.

При различных добротностях осцилляторов (т.е. $\tau_1/\tau_2 \neq T_1/T_2$) следует различать зависимости УП от времен релаксации и периодов. Так, при уменьшении времени релаксации τ_2 на рис. 2, *a* (пунктирная и сплошная тонкая линии) возрастает $G_{2 \rightarrow 1}$, нарушая не только условие $G_{2 \rightarrow 1} < 0.005$, но и $G_{2 \rightarrow 1} < 0.05$. Аналогично при увеличении τ_2 на

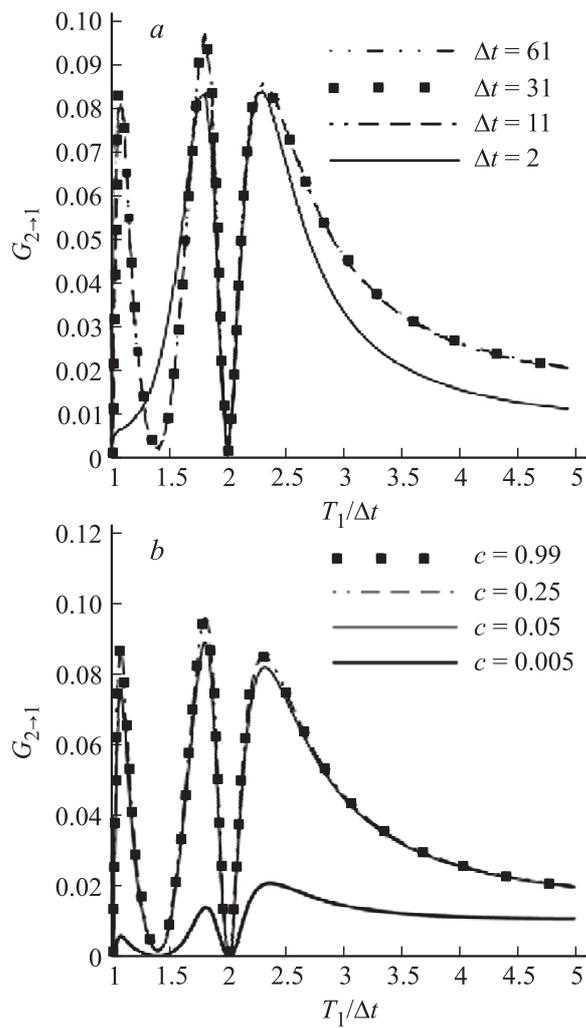


Рис. 1. Значения УП „в ложную сторону“ для системы (3) с $\tau_1 = \tau_2 = 8\Delta t$, $T_1 = T_2$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$: *a* — зависимости $G_{2 \rightarrow 1}(T_1/\Delta t)$ при $c = 0.5$ и различных Δt ; *b* — зависимости $G_{2 \rightarrow 1}(T_1/\Delta t)$ при $\Delta t = 11$ и различных c .

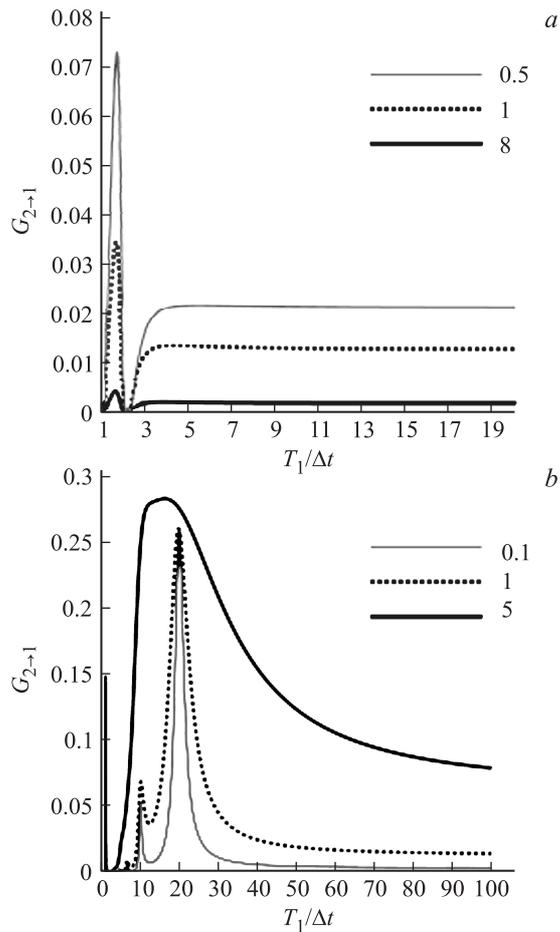


Рис. 2. Значения УП „в ложную сторону“ для системы (3) с различными периодами и временами релаксации осцилляторов при $c = 0.5$, $\Delta t = 11$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$: *a* — $G_{2 \rightarrow 1}(T_1/\Delta t)$ при $T_2/T_1 = 8$, $\tau_1 = 8\Delta t$ и $\tau_1/\tau_2 = 8$ (толстая сплошная), $\tau_1/\tau_2 = 1$ (пунктир), $\tau_1/\tau_2 = 0.5$ (тонкая сплошная); *b* — $G_{2 \rightarrow 1}(T_1/\Delta t)$ при $T_2/T_1 = 0.1$, $\tau_1 = 8\Delta t$ и $\tau_1/\tau_2 = 0.1$ (толстая сплошная), $\tau_1/\tau_2 = 1$ (пунктир), $\tau_1/\tau_2 = 5$ (тонкая сплошная); *c* — $G_{2 \rightarrow 1}(\tau_1/\Delta t)$ при $T_1 = 20\Delta t$, $T_2 = 2\Delta t$ (толстые линии и кружки) и $T_1 = 100\Delta t$, $T_2 = 10\Delta t$ (тонкие линии и пунктир) для различных $\tau_1/\Delta t$; *d* — $G_{2 \rightarrow 1}(\tau_2/\Delta t)$ при $T_1 = 20\Delta t$, $T_2 = 2\Delta t$ (толстые линии и кружки) и $T_1 = 100\Delta t$, $T_2 = 10\Delta t$ (тонкие линии и пунктир) для различных $\tau_1/\Delta t$.

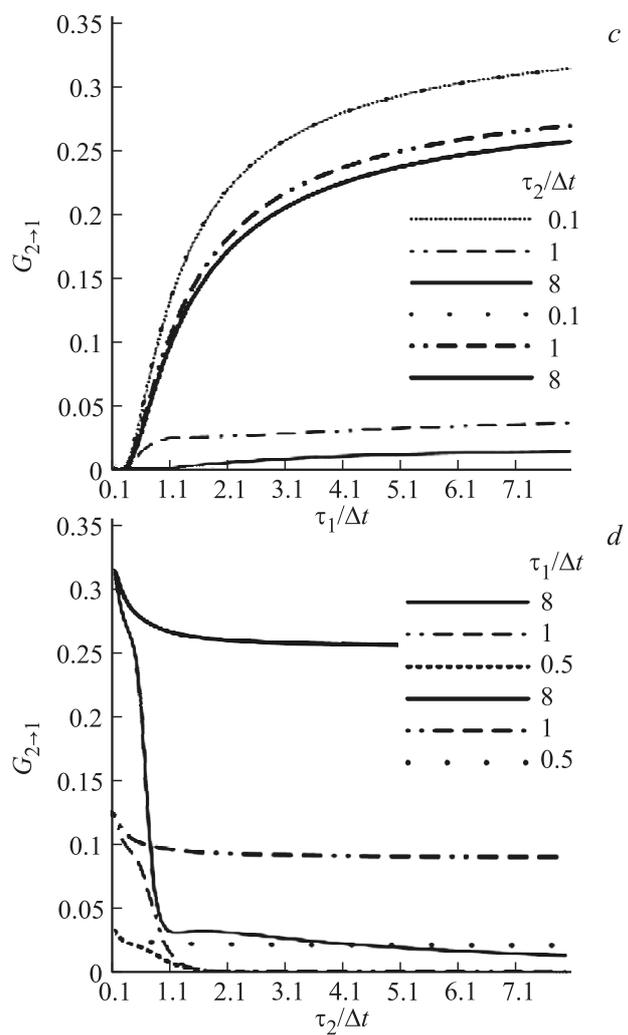


Рис. 2 (продолжение).

рис. 2, *b* эффект ложной связи в целом существенно уменьшается и сохраняется только для специфического соотношения периода с интервалом выборки $T_2 \approx 2\Delta t$ (при $T_1 \approx 20\Delta t$). Таким образом, влияние времени релаксации ведомого осциллятора на эффект ложных связей сильно, и рис. 2, *c, d* (тонкие линии) проясняет, что такая зависимость наиболее существенна при больших τ_1 (см. особенно рис. 2, *c* в правой части оси абсцисс и тонкую сплошную линию на рис. 2, *d*). Наиболее силен перепад значений $G_{2 \rightarrow 1}$ при переходе от $\tau_2/\Delta t \ll 1$ к $\tau_2/\Delta t > 5$, что особенно заметно при больших τ_1 (тонкая сплошная линия на рис. 2, *d*). Зависимость $G_{2 \rightarrow 1}$ от τ_1 имеет обратный характер ($G_{2 \rightarrow 1}$ растет с ростом τ_1 , рис. 2, *c*) и наиболее сильна при достаточно малых $\tau_2/\Delta t \ll 1$ (рис. 2, *c*, верхние графики) при переходе от $\tau_1/\Delta t \ll 1$ к $\tau_1/\Delta t \approx 1$ и меньше проявляется при переходе от $\tau_1/\Delta t \approx 1$ к $\tau_1/\Delta t \approx 10$, выходя на насыщение при больших $\tau_1/\Delta t$. Эти зависимости могут искажаться при специфических малых соотношениях периодов с интервалом выборки, например при упомянутом $T_2 \approx 2\Delta t$ (толстые кривые и кружки на рис. 2, *c, d*). Если все параметры τ_1, τ_2, T_1, T_2 существенно больше Δt , то $G_{2 \rightarrow 1}$ зависит в основном от τ_2 , монотонно уменьшаясь с его ростом (тонкая сплошная линия на рис. 2, *d*).

Таким образом, на эталонной системе однонаправленно связанных стохастических осцилляторов проведено исследование условий сильного проявления эффекта ложной связи из-за редкой выборки наблюдаемых временных рядов. Показано, что для осцилляторов с одинаковой добротностью при достаточно редкой выборке наиболее силен этот эффект, когда „медленный“ осциллятор влияет на „быстрый“. В обратной ситуации эффект пренебрежимо мал. В первом случае выводы, полученные на основе оценок причинности по Грейнджеру, т.е. выводы о влиянии „быстрых“ процессов на „медленные“, должны дополнительно проверяться с помощью специальных тестов [6]. Результаты во втором случае, т.е. выводы о влиянии „медленных“ процессов на „быстрые“, могут быть приняты как надежное свидетельство физического воздействия. Для осцилляторов с различной добротностью показана сильная зависимость эффекта от времен релаксации осцилляторов. Поскольку на практике часто имеется априорная информация о характерных временах исследуемых колебательных процессов, то полученные выводы могут использоваться как практический критерий необходимости учета эффекта редкой выборки при оценке направленных связей по данным наблюдений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке МОН РФ и ННГУ (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003) и РФФИ (гранты 14-02-31129-мол-а, 14-02-00492-а). Г.В. Осипов поддержан РФФИ (проект 14-12-00811).

Список литературы

- [1] *Granger C.W.J.* // *Econometrica*. 1969. V. 37. N 3. P. 424–438.
- [2] *Hung Y.-C., Hu C.K.* // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 244 102.
- [3] *Pereda E., Quian Quiroga R., Bhattacharya J.* // *Progr. Neurobiol.* 2005. V. 77. P. 1.
- [4] *Mosedale T.J., Stephenson D.B., Collins T.C., Mills T.C.* // *J. Climate*. 2006. V. 19. N 7. P. 1182–1194.
- [5] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // *Europhys. Lett.* 2012. V. 100. P. 10 005.
- [6] *Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2012. Т. 55. № 10–11. С. 736–749.
- [7] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. 197 с.
- [8] *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.
- [9] *Timmer J., Lauk M., Pfleger W., Deuschl G.* // *Biol. Cybern.* 1998. V. 78. P. 349.
- [10] *Smirnov D.A.* // *Phys. Rev. E*. 2013. V. 87. P. 042 917.
- [11] *Смирнов Д.А., Безручко Б.П.* // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2013. Т. 21. № 2. С. 61–73.