

УДК 530.18

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ СВЯЗИ МЕЖДУ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ ПО НАБЛЮДАЕМОЙ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Е. В. Сидак¹, Д. А. Смирнов^{2,3}, Б. П. Безручко^{1,2}

¹ Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского, г. Саратов;

² Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, г. Саратов;

³ Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород, Россия

Предложена методика оценки характеристик запаздывающей связи между колебательными системами, основанная на эмпирическом моделировании фазовой динамики при учёте коррелированности фазового шума. Эффективность подхода проиллюстрирована на эталонных стохастических и хаотических осцилляторах в численных экспериментах. С его помощью при анализе климатических временных рядов подтверждено наличие запаздывающего воздействия процесса Эль-Ниньо—Южное колебание на Северо-Атлантическое колебание.

ВВЕДЕНИЕ

В анализе временных рядов важное место занимают вопросы построения эмпирических моделей наблюдаемой динамики (см. например, [1–4]) и их использования для решения различных задач. Среди таких задач можно отметить прогноз качественных изменений динамики [5, 6] и оценку характеристик взаимодействия (связи) между элементами сложной системы [7–9]. Наряду с детерминированными нелинейными моделями [1–3], большое внимание уделяется построению стохастических модельных уравнений [3–6, 10–13], в том числе и при оценках характеристик направленных связей с помощью эмпирического моделирования фазовой динамики [8, 14]. При решении последней задачи, востребованной в нейрофизиологии [15], климатологии [16] и других областях, важен вопрос о наличии или отсутствии запаздывания воздействий исследуемых систем друга на друга и о величине времени запаздывания [17], которая часто определяет сложность наблюдаемой динамики. Точечные оценки времени запаздывания на основе моделирования фазовой динамики использовались при исследовании патологической колебательной активности во время паркинсоновского тремора [15, 18] и при изучении взаимодействия крупномасштабных климатических процессов Эль-Ниньо—Южное колебание и Северо-Атлантическое колебание [19, 20].

Поскольку при анализе относительно коротких зашумленных сигналов важно контролировать погрешности оценок, в работе [21] была предложена интервальная оценка времени запаздывания связи между колебательными системами по временным рядам. Данная оценка основана на эмпирическом моделировании фазовой динамики с учётом влияния интенсивности фазового шума на погрешность оценки. Её эффективность была показана на системах, находящихся под действием белых шумов [21]. Однако свойства шумов в фазовой динамике часто могут быть иными, как это имеет место для маломерных хаотических систем [22], например для системы Ресслера в режиме фазо-когерентного хаоса [22, 23] и для неавтономных систем под действием узкополосного случайного сигнала. Для получения надёжных оценок времени запаздывания в таких случаях требуется усовершенствование упомянутого метода, чему и посвящена данная работа.

В разделе 1 описан метод интервальной оценки запаздывания на основе моделирования фазовой динамики. В разделе 2 показаны проблемы применения данного метода на конкретном примере и предложена поправка для учёта времени корреляции остаточных ошибок эмпирической

модели (т. е. корреляционных свойств фазового шума). Эффективность и преимущества модифицированного метода продемонстрированы в численных экспериментах в разделе 3. В разделе 4 приведён пример анализа связи между климатическими процессами Эль-Ниньо—Южное колебание и Северо-Атлантическое колебание с помощью предложенного метода. Выводы представлены в разделе 5.

1. ИЗВЕСТНАЯ ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ СВЯЗИ

Известный подход [21] основан на построении эмпирической модели фазовой динамики наблюдаемых процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для этого сначала по имеющимся временным рядам $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одним из известных методов (см., например, [22]) рассчитываются временные ряды фаз колебаний $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_i = i \Delta t$, Δt — интервал выборки, N — длина ряда. Форма математической модели выбирается на основе следующих соображений. Известно [22, 24, 25], что фазовая динамика периодических автоколебательных процессов, возмущённых слабыми шумами и слабо связанных, достаточно точно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + G_1[\phi_1(t), \phi_2(t - \Delta_{2 \rightarrow 1}^*)] + \xi_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + G_2[\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta_{1 \rightarrow 2}^*)] + \xi_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь параметр ω_k определяет угловую частоту колебаний, $\xi_k(t)$ — белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t-t')$, $\Delta_{2 \rightarrow 1}^*$ и $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ — времена запаздывания связи. Функции G_k периодичны с периодом 2π по обоим аргументам и определяют взаимодействие осцилляторов и собственную нелинейность их фазовой динамики. При анализе дискретных временных рядов удобно рассматривать разностную форму уравнений, которую можно получить путём интегрирования уравнений (1) на интервале с конечной длительностью τ

$$\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k[\phi_k(t), \phi_j(t - \Delta_{j \rightarrow k}^*)] + \varepsilon_k(t). \quad (2)$$

Здесь $k, j = 1, 2, j \neq k$, $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$ — гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx \sigma_{\xi_k}^2 \tau$. Автокорреляционная функция фазового шума ε_k

$$C_k(t') = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t - t') \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2, \quad (3)$$

где угловые скобки означают математическое ожидание, линейно спадает на интервале $(0, \tau)$.

По временному ряду строится модель (2) с тригонометрическими многочленами невысокого порядка

$$F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{(m,n) \in \Omega_k} [\alpha_{k,m,n} \cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n} \sin(m\phi_k - n\phi_j)],$$

где $\mathbf{a}_k = w_k, \{\alpha_{k,m,n}, \beta_{k,m,n}\}_{(m,n) \in \Omega_k}$ — вектор коэффициентов, Ω_k — диапазон суммирования. При фиксированном пробном времени запаздывания $\Delta_{j \rightarrow k}$ коэффициенты \mathbf{a}_k определяются методом наименьших квадратов, т. е. путём минимизации среднего квадрата ошибки модели

$$S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k) = \frac{1}{N - \tau/\Delta t} \sum_{i=1}^{N - \tau/\Delta t} \{\phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i) - F_k[\phi_k(t_i), \phi_j(t_i - \Delta_{j \rightarrow k}), \mathbf{a}_k]\}^2.$$

Чтобы установить факт наличия связи, проверяется отличие оценок «силы» связи от нуля. Например, при отсутствии запаздывания интенсивность воздействия второй системы на первую, γ_1 , и первой на вторую, γ_2 , были определены в работе [14] как

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \iint_0^{2\pi} [\partial F_{1,2}(\phi_1, \phi_2, \mathbf{a}_{1,2}) / \partial \phi_{2,1}]^2 d\phi_1 d\phi_2.$$

Там же представлены формулы для их оценок $\hat{\gamma}_k^2$ по временному ряду вместе с 95-процентным доверительным интервалом. Указанные оценки можно рассчитывать и с учётом возможного запаздывания связи при различных пробных запаздываниях $\Delta_{j \rightarrow k}$ [15, 18–20]. Наши численные эксперименты, аналогичные представленным ниже, показывают, что если $\hat{\gamma}_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ вместе с доверительным интервалом лежит выше нуля для набора значений $\Delta_{j \rightarrow k}$, покрывающего интервал с шириной не менее одного характерного периода колебаний при проверяемом диапазоне пробных запаздываний не более пяти периодов, то можно сделать вывод о наличии воздействия $j \rightarrow k$ с итоговой вероятностью случайной ошибки не более 0,05.

Для оценки времени запаздывания в [21] рассматривается зависимость $S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$ и её минимальное значение при фиксированном $\Delta_{j \rightarrow k}$, $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}) = \min_{\mathbf{a}_k} S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$. Величина $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$ минимизируется как функция пробного запаздывания $\Delta_{j \rightarrow k}$ (см. рис. 1). Точка минимума $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$, определяемая из условия $s_k^2(\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}) = \min s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$, принимается в качестве оценки времени запаздывания, а само минимальное значение s_k^2 есть оценка дисперсии шума $\varepsilon_k(t)$. Такая оценка запаздывания оказывается смещённой при достаточно общих условиях на $-\tau/2$, т. е. время запаздывания недооценивается [21]. Несмещённой оценкой тогда является величина $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{corr}} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k} + \tau/2$. Для получения доверительного интервала определяют дисперсию величины $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$, исходя из формализма максимального правдоподобия. В случае независимых приращений фаз на последовательных неперекрывающихся интервалах времени оценка дисперсии имеет вид

$$\hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N'} \left[\frac{\partial^2 s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})}{\partial^2 \Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right]^{-1}, \quad (4)$$

где N' — число независимых значений ε_k . Поскольку при белом шуме в фазовой динамике (1) значения ε_k , разделённые интервалом не менее τ , статистически независимы друг от друга, то имеет место соотношение $N' = (N - \tau/\Delta t)/(\tau/\Delta t)$. При достаточной длине ряда оценка $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{corr}}$ распределена по нормальному закону, так что 95-процентный доверительный интервал для времени запаздывания задаётся формулой $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{corr}} \pm 1,96\hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}$. Для оценки второй производной в соотношении (4) зависимость s_k^2 от $\Delta_{j \rightarrow k}/\Delta t$ в окрестности Q точки минимума (см. рис. 1) аппроксимируется квадратичной параболой (штриховая линия на рис. 1). При этом использование окрестности Q с шириной в один характерный период колебаний даёт приемлемый результат [21].

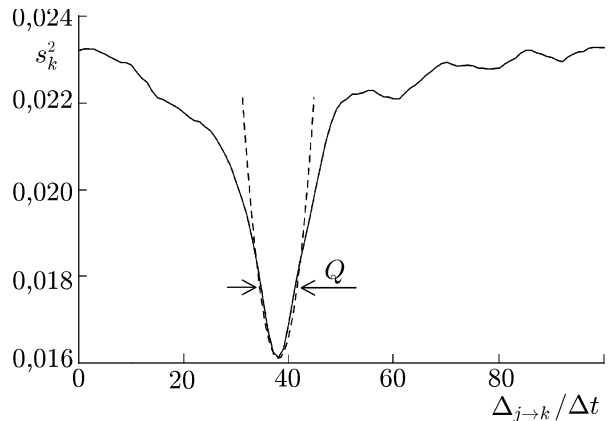


Рис. 1. Иллюстрация метода получения интервальной оценки запаздывания на примере временного ряда от фазовых осцилляторов вида (5) с частотами $\omega_1 = 1,05$, $\omega_2 = 0,95$ в случае белых шумов ξ_1 и ξ_2 с автоковариационными функциями $\langle \xi_1(t)\xi_1(t') \rangle = 0,36\delta(t-t')$ и $\langle \xi_2(t)\xi_2(t') \rangle = 0,01\delta(t-t')$

2. ТРУДНОСТИ В СЛУЧАЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ И МОДИФИЦИРОВАННАЯ ОЦЕНКА

В качестве системы с другими корреляционными свойствами шумов в фазовой динамике рассмотрим фазовые осцилляторы

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + \xi_1(t), & d\xi_1(t)/dt &= -\alpha_1\xi_1(t) + \eta_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + K \sin[\phi_1(t - \Delta_{1 \rightarrow 2}^*) - \phi_2(t)] + \xi_2(t), & d\xi_2(t)/dt &= -\alpha_2\xi_2(t) + \eta_2(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где ω_1 и ω_2 — собственные угловые частоты колебаний, K — коэффициент связи, $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ — время запаздывания воздействия $1 \rightarrow 2$, ξ_1 и ξ_2 — «цветные» шумы, η_1 и η_2 — взаимно некоррелированные белые шумы с автоковариационными функциями $\langle \eta_k(t) \eta_k(t') \rangle = D_k \delta(t - t')$. Дисперсия ξ_k выражается через интенсивность белого шума как $\sigma_{\xi_k}^2 = D_k / (2\alpha_k)$.

Для ансамбля из 100 пар временных рядов, полученных путём интегрирования уравнений (5) методом Эйлера с шагом 0,01 при интервале выборки 0,3 (примерно 20 точек на характерном периоде для использованных ниже значений параметров) и длине ряда $N = 2094$ (около 100 характерных периодов), по каждой паре рассчитывалась интервальная оценка времени запаздывания связи. Интервал τ принимался равным 1,5 (четверть периода) аналогично работе [21]. Подсчитывалась частота f_{err} ложных выводов о величине запаздывания, т. е. таких ситуаций, когда $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ не принадлежит интервалу $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{\text{corr}} \pm 1,96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$. Интервальная оценка применима, если вероятность ложных выводов не больше 0,05, т. к. доверительный интервал — 95-процентный. При учёте статистических флуктуаций частоты f_{err} , которая распределена по закону Бернулли, допустимое пороговое значение f_{err} для указанного размера ансамбля составляет 0,1.

Результаты для $\omega_1 = 1,05$, $\omega_2 = 0,95$, $k = 0,1$, $\Delta_{1 \rightarrow 2}^* = 12$ (40 точек, 2 периода), $\sigma_{\xi_2} = 0,06$, $\alpha_1 = 0,11$ и $\alpha_2 = 0,09$ представлены на рис. 2а (треугольники). Частота ошибочных выводов велика при $\sigma_{\xi_1} < 0,17$. Для диагностики этой ситуации рассмотрим автокорреляционную функцию шума ε_2 , которая оценивается по остаточным ошибкам модели как $C_2(l \Delta t) = \langle \hat{\varepsilon}_2(t_i) \hat{\varepsilon}_2(t_i - l \Delta t) \rangle_i / \hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2$, $l = 1, 2, \dots$, где угловые скобки означают среднее по моментам наблюдений. Она спадает до малой величины на интервале, значительно превышающем τ (рис. 2б, кружки), в отличие от того, что наблюдалось бы при нормальных белых шумах в фазовой динамике. Подобная ситуация возможна и для эталонных нелинейных осцилляторов, где свойства «эффективных фазовых шумов» определяются, например, влиянием существенно меняющихся хаотических амплитуд [22]. При этом автокорреляционные функции фазовых шумов могут спадать медленно, распределение не быть нормальным и т. п.

Следует ожидать, что наиболее существенное влияние на применимость метода оказывают именно долговременные корреляции фазовых шумов, т. к. они влияют на количество статистически независимых друг от друга значений ε_k на длине ряда. Поэтому мы предлагаем здесь поправку к оценке времени запаздывания, учитывающую это свойство. Для этого будем оценивать автокорреляционную функцию $C_k(l \Delta t)$ по остаточным ошибкам модели (рис. 2б) и определять время её спада T до некоторой малой величины (для рядов с длиной порядка 100 характерных периодов эмпирически подобранная ниже величина 0,2 даёт приемлемый результат). Количество независимых значений ξ_k на длине ряда определяется временем T . Оценим его снизу как $N'' = N \Delta t / L$, где $L = \max[T, \tau]$, т. к. значения шумов практически некоррелированы, если они разделены интервалом с длиной L . Тогда оценка дисперсии $\hat{\Delta}_{1 \rightarrow 2}^*$ примет вид

$$\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_k}^2}{N''} \left[\frac{\partial^2 s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})}{\partial^2 \Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right]^{-1}. \quad (6)$$

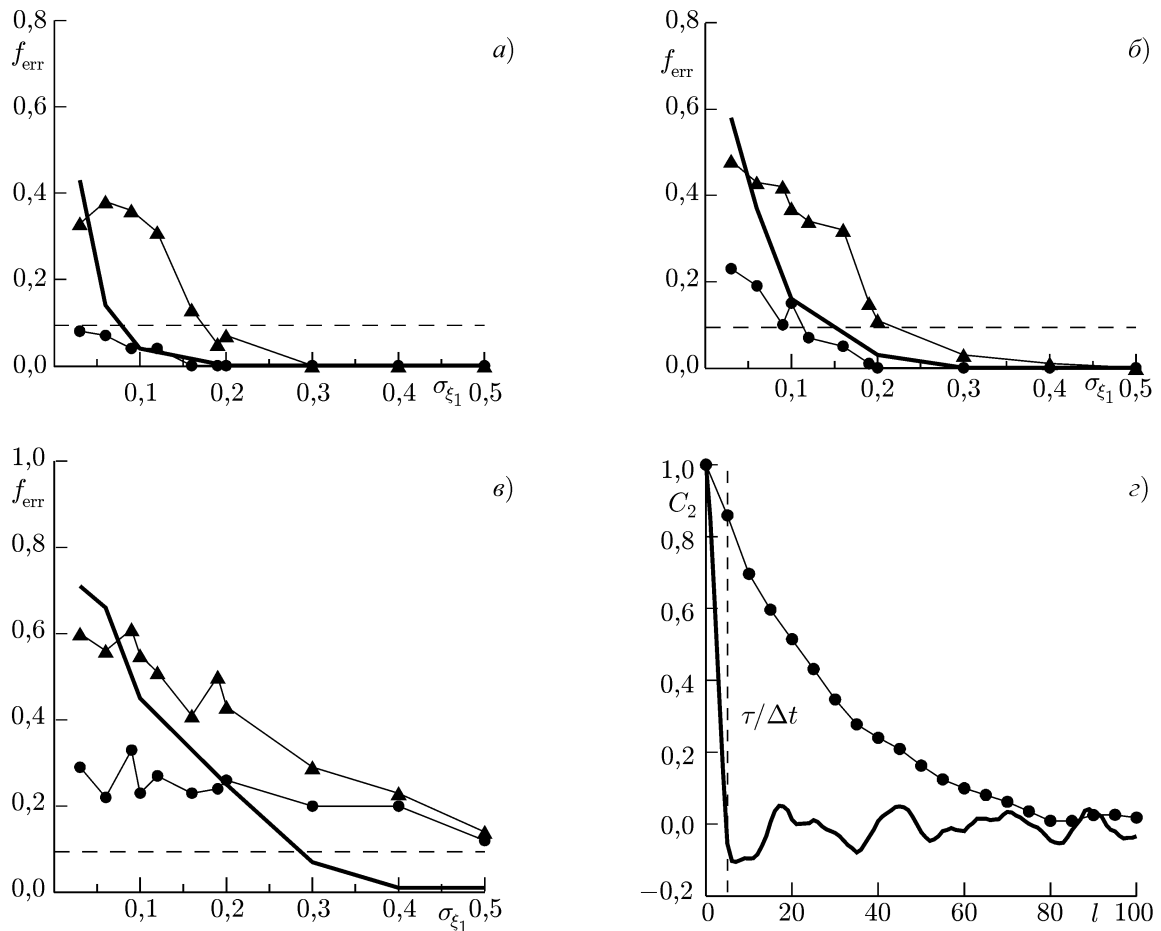


Рис. 2. Оценка характеристик запаздывания связи в системе (5). На панелях (а–в) треугольники соответствуют частоте ложных выводов для оценки (4), кружки — для оценки (6) при $\alpha_1 = 0,11$, $\alpha_2 = 0,09$; жирная линия — для обеих оценок при $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 9$, горизонтальная пунктирная линия отвечает допустимому уровню частоты ошибок, шумы характеризуются $\sigma_{\xi_2} = 0,06$ (а), $\sigma_{\xi_2} = 0,1$ (б), $\sigma_{\xi_2} = 0,2$ (в). На панели (г) представлена автокорреляционная функция шума C_2 при $\sigma_{\xi_2} = 0,06$ для $\alpha_1 = 0,11$, $\alpha_2 = 0,09$ (кружки) и для $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 9$ (жирная линия), вертикальная пунктирная линия показывает значение τ (примерно четверть характерного периода колебаний), l — временной лаг в единицах интервала выборки

В остальном формализм остаётся таким же.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЭТАЛОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Дисперсия шума $\sigma_{\xi_1}^2$ в «ведущем» осцилляторе в системе (5) менялась в широком диапазоне значений путём изменения интенсивности D_1 при фиксированных прочих параметрах. На рис. 2а–в показаны зависимости $f_{\text{err}}(\sigma_{\xi_1})$ для оценок (4) и (6) при различных параметрах α_1 , α_2 и σ_{ξ_2} . На рис. 2г представлены автокорреляционные функции остаточных ошибок эмпирической модели вида (2) при $\alpha_1 = 0,11$, $\alpha_2 = 0,09$ (длигие корреляции шумов в фазовой динамике) и $\alpha_1 = 11$, $\alpha_2 = 9$ (быстро спадающие корреляции, т. е. почти белые шумы в фазовой динамике). Величина f_{err} для «старой» оценки (4) велика при $\sigma_{\xi_2} = 0,06$, $\alpha_1 = 0,11$, $\alpha_2 = 0,09$ (рис. 2а, треугольники) и достаточно малых σ_{ξ_1} (меньше 0,17). Учёт времени корреляции остатков модели позволяет

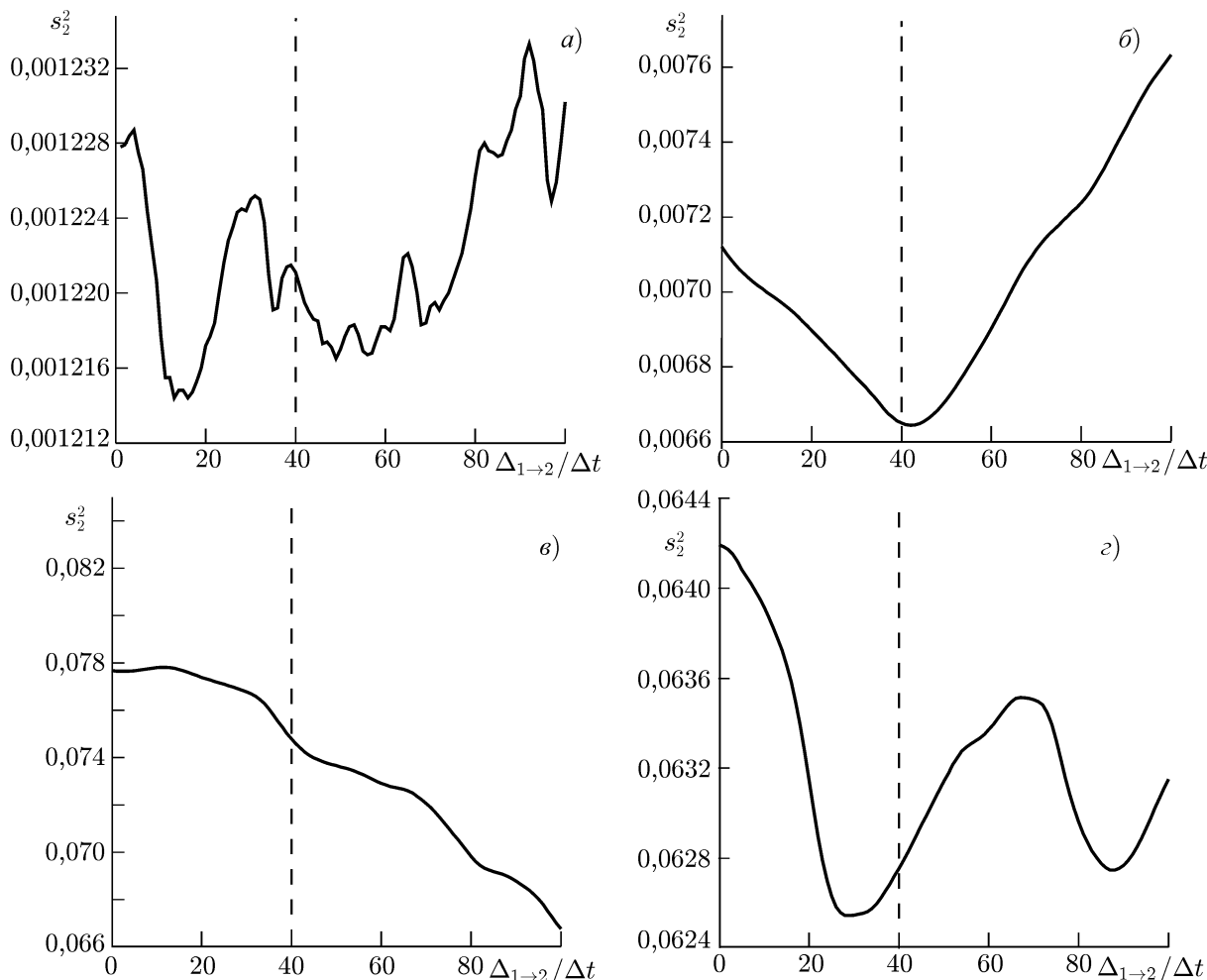


Рис. 3. Зависимость $s_2^2(\Delta_{1\rightarrow 2})$ для отдельных рядов: $\sigma_{\xi_1} = 0,03, \sigma_{\xi_2} = 0,06, \alpha_1 = 11, \alpha_2 = 9$ (а); $\sigma_{\xi_1} = 0,06, \sigma_{\xi_2} = 0,06, \alpha_1 = 0,11, \alpha_2 = 0,09$ (б); графики для двух различных реализаций шума при $\sigma_{\xi_1} = 0,03, \sigma_{\xi_2} = 0,2, \alpha_1 = 0,11, \alpha_2 = 0,09$ (в, з). Вертикальный пунктир означает истинное время запаздывания $\Delta_{1\rightarrow 2}^*$:

снизить частоту ошибок до значения не больше допустимого (рис. 2а, кружки).

Заметим, что при $\alpha_1 = 11, \alpha_2 = 9$ и малых σ_{ξ_1} не помогает и учёт корреляций. Ошибки метода здесь вызваны тем, что при этих параметрах значения s_2^2 оказываются столь мало чувствительны к пробному $\Delta_{1\rightarrow 2}$, что при данной длине ряда точка минимума $s_2^2(\Delta_{1\rightarrow 2})$ может существенно смещаться относительно истинного значения времени запаздывания в зависимости от реализации $s_2^2(\Delta_{1\rightarrow 2})$. При этом весь формализм строго справедлив лишь асимптотически, когда влияние реализации на положение минимума малó. Диагностировать проблемную ситуацию можно по графику $s_2^2(\Delta_{1\rightarrow 2})$, который не демонстрирует одного чётко выраженного минимума (рис. 3а) в отличие от «благополучной» ситуации, показанной на рис. 1 и 3б. Заметим также, что при $\sigma_{\xi_1} > 0,2$ имеет место невысокая частота ошибок даже без учёта поправки. Причина этого в том, что при столь больших шумах в ведущей системе флуктуации точки минимума $s_2^2(\Delta_{1\rightarrow 2})$ не превышают Δt , а ширина доверительного интервала в обоих варианта оценки равна тогда округлённому значению $2\Delta t$, которого с запасом хватает для исключения ошибочных выводов.

На рис. 2б, в представлены графики для $\sigma_{\xi_2} = 0,1$ и $\sigma_{\xi_2} = 0,2$. Результаты аналогичны показанным на рис. 2а, за исключением того, что «граничное» значение σ_{ξ_1} , при котором пред-

ложенная поправка обеспечивает допустимую частоту ошибочных выводов, смещается все более вправо по оси абсцисс. При этом в случае $\sigma_{\xi_2} = 0,2$, $\alpha_1 = 0,11$ и $\alpha_2 = 0,09$ поправка помогает меньше (рис. 2б): даже при увеличении σ_{ξ_1} до значения 0,4 большой уровень шума в ведомом осцилляторе σ_{ξ_1} приводит к тому, что график $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ сильно зависит от конкретной реализации шума ε_2 (рис. 3в, з) и не демонстрирует единственного явного минимума внутри широкого диапазона пробных запаздываний. Время автокорреляции шумов для зависимостей, представленных на рис. 3в, з, составляет примерно $33\Delta t$, а показанный диапазон значений пробного запаздывания покрывает три таких интервала. Таким образом, если имеется «содержательный» минимум $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$, то он находится заведомо внутри этого диапазона. Вне этого диапазона могут наблюдаться дополнительные «случайные» минимумы, но они проявляются слабо (аналогично минимумам на рис. 3з), а не как единственный явный минимум. Поэтому мы не приводим графиков в более широком диапазоне, а используем заданный достаточно широкий диапазон пробных запаздываний для единообразия. Это связано и с особенностями применения метода на практике, где желательно ограничивать интервал пробных запаздываний не только из содержательных соображений, но и из-за ограничений на длину временного ряда, т. к. оценки $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ при больших пробных запаздываниях становятся менее надёжными и увеличивается вероятность наблюдений случайного минимума (эффект типа «переобучения модели»).

Чтобы проиллюстрировать эффективность предложенного метода в более общей ситуации, чем фазовые осцилляторы с заданными свойствами шумов, рассмотрим системы Ресслера. В них свойства эффективных фазовых шумов определяются влиянием амплитуды и «третьей» координаты z и могут быть весьма нетривиальными [22, 23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\omega_1 y_1(t) - z_1(t) + \eta_1, & \dot{y}_1(t) &= \omega_1 x_1(t) + a y_1(t), & \dot{z}_1(t) &= b + z_1(t) [x_1(t) - r], \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega_2 y_2(t) - z_2(t) + K [x_1(t - \Delta_0) - x_2(t)] + \eta_2, & \dot{y}_2(t) &= \omega_2 x_2(t) + a y_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= b + z_2(t) [x_2(t) - r]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\eta_{1,2}$ — белые шумы, коэффициент связи $K = 0,05$, время запаздывания $\Delta_0 = 12$, угловые частоты $\omega_1 = 1,015$, $\omega_2 = 0,985$, $a = 0,1$, $b = 0,1$ и $r = 4$. При выбранных значениях параметров и $D_k = 0$, $K = 0$ имеет место периодический режим, однако результаты, представленные ниже, аналогичны при данном виде связи и для возмущённых шумом хаотических режимов, и для циклов с различными периодами, которые образуются после бифуркаций удвоения периода при увеличении параметра r .

Уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом 0,001. Анализировались сигналы x_1 и x_2 с длиной 100 характерных периодов с интервалом выборки $\Delta t = 0,3$ (20 точек на периоде), фазы рассчитывались с помощью преобразования Гильберта, см., например, работу [22]. Корреляции остаточных ошибок (рис. 4а) спадают медленнее, чем на интервале τ , следуя более сложной, чем для рассмотренных выше фазовых осцилляторов, немонотонной кривой. Тем не менее, предложенная поправка (6) оказывается достаточной для обеспечения надёжных выводов, как показывает рис. 4б ($\sqrt{D_2} = 0,089$): частота ошибочных выводов не превышает требуемую при $\sqrt{D_1} > 0,7$ (кружки). Аналогично предыдущему примеру, при меньших $\sqrt{D_1}$ и предложенная поправка не позволяет избежать ошибок. Однако эта ситуация вновь надёжно диагностируется по отсутствию чёткого минимума в зависимости $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ (рис. 4в), в отличие от случая больших $\sqrt{D_1}$ (рис. 4з).

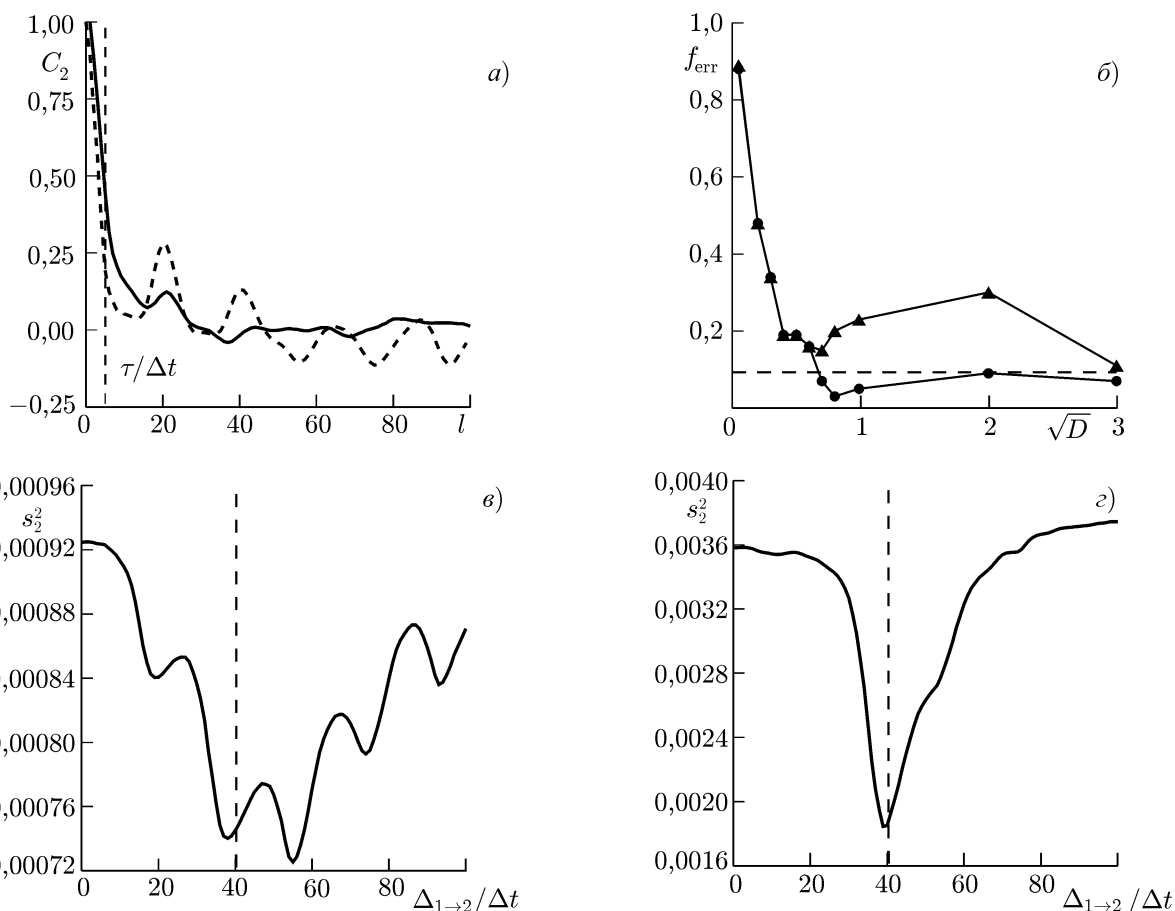


Рис. 4. Оценка времени запаздывания связи для систем Ресслера (7). На панели (а) представлены автокорреляционные функции фазовых шумов при $\sqrt{D_2} = 0,089$ и $\sqrt{D_1} = 0,1$ (штриховая линия), $\sqrt{D_1} = 2$ (сплошная линия); на панели (б) — частоты ложных выводов в зависимости от уровня шума в ведущей системе при $\sqrt{D_2} = 0,089$, треугольники соответствуют оценке (4), кружки — оценке с поправкой (6), пунктирная линия — допустимый уровень частоты ошибок; панели (в, з) — зависимости $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$ для отдельных рядов при $\sqrt{D_1} = 0,4$ и $\sqrt{D_2} = 0,089$ (в), $\sqrt{D_1} = 3$ и $\sqrt{D_2} = 0,089$ (з). Вертикальный пунктир означает истинное время запаздывания Δ_0

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К КЛИМАТИЧЕСКИМ ДАННЫМ

В качестве примера применения предложенной интервальной оценки для анализа реальных сложных процессов рассмотрим задачу исследования взаимодействия Эль-Ниньо–Южного колебания (ЭНЮК) и Северо-Атлантического колебания (САК). Процессы ЭНЮК и САК представляют собой ведущие моды межгодовой климатической изменчивости в целом для Земли и для Северного полушария в частности [26]. Выявление механизмов, формирующих эти процессы, — проблема большого фундаментального и практического значения. Особый интерес вызывает вопрос о наличии и характере взаимного влияния ЭНЮК и САК. В работах [19, 20] выявлено влияние процесса ЭНЮК на САК с помощью метода моделирования фазовой динамики и высказано предположение о наличии запаздывания около 20÷24 месяцев. Однако из-за отсутствия интервальных оценок времени запаздывания этот вывод нельзя было сделать с заданной достоверностью. Предложенная в данной работе оценка используется ниже для уточнения этого вопроса.

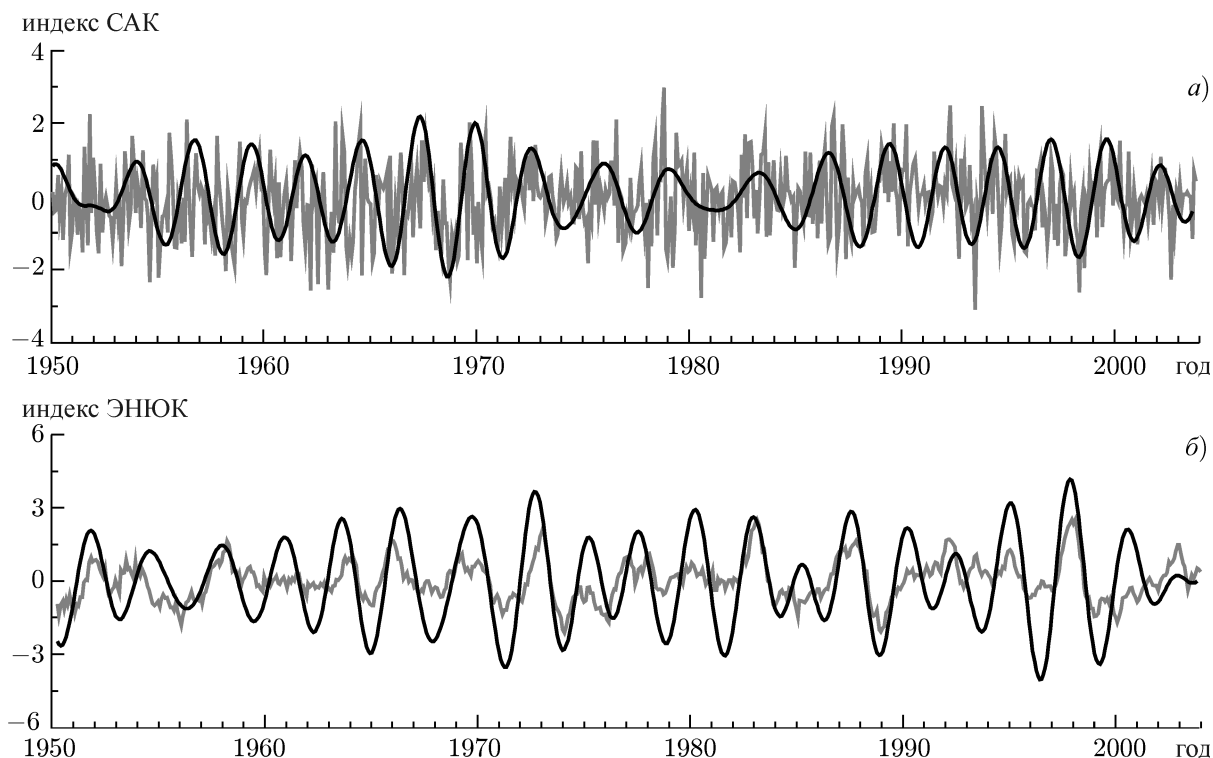


Рис. 5. Временные ряды индексов САК (панель *а*, серая линия) и ЭНЮК (панель *б*, серая линия) и вейвлет-коэффициенты для масштаба $s = 32$ месяца (чёрные линии)

Для анализа в качестве характеристики САК в [19, 20] использовалась первая мода разложения поля высоты изобарической поверхности 500 гПа в средней тропосфере Северного полушария на основе анализа «повёрнутых главных компонент» (rotated principal components) [27], данные доступны на сайте [28]. Индекс САК (x_1), таким образом, является характеристикой (модой) полушарного масштаба. В качестве индекса Эль-Ниньо (x_2) использовалась величина T (Ниньо-3.4), характеризующая температуру поверхности соответствующей экваториальной области Тихого океана (Ниньо-3.4 — 5° с. ш.— 5° ю. ш., 170° з. д.— 120° в. д.), см. сайт [28]. Следует отметить, что временные ряды с надёжными данными для этих характеристик являются сравнительно короткими — со второй половины XX века (с 1950 по 2004 год в [19, 20], т. е. 660 среднемесячных значений, см. рис. 5). При этом процессы весьма сложны, так что точечные оценки любых величин недостаточны, и необходимы интервальные оценки.

Для сопоставления с результатами работ [19, 20] сначала для анализа мы использовали данные только за тот же период, т. е. за 1950–2004 годы. Временные ряды представлены на рис. 5*а*, *б*. Фазы определялись путём построения аналитического сигнала с помощью комплексного вейвлета Морле $\psi(t) = \pi^{-1/4} \exp(-j\omega_0 t) \exp(-t^2/2)$, что эквивалентно полосовой фильтрации и последующему преобразованию Гильберта [27, 29–32]. Однако использованный нами подход менее подвержен краевым эффектам, что важно при анализе коротких сигналов. А именно, для сигнала $x_k(t)$ определяется комплексный сигнал $z_k(t) = \sqrt{s}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x_k(t') \psi^*[(t-t')/s] dt'$, где символ «*» означает комплексное сопряжение, s — фиксированный временной масштаб. Фаза рассчитывается как аргумент комплексной величины $z_k(t)$. При этом имеет место полосовая фильтрация сигнала $x_k(t)$ с центральной частотой $f \approx \omega_0/(2\pi s)$, причём ширина полосы определяется параметром ω_0 . При использовавшемся в работах [19, 20] и далее в данной работе $\omega_0 = 6$ она равна примерно $1/4$ от центральной частоты $f \approx 1/s$, а краевые эффекты проявляются на интервалах с длиной $1,4s$

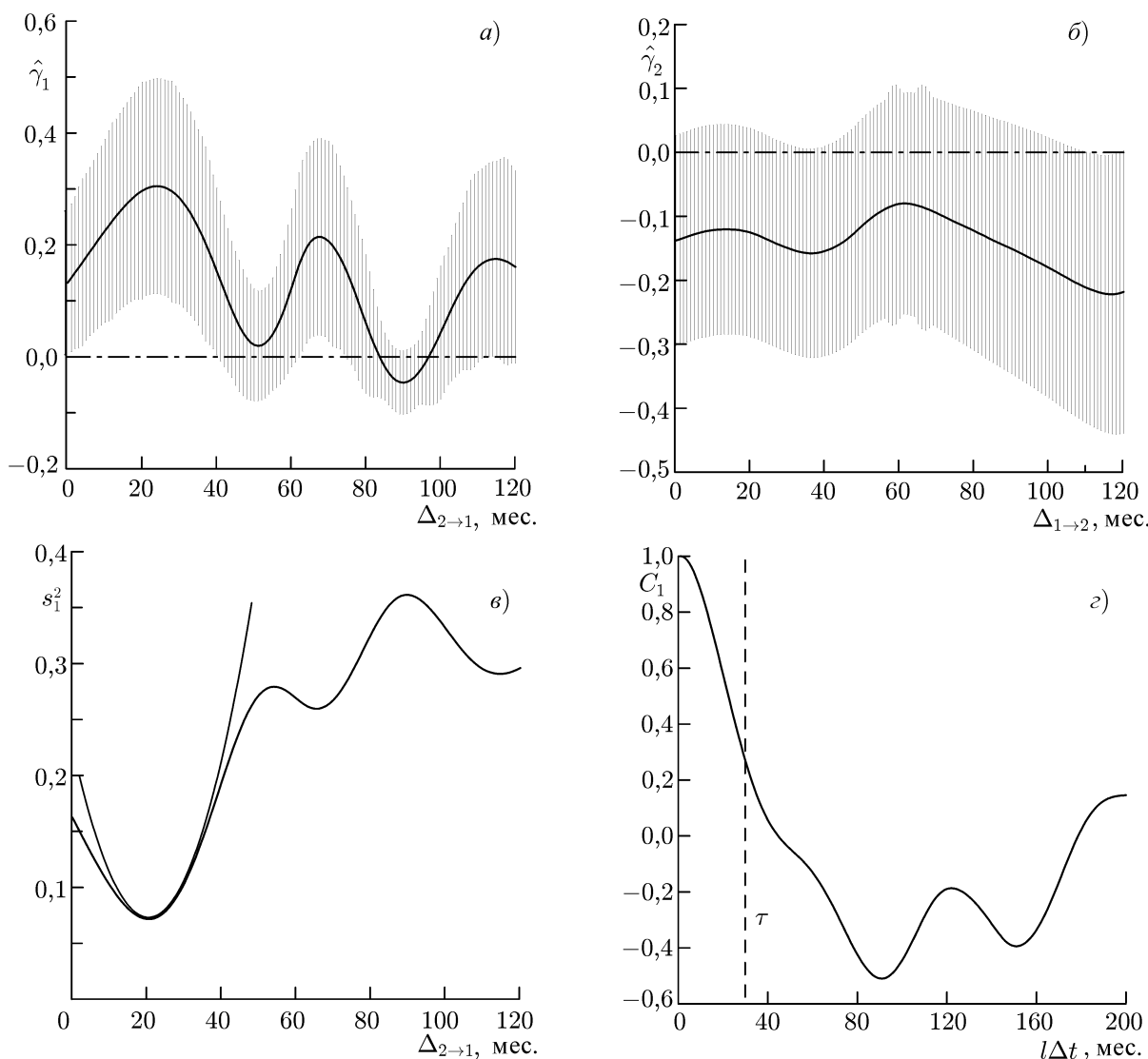


Рис. 6. Оценки интенсивности взаимодействия между процессами ЭНЮК и САК и интервальные оценки времени его запаздывания: зависимость оценки индекса влияния ЭНЮК на САК $\hat{\gamma}_1(\Delta_{2 \to 1})$ (а); зависимость оценки индекса влияния САК на ЭНЮК $\hat{\gamma}_2(\Delta_{1 \to 2})$ (б); вертикальными линиями показан 95-процентный доверительный интервал оценок $\hat{\gamma}_{1,2}$; зависимость $s_1^2(\Delta_{2 \to 1})$ (в); автокорреляционная функция остатков модели (г), вертикальная пунктирная линия показывает значение τ

[33–35]. В работах [19, 20] оценивались характеристики связей при различных s , т.е. для различных «ритмов» в САК и ЭНЮК. Выводы о наличии связи получены при $s = 32$ месяца для обоих сигналов. На рис. 5а, б пунктиром показаны временные реализации вещественной части вейвлет-коэффициента, соответствующего $s = 32$ мес.

На рис. 6а–в представлены зависимости $\hat{\gamma}_k(\Delta_{j \to k})$ и $s_1^2(\Delta_{2 \to 1})$. Согласно оценкам направленных связей, влияние ЭНЮК на САК значимо (рис. 6а), влияние в обратную сторону не значимо, см. рис. 6б. На графике $s_1^2(\Delta_{2 \to 1})$ наблюдается чёткий минимум при пробном $\Delta_{2 \to 1} = 20$ мес. Аппроксимирующая парабола показана тонкой линией. Оценка автокорреляционной функции шума в фазовой динамике САК представлена на рис. 6г, время спадания её абсолютной величины до 0,2 равно 176 месяцев, что существенно превышает $\tau = 32$ месяца, так что при оценке времени запаздывания использовалась предложенная в данной работе формула (6). Соответствующая

точечная оценка времени запаздывания $\hat{\Delta}_{2 \rightarrow 1}^{\text{corr}}$ равняется 36 месяцам, а доверительный интервал составляет от 25 до 47 месяцев. Таким образом, интервальное оценивание подтверждает гипотезу о наличии ненулевого запаздывания во влиянии ЭНЮК на САК и уточняет саму оценку времени запаздывания, сдвигая её в область больших значений за счёт учёта смещения оценки, не проводившегося в прежних работах.

Оценка по данным за 1950–2013 годы даёт качественно схожие результаты, поэтому соответствующие графики не показаны. Количественные значения времени запаздывания при этом сдвигаются в сторону ещё несколько больших значений: оценка даёт интервал от 3 до 5 лет. Однако этот интервал в значительной степени перекрывается с тем, который получен по более короткому ряду, так что общий вывод о наличии ненулевого запаздывания не меньше двух лет подтверждается и при этом анализе.

ВЫВОДЫ

Задача надёжной оценки времени запаздывания связи между колебательными системами встречается в различных областях исследований, и вопрос о получении такой оценки по относительно коротким временным рядам часто оказывается практически важным. В данной работе предложена поправка к известной интервальной оценке времени запаздывания связи, основанная на учёте корреляционных свойств шумов в фазовой динамике исследуемых систем. Её необходимость для устранения ошибочных выводов и эффективность в случае временных рядов с умеренной длиной (около 100 характерных периодов) показаны в численном эксперименте на эталонных колебательных системах.

Предложенный модифицированный метод может быть востребован при анализе нелинейных колебательных систем в различных прикладных ситуациях, т. к. даже в эталонных системах с невысокой размерностью (системы Ресслера, Лоренца и др.) имеют место «эффективные» фазовые шумы с нетривиальными свойствами [22, 23]. Эти свойства включают в себя, в том числе, негауссово распределённые и долгие корреляции, что может привести к ошибкам при использовании ранее известной оценки [21], основанной на предположении о нормальных белых шумах. Поскольку именно время корреляции наиболее сильно влияет на информативность данных для статистического оценивания (т. к., грубо говоря, оно определяет количество независимых фрагментов в имеющихся данных), следует ожидать, что предложенной поправки будет достаточно для обеспечения надёжности метода для большого набора практических ситуаций.

В данной работе с помощью развитого метода при анализе временных рядов климатических индексов подтверждено предположение о запаздывающем характере воздействия процесса Эль-Ниньо—Южное колебание на Северо-Атлантическое колебание, а оценка времени запаздывания дополнена доверительным интервалом от 25 до 47 месяцев (см. обсуждение возможных механизмов в [19, 20]), характеризующим её погрешность.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 14-12-00291). Анализ примера с климатическими данными выполнен при частичной поддержке Правительства РФ (соглашение 14.Z50.31.0033 с ИПФ РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kantz H., Schreiber T. Nonlinear time series analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 369 p.

2. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
3. Bezruchko B. P., Smirnov D. A. Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 432 p.
4. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 529 с.
5. Loskutov E. M., Molkov Ya. I., Mukhin D. N., Feigin A. M. // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. Art. no. 066214.
6. Molkov Y. I., Mukhin D. N., Loskutov E. M., et al. // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. Art. no. 036215.
7. Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. Art. no. 144103.
8. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. Art. no. 046204.
9. Kralemann B., Rosenblum M., Pikovsky A. // Chaos. 2011. V. 21. Art. no. 025104.
10. Siegert S., Friedrich R., Peinke J. // Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 275.
11. Siefert M., Kittel A., Friedrich R., Peinke J. // Europhys. Lett. 2003. V. 61. P. 466.
12. Mukhin D. N., Feigin A. M., Loskutov E. M., Molkov Ya. I. // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. Art. no. 036211.
13. Molkov Ya. A., Loskutov E. M., Mukhin D. N., Feigin A. M. // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. Art. no. 036216.
14. Smirnov D., Bezruchko B. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. Art. no. 046209.
15. Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A. // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. Art. no. 046213.
16. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. и др. // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178, № 3. С. 323.
17. Wang Y., Gozolchiani A., Ashkenazy Y., et al. // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. Art. no. 138501.
18. Smirnov D., Barnikol U. B., Barnikol T. T., et al. // Europhys. Lett. 2008. V. 83. Art. no. 20003.
19. Mokhov I. I., Smirnov D. A. // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. L03708.
20. Мохов И. И., Смирнов Д. А. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42, № 5. С. 650.
21. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 3, № 1. С. 64.
22. Пиковский А. С., Розенблум М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
23. Smirnov D., Sidak E., Bezruchko B. // European Phys. J. Special Topics. 2013. V. 222. P. 2441.
24. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 176 p.
25. Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. P. 2291.
26. Climate Change 2001: The Scientific Basis. Intergovernmental panel on climate change / Ed. by J. T. Houghton, Y. Ding, D. J. Griggs, et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2001. 881 p.
27. Barnston A. G., Livezey R. E. // Mon. Wea. Rev. 1987. V. 115. P. 1083.
28. <http://www.ncep.noaa.gov>.
29. Lachaux J. P., Rodriguez E., le Van Quyen M., et al. // Int. J. Bif. Chaos. 2000. V. 10. P. 2429.
30. Kraskov A. Synchronization and Interdependence Measures and their Applications to the Electroencephalogram of Epilepsy Patients and Clustering of Data: Dissertation (PhD thesis)/ Research Centre Julich, John von Neumann Institute for Computing. Julich, 2004. 90 p.
31. Kraskov A., Kreuz T., Andrzejak R. G., et al. Extracting phases from aperiodic signals. 2004. e-print arXiv:cond-mat/0409382.
32. Храмов А. Е., Короновский А. А. // Chaos. 2004. V. 14. P. 603.
33. Torrence C., Compo G. P. // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1998. V. 79. P. 61.
34. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 170 с.

35. Короновский А. А., Макаров В. А., Павлов А. Н. и др. Вейвлеты в нейродинамике и нейрофизиологии. М.: Физматлит, 2013. 272 с.

Поступила в редакцию 16 сентября 2014 г.; принята в печать 29 апреля 2015 г.

ESTIMATION OF CHARACTERISTICS OF DELAYED COUPLING BETWEEN STOCHASTIC OSCILLATORS USING THE OBSERVED PHASE DYNAMICS

E. V. Sidak, D. A. Smirnov, and B. P. Bezruchko

A method for estimating the characteristics of the delayed coupling between the oscillatory systems, which is based on the empirical simulation of the phase dynamics with allowance for the phase-noise correlation, is proposed. The method efficiency is illustrated by the standard stochastic and chaotic oscillators in numerical experiments. Using this method for analyzing climatic time series, we confirm the presence of the delayed influence of the El Nino Southern oscillation on the North-Atlantic oscillation.