

11

Восстановление времени запаздывания по временным рядам с применением метода ближайших соседей

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, В.С. Хорев

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 20 марта 2013 г.

Предложен метод восстановления времени запаздывания систем с задержкой по их временным рядам, основанный на применении метода ближайших соседей. Параметры метода могут быть выбраны в широких пределах, а сам метод остается эффективным при очень высоких уровнях динамического и измерительного шума.

При исследовании автоколебательных систем с запаздывающей обратной связью важно знать значения временных задержек, величина которых во многом определяет динамику и свойства системы. Поэтому задача восстановления времени запаздывания по временным рядам наблюдаемых динамических переменных привлекает внимание многих исследователей. Для ее решения были предложены различные методы, позволяющие восстановить времена запаздывания систем по хаотическим временным рядам их колебаний [1–10]. Часть этих методов основана на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности [1–3]. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [1], минимальная величина информационной энтропии [2] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [3]. Известны также методы восстановления времени запаздывания, основанные на применении регрессивного анализа [4], статистического анализа экстремумов временного ряда [5], метода множественной стрельбы [6], метода оптимизации [7], теории информации [8], адаптивной синхронизации [9] и нейронных сетей [10]. Для определения времени

запаздывания систем, находящихся в режиме периодических колебаний, были разработаны методы, основанные на возмущении системы с запаздыванием внешним воздействием и анализе отклика [11–14].

В данной работе мы предлагаем новый метод восстановления времени задержки по временным рядам, основанный на использовании метода ближайших соседей. Достоинствами предлагаемого метода являются возможность его применения к широкому классу систем с запаздыванием, устойчивость к очень высоким уровням динамического и измерительного шума и простота реализации.

Метод ближайших соседей широко используется в различных научных дисциплинах при анализе временных рядов [15,16]. При этом основными областями его применения являются классификация объектов и прогноз динамики исследуемой системы. В задаче классификации объектов идея метода ближайших соседей заключается в том, что объект полагается относящимся к тому классу, который является наиболее распространенным среди его ближайших соседей. Применительно к задаче прогноза временного ряда, суть метода ближайших соседей состоит в том, чтобы использовать для предсказания динамики системы ее состояния в прошлом, наиболее близкие по своим свойствам состоянию в настоящий момент времени. Мы впервые предлагаем использовать метод ближайших соседей для определения по временному ряду системы с запаздыванием ее времени задержки.

Поясним идею предлагаемого метода на примере одного из наиболее широко используемых дифференциальных уравнений первого порядка с одним временем запаздывания:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1)$$

где ε — параметр инерционности, τ — время запаздывания, f — нелинейная функция. К уравнению вида (1) сводятся, например, уравнение Маккея–Гласса и уравнение Икеды, ставшие эталонными при исследовании систем с запаздыванием.

Поскольку при анализе временных рядов мы всегда имеем дело с переменными, измеренными в дискретные моменты времени, удобно перейти от дифференциального уравнения (1) к разностному уравнению

$$\varepsilon \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (2)$$

где Δt — малое время, равное интервалу выборки. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$x(t + \Delta t) = a_1 x(t) + a_2 f(x(t - \tau)), \quad (3)$$

где $a_1 = 1 - \Delta t/\varepsilon$, $a_2 = \Delta t/\varepsilon$. Запишем уравнение (3) в виде дискретного отображения

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 f(x_{n-d}), \quad (4)$$

где $n = t/\Delta t$ — дискретное время, а $d = \tau/\Delta t$ — дискретное время задержки.

Пусть у нас имеется временной ряд $\{x_n\}_{n=1}^N$ системы (1) длиной N точек. Введем вектор $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$ и найдем для него ближайшего соседа — вектор $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$, где $j \neq i$. Существует несколько критериев выбора ближайшего соседа для заданного вектора, отличающихся выбором метрики [16]. Наиболее часто используемой является евклидова метрика

$$L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (x_{i-d} - x_{j-d})^2}. \quad (5)$$

Ближайшим соседом для вектора \mathbf{X}_i будет такой вектор \mathbf{X}_j , для которого расстояние $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ минимально. В общем случае по временному ряду находят не одного, а k ближайших соседей для заданного вектора.

Идея предлагаемого метода состоит в том, что в системе (4) ближайшим соседним векторам, содержащим динамическую переменную в моменты времени n и $n-d$, где $n \in [d+1, N-1]$, будут соответствовать близкие состояния системы в моменты времени $n+1$, так как эволюция системы (4) определяется ее текущим состоянием и состоянием в задержанный момент времени. Поскольку время запаздывания нам неизвестно, будем перебирать пробные задержки m из некоторого интервала и для k ближайших соседних векторов каждого вектора $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m})$ временного ряда оценивать дисперсию σ_n^2 соответствующих им состояний системы в моменты времени $n+1$.

При ошибочном выборе величины m ($m \neq d$) дисперсия этих состояний может оказаться большой, так как состояния системы в моменты времени $n+1$ не будут зависеть от ее состояний в моменты времени $n-m$. Истинному времени запаздывания d будет соответствовать

положение минимума величины

$$D(m) = \frac{1}{N - m - 2} \sum_{n=m+1}^{N-1} \sigma_n^2. \quad (6)$$

В отличие от большинства других методов предложенный подход можно применять для восстановления времени запаздывания не только систем вида (1), но и систем более общего вида, с нелинейной функцией F , зависящей от обеих переменных $x(t)$ и $x(t - \tau)$:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau)). \quad (7)$$

Мы применили метод к временным рядам уравнения Маккея–Гласса:

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau)}{1 + x^c(t - \tau)}. \quad (8)$$

Делением на b уравнение (8) приводится к виду (1) с $\varepsilon = 1/b$. Параметры системы (8) $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$, $\tau = 300$ соответствовали движению на хаотическом аттракторе, шаг выборки точек $\Delta t = 1$, длина ряда $N = 10\,000$,

На рис. 1, *a* приведены зависимости дисперсии D от пробного времени запаздывания m при различном количестве k ближайших соседей для вектора $\mathbf{X}_n = (x_n, x_{n-m})$. Величина m перебирается из интервала от 1 до 500 с шагом 1. Все зависимости $D(m)$ демонстрируют ярко выраженный абсолютный минимум при $m = 300$, обеспечивая точное восстановление дискретного времени запаздывания $d = \tau/\Delta t = 300$.

При слишком частой выборке точек возможна ситуация, когда ближайшими соседями вектора $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$ окажутся близкие ему по времени векторы $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$ с $j = i \pm p$, где $p = 1, 2, \dots, P$, которые мешают оценке времени запаздывания. В таких случаях при поиске ближайших соседей вектора $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$ следует исключить из рассмотрения близкие ему по времени векторы $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$ в количестве $l = 2P$. На рис. 1, *b* построены зависимости $D(m)$ при различном количестве l , близких по времени векторов, не учитываемых при поиске ближайших соседей, для случая $k = 10$. Как и на рис. 1, *a*, все графики имеют абсолютный минимум при $m = d = 300$.

Следует отметить, что вместо поиска фиксированного числа k ближайших соседей вектора $\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i-d})$ можно считать его ближайшими соседями все векторы $\mathbf{X}_j = (x_j, x_{j-d})$, для которых $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) < \delta$,

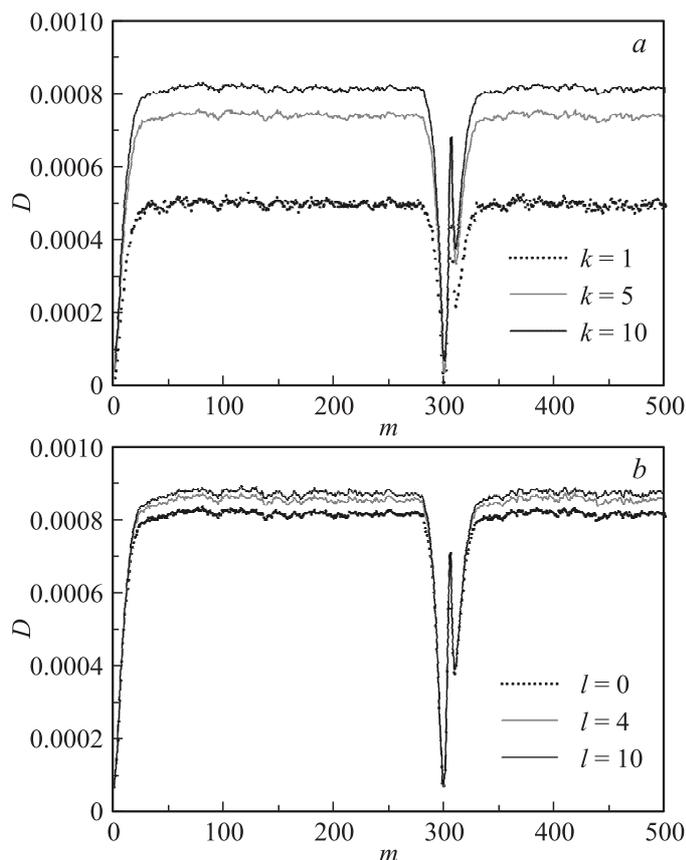


Рис. 1. Зависимости дисперсии D от пробного времени запаздывания m при различном количестве k ближайших соседей (а) и при различном количестве l исключаемых из рассмотрения близких по времени векторов (б) для системы Маккея–Гласса в хаотическом режиме.

где δ — некоторая малая величина. Графики $D(m)$, построенные при таком способе нахождения ближайших соседних векторов, очень похожи на графики, представленные на рис. 1. Подобрать параметры k и δ соответствующим образом, можно добиться практически полного совпадения результатов поиска ближайших соседей обоими способами.

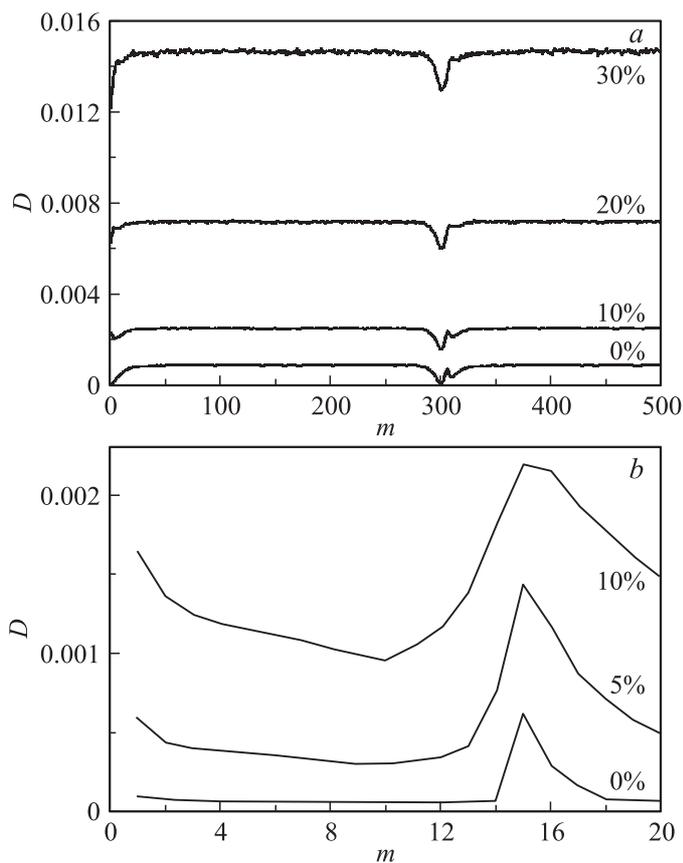


Рис. 2. Зависимости $D(m)$ для системы Маккея–Гласса в хаотическом режиме при различных уровнях измерительного шума (*a*) и в периодическом режиме при различных уровнях динамического шума (*b*). Уровни шума указаны в % на соответствующих кривых.

Кроме того, нами установлено, что выбор метрики для поиска ближайших векторов почти не влияет на вид зависимостей $D(m)$.

Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (8) гауссовского белого шума с нулевым средним значением.

Полученные результаты представлены на рис. 2, *a* для различных уровней измерительного шума при $k = 10$ и $l = 10$. Положение минимума $D(m)$ позволяет точно восстановить время запаздывания даже при уровнях шума порядка 30% (отношение сигнал/шум равно 10 dB), что в несколько раз превышает уровень шума, допустимый для применения других методов восстановления времени запаздывания. По отношению к динамическому шуму предложенный нами метод оказывается еще более устойчивым.

Рассмотрим случай, когда система (8) совершает периодические колебания ($a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$, $\tau = 10$). При построении зависимостей $D(m)$ будем считать ближайшими соседями векторы, для которых $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) < 0.02$. В отсутствие шума на графике $D(m)$ нет выраженного минимума (рис. 2, *b*). Однако добавление динамического шума оказывается полезным для восстановления времени запаздывания. При 10%-м шуме на графике $D(m)$ появляется отчетливый минимум при $m = d = 10$ (рис. 2, *b*). Присутствие измерительного шума, разумеется, не оказывает положительного влияния на определение времени запаздывания.

Итак, нами предложен новый метод восстановления времени запаздывания систем первого порядка с одним временем задержки по их временным рядам, основанный на применении метода ближайших соседей. Параметры метода могут быть выбраны в широких пределах, а сам метод остается эффективным при очень высоких уровнях шума. Предложенный метод может быть легко развит на системы высокого порядка с задержкой и на системы с несколькими временами запаздывания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-02-00227.

Список литературы

- [1] Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [2] Tian Y.-C., Gao F. // Physica D. 1997. V. 108. P. 113–118.
- [3] Bünner M.J., Meyer T., Kittel A., Parisi J. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5083–5089.
- [4] Voss H., Kurths J. // Phys. Lett. 1997. V. 234. P. 336–344.

- [5] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П. // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527. [Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Bezruchko B.P. // JETP. 2005. V. 100. N 3. P. 457–467.]
- [6] Horbelt W., Timmer J., Voss H.U. // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513–521.
- [7] Dai C., Chen W., Li L. et al. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. P. 036 203.
- [8] Zunino L., Soriano M.C., Fischer I. et al. // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 046 212.
- [9] Ma H., Xu B., Lin W., Feng J. // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 066 210.
- [10] Ortin S., Gutierrez J.M., Pesquera L., Vasquez H. // Physica A. 2005. V. 351. P. 133–141.
- [11] Siefert M. // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 026 215.
- [12] Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 066 207.
- [13] Yu D., Frasca M., Liu F. // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 046 209.
- [14] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 22. С. 71–78. [Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // Techn. Phys. Lett. 2009. V. 35. N 11. P. 1058–1061.]
- [15] Farmer J.D., Sidorowich J.J. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 845–848.
- [16] García P., Jiménez J., Marcano A., Moleiro F. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1449–1452.