



УДВОЕНИЯ И РАЗРУШЕНИЕ ТРЕХЧАСТОТНЫХ ТОРОВ В НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: ЭКСПЕРИМЕНТ

А. П. Кузнецов, Е. С. Попова, Е. П. Селезнев, Н. В. Станкевич

В работе с помощью методики «кратного» сечения Пуанкаре экспериментально исследован нелинейный контур с внешним воздействием в виде суммы трех гармонических составляющих с иррациональными значениями частот. Построены экспериментальные карты динамических режимов на плоскостях параметров амплитуд внешнего воздействия. Изучены особенности разрушения трехчастотного тора, его удвоения.

Ключевые слова: Квазипериодические колебания, инвариантные торы, удвоение тора.

Введение

Квазипериодические колебания являются интересным примером нетривиальных типов динамики и привлекают внимание физиков-исследователей благодаря своей распространенности в системах различной природы [1–15]. Квазипериодические колебания можно классифицировать по числу независимых несоизмеримых частот. В фазовом пространстве образами квазипериодических колебаний являются инвариантные торы, при этом размерность тора равна числу неизмеримых частот [4]. Удобным подходом к исследованию квазипериодических колебательных режимов является анализ моделей в виде неавтономных систем, возбуждаемых внешней силой в виде суммы двух и более гармонических сигналов с несоизмеримыми частотами. В таких системах значения частот выступают как независимые параметры, задаваемые исследователем, что создает возможность для более свободного обращения с моделью и анализа возникающих режимов динамики. Известно, что для таких систем типичным объектом фазового пространства является странный нехаотический аттрактор [9–14]. При этом возникновению странных нехаотических аттракторов часто предшествуют удвоения тора.

Наиболее часто изучение различных аспектов данного круга вопросов проводится на примере двумерного отображения с внешним воздействием. Так, в работе [15] исследовалась проблема разрушения трехмерных торов на примере двух свя-

занных логистических отображений, возбуждаемых внешним сигналом. В [16] обсуждалась картина режимов в неавтономной системе Эно и т.д. Возможен и другой подход, когда исследуется более простая модель, но с двухчастотным воздействием. В работе [17] проведено исследование квадратичного отображения с двумя внешними воздействиями, была обнаружена возможность существования трехчастотного тора, его удвоение, изучены особенности перехода к хаосу через разрушение трехчастотного тора, а также изучена устойчивость данного типа колебаний к шумам.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование динамики нелинейного контура с внешним воздействием в виде суммы трех гармонических составляющих с иррациональным соотношением частот, построение карт динамических режимов на плоскости параметров внешнего воздействия, изучение бифуркаций трехмерного тора и особенностей перехода к хаосу. Для этого реализована экспериментальная методика построения кратных сечений Пуанкаре.

Объект и метод экспериментального исследования

Объект исследований представляет собой нелинейный колебательный контур *RLD* (рис. 1), возбуждаемый сигналом, представляющим сумму трех гармонических составляющих $A_1 \sin \omega_1 t$, $A_2 \sin \omega_2 t$ и $A_3 \sin \omega_3 t$. Характер колебаний анализировался по проекции фазового портрета на плоскость $A_0 \sin \omega_2 t, i$, где i – сила тока диода. Значения частот воздействия заданы следующим образом: ω_1 выбиралась близкой частоте линейного резонанса колебательного контура и равнялась 51 кГц, $\omega_2 = k_2 \omega_1$, $\omega_3 = k_3 \omega_1$, где k_2 и k_3 – иррациональные числа, которые выбирались как решения минимальных многочленов второй и третьей степени: $k_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $k_3 = 1.324718\dots$ [17]. При $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и $A_3 \neq 0$ в исследуемой системе существует трехмерный тор.

Отдельно обсудим методику экспериментального изучения многочастотных торов. Наиболее распространенным методом изучения квазипериодических колебаний высокой размерности в эксперименте является анализ спектра Фурье. Так, например, в работе [18] на основе анализа спектра Фурье предложена схема, позволяющая различать на построенных в автоматическом режиме плоскостях параметров различные виды динамики системы, включая двух- и трехчастотные квазипериодические колебания. При увеличении в системе количества частотных компонент различить многочастотные квазипериодические колебания в эксперименте достаточно сложно [19]. В недавней работе [20] была предложена экспериментальная методика визуализации инвариантной кривой в «кратном» сечении Пуанкаре. Основная идея методики заключается в использовании схемы совпадений (рис. 1), которая позволяет сделать выборку нескольких значений переменных в определенный момент времени. В нашем эксперименте этот момент соответствует достижению внешней гармонической силой определенной фазы, по достижении которой формируется стробирующий импульс. В случае с трехмерным тором необходимым условием является одновременное достижение двумя гармоническими составляющими внешней силы некоторых заданных фаз воздействия. Для реализации этого условия в эксперименте используется схема совпадений (подробное устройство схемы приведено на рис. 2).

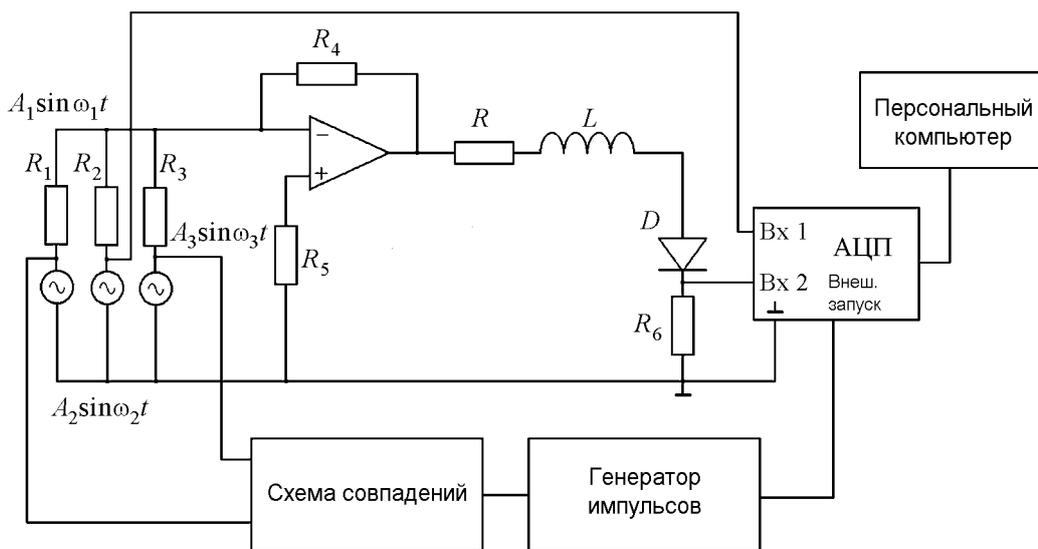


Рис. 1. Схема исследуемой системы, RLD -цепь с тремя гармоническими воздействиями

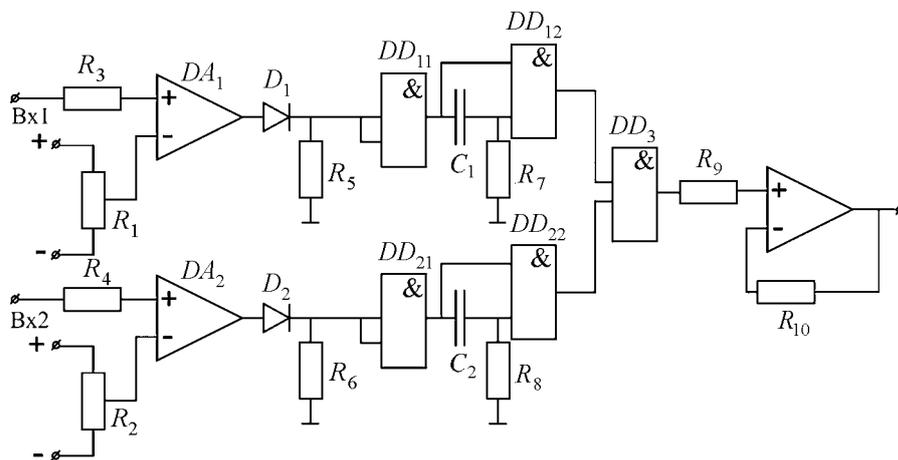


Рис. 2. Схема совпадений (см. рис. 1)

Схема совпадений представляет собой набор компараторов напряжения DA_1 – DA_2 , на входы которых поступают напряжения, соответствующие различным динамическим переменным. Потенциометрами R_1 – R_2 устанавливаются пороги срабатывания компараторов. Пока значение динамической переменной не превышает порогового значения, напряжение на выходе компаратора равно $-E_{пит}$. В момент достижения динамической переменной порогового значения компаратор переключается в состояние, когда напряжение на выходе равно $+E_{пит}$. Положительный перепад напряжения поступает на вход логического элемента DD_{11} – DD_{21} , который используется в качестве развязывающего элемента. RC - цепи R_7C_1 – R_8C_2 и логические элементы DD_{12} – DD_{22} представляют собой формирователи коротких импульсов, длительность которых значительно меньше наименьшего из периодов гармонических составляющих внешнего воздействия. Таким образом, часть схемы, включающая элементы DA_1 – DA_2 , R_1 – R_2 , DD_{11} – DD_{21} , R_7C_1 – R_8C_2 и DD_{12} – DD_{22} обес-

печивает формирование коротких импульсов в момент, когда динамические переменные достигают заданных значений. Фиксация момента, когда данные события происходят одновременно, обеспечивается логическим элементом DD_3 . В момент достижения всеми динамическими переменными пороговых значений на все входы DD_3 поступают прямоугольные импульсы (логические единицы), соответственно, на его выходе появляется импульс. Этот импульс используется в качестве сигнала внешней подсветки луча осциллографа. Подбором яркости изображения на экране осциллографа формируется аттрактор системы в многомерном сечении Пуанкаре. Следует отметить, что вероятность события, когда две динамические переменные достигают некоторого заданного значения, сравнительно мала. Это приводит к тому, что на экране осциллографа сечение Пуанкаре выглядит не ярко по отношению к проекции фазового портрета. В этом случае более удобно использовать персональный компьютер с устройством ввода-вывода аналоговых сигналов. В эксперименте использовался персональный компьютер с устройством ввода-вывода NI USB-6211 (см. рис. 1).

Результаты экспериментального исследования

Теперь перейдем непосредственно к результатам экспериментального исследования предложенной схемы. На рис. 3 представлена экспериментальная карта динамических режимов на плоскости параметров A_1, A_2 при фиксированном значении параметра $A_3 = 0.15$ В. Различными тонами отмечены области существования различных режимов колебаний: ТЗ соответствует трехмерному тору, 2ТЗ – удвоенному трехмерному тору, наиболее темная область соответствует хаотическим колебаниям, крестиками обозначены терминальные точки TDT [11,13], в которых заканчиваются линии удвоения торов.

На рис. 4 приведены примеры аттракторов в двумерном сечении Пуанкаре в проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ (где $\sin(2\pi f_1)$ отражает фазу соответствующей гармоники воздействия, i – сила тока диода), а также спектры мощности колебаний в соответствующих точках плоскости A_1, A_2 (см.рис.3). Использование проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ объясняется тем, что фактически фазовый портрет отражает зависимость поведения динамической переменной от фазы внешнего воздействия. В случае гладкой замкнутой кривой можно говорить об устойчивости движений, появление изломов и размытий на фазовом портрете говорит о появлении локальной неустойчивости и в целом о наличии фазозависимой динамики [11–14].

Рис. 4, а (точка 1 на рис.3) соответствует гладкому трехмерному тору. Некоторое «размытие» аттрактора в сечении Пуанкаре обусловлено конечным интервалом времени совпадения, которое не превышает удвоенной длительности импульсов в схеме совпадения. В нашем эксперименте этот интервал не превышал 0.3 мкс. Рис. 4, б и в (точки 2 и 5) соответствуют удвоенным трехмер-

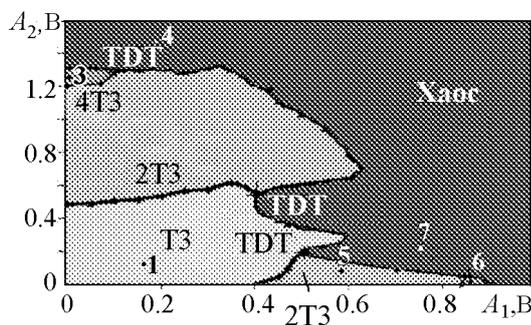


Рис. 3. Экспериментальная карта динамических режимов на плоскости параметров воздействия A_1, A_2 при $A_3 = 0.15$ В

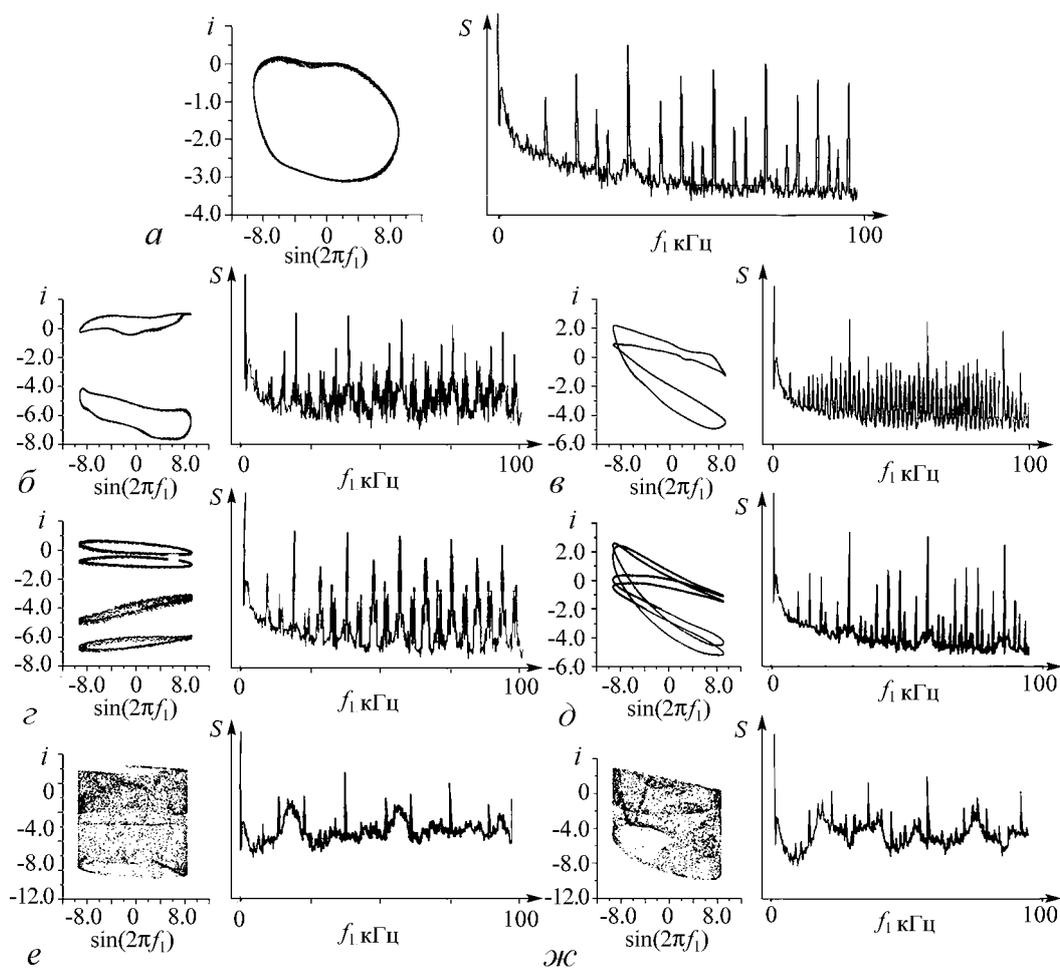


Рис. 4. Аттракторы в двумерном сечении Пуанкаре и спектры мощности колебаний в отмеченных точках плоскости A_1, A_2 (см. рис. 3)

ным торами. Различия в форме инвариантной кривой объясняются выбором проекции фазового портрета. Динамические режимы, представленные на рис. 4, z и d (точки 3 и 6 на рис. 3) соответствуют учетверенным торами – в двумерном сечении Пуанкаре наблюдается либо четыре инвариантные кривые (см. рис. 4, z), либо «сложенная» вчетверо инвариантная кривая (см. рис. 4, d). Рис. 4, e и $ж$ (точки 5 и 7) иллюстрируют хаотические колебания.

Бифуркации удвоения двумерного тора достаточно часто наблюдаются в различных динамических системах с квазипериодической динамикой [11–14,21]. Особенностью удвоения двумерного тора является то, что обычно наблюдается конечное число удвоений, а затем инвариантная кривая теряет гладкость и происходит переход к хаосу через потерю гладкости инвариантной кривой [2,4,6,7,10]. Для нашей системы происходят аналогичные перестроения, но для трехчастотного тора. Мы наблюдаем две бифуркации удвоения трехчастотного тора, а затем на аттракторе в сечении Пуанкаре появляются локальные «размытия», что говорит о формировании локальной неустойчивости. Можно предположить, что в данном случае наблюдается странный нехаотический аттрактор, однако строгое обоснование этого факта требует дополнительных исследований.

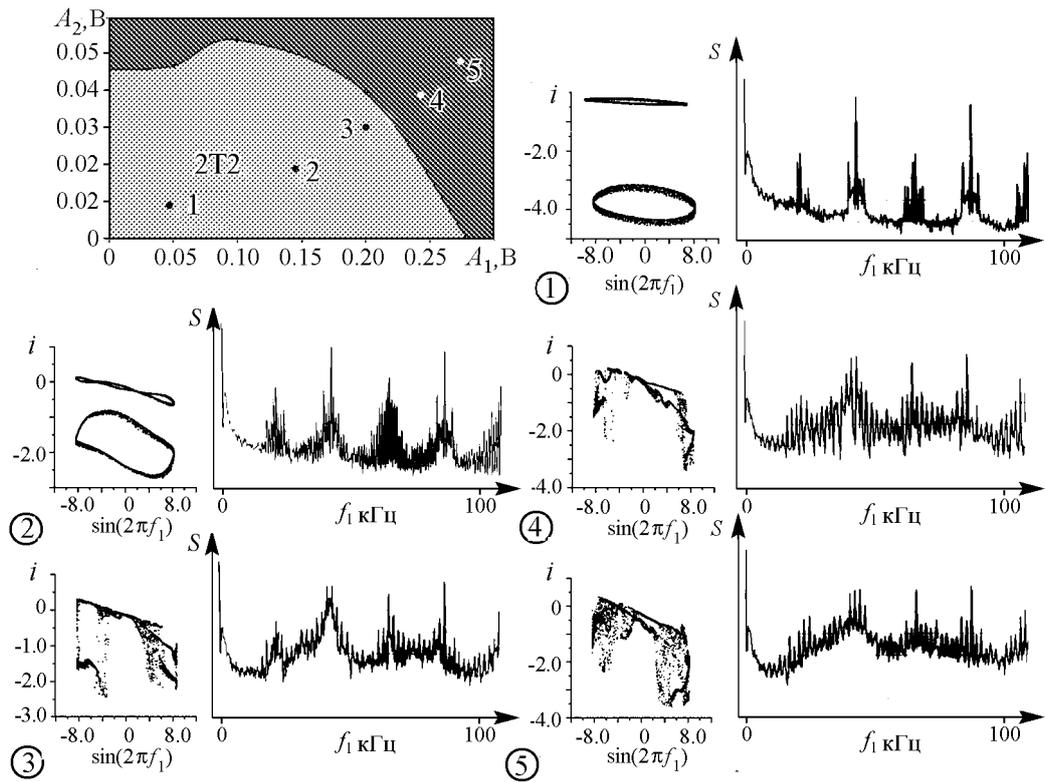


Рис. 5. Структура плоскости параметров воздействия A_1, A_2 при $A_3 = 0.5$ В, аттракторы в двумерном сечении Пуанкаре и спектры мощности колебаний в отмеченных точках плоскости

На рис. 5 представлены карта динамических режимов на плоскости параметров A_1, A_2 при фиксированном значении параметра $A_3 = 0.5$ В, аттракторов в двумерном сечении Пуанкаре в проекции на плоскость $\sin(2\pi f_1), i$ (где $\sin(2\pi f_1)$ отражает фазу соответствующей гармоники воздействия, i – сила тока диода), а также спектры мощности колебаний в соответствующих точках плоскости A_1, A_2 ; система обозначений аналогична рис. 3. При малых значениях A_1 и A_2 в динамике системы наблюдается удвоенный трехмерный тор (фрагмент 1 на рис. 5). С ростом управляющих параметров в спектре мощности колебаний заметным образом увеличиваются амплитуды комбинационных гармоник (фрагмент 2 на рис. 5). Вблизи границы перехода порядок хаос на аттракторе в сечении Пуанкаре появляются области локальной неустойчивости, а спектр мощности значительно обогащается комбинационными гармониками (фрагмент 3 на рис. 5). В области хаоса аттрактор в сечении Пуанкаре размывается, в спектре мощности наблюдается подъем шумового пьедестала (фрагменты 4 и 5 на рис. 5). Описанная картина имеет некоторые черты, характерные для сценария Ландау–Хопфа.

Заключение

В результате проведенной работы предложена и апробирована на примере неавтономного нелинейного осциллятора с трехчастотным воздействием методика наблюдения многомерных торов и построения «кратного» сечения Пуанкаре. Экспериментально исследована динамика нелинейного осциллятора при трехчастотном

воздействии с иррациональным соотношением частот гармонических составляющих воздействия, изучены карты динамических режимов, обнаружена возможность удвоений трехчастотного тора и его разрушения.

Е.П.Селезнев отмечает поддержку гранта РФФИ 11-02-00599, А.П. Кузнецов и Е.С. Попова – гранта РФФИ 11-02-91334-ННАО, Н.В. Станкевич – гранта РФФИ 12-02-31465).

Библиографический список

1. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. 620 с.
3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.
4. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. 144 с.
5. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339.
6. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167.
7. *Vitolo R., Broer H., Simo C.* Routes to chaos in the Hopf-saddle-node bifurcation for fixed points of 3D-diffeomorphisms // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 1919.
8. *Vitolo R.* Bifurcations of attractors in 3D diffeomorphisms: A study in experimental mathematics. PhD thesis, 2003.
<http://dissertations.ub.rug.nl/faculties/science/2003/r.vitolo/?pLanguage=en&pFullItemRecord=ON>
9. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // Physica D. 1984. Vol. 13, № 1, 2. P. 261.
10. *Kuznetsov A.P., Stankevich N.V.* A simple autonomous quasiperiodic self-oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15. P. 1676.
11. *Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У.* Странный нехаотический аттрактор // В кн.: Нелинейные волны'2004/ Под ред. А.В. Гапонова-Грехова и В.И. Некоркина. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484.
12. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У., Селезнев Е.П.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
13. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev E.P.* Experimental observation of dynamics near the torus-doubling terminal critical point // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 6. P. 7828.
14. *Селезнев Е.П., Захаревич А.М.* Структура пространства управляющих параметров нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 6. С. 17.
15. *Anishchenko V.S., Safonova M.A., Feudel U., Kurths J.* Bifurcation and transition to chaos through three-dimensional tori // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1994 Vol. 4, № 3. P. 595.

16. *Попова Е.С.* Влияние флуктуаций на эволюцию трехмерного тора в неавтономной системе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 2. С. 98.
17. *Kim S.* Simultaneous rational approximations in the study of dynamical systems / S. Kim, S. Ostlund // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 4. P. 3426.
18. *Linsay P.S., Cumming A.W.* Three-frequency quasiperiodicity, phase locking and the onset of chaos // Physica D. 1989. Vol. 40. P. 196.
19. *Moon F.C., Holmes W.T.* Double Poincaré sections of a quasi-periodically forced, chaotic attractor // Physics Letters A. 1985. Vol. 111. Issue 4. P. 157.
20. *Кузнецов А.П., Попова Е.С., Селезнев Е.П., Станкевич Н.В.* Методика диагностики многочастотных торов в эксперименте // Вестник СГТУ. 2013. № 1.
21. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // Письма в ЖТФ. 2005. Том 31. С. 884.

СГУ им. Н.Г. Чернышевского

СГТУ им. Ю.А. Гагарина

СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

Поступила в редакцию

После доработки

23.04.2013

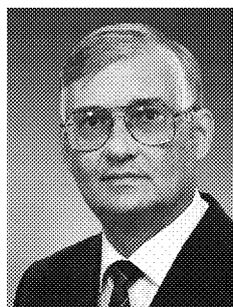
16.07.2013

DOUBLING AND DESTRUCTION OF THE TRI-FREQUENCIES TORUS IN THE NONLINEAR OSCILLATOR UNDER QUASI-PERIODIC EXCITATION: EXPERIMENT

A. P. Kuznetsov, E. S. Popova, E. P. Seleznev, N. V. Stankevich

In present paper nonlinear oscillator driving by external force in a form of three harmonic signals with irrational ratios of the frequencies and the map of various dynamical regimes on the parameter plane are presented. The feature of tri-frequencies torus doubling and destruction are investigated.

Keywords: Quasi-periodic oscillations, invariant tori, doubling of torus.

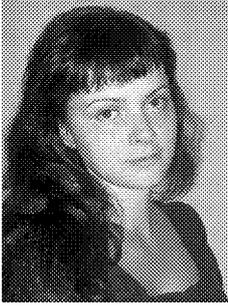


Кузнецов Александр Петрович – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского государственного университета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СФ ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Лауреат гранта Президента Российской Федерации для молодых российских ученых – докторов наук. Лауреат персонального гранта Фонда содействия отечественной науки. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика». Опубликовал более 100 научных работ. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и Лицея прикладных наук СГУ, 10 учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002).

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: apkuz@rambler.ru



Попова Елена Сергеевна – родилась в Саратове (1986), окончила факультет нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2008). Аспирант факультета нано- и биомедицинских технологий по специальности «радиофизика». Занимается исследованием специфики моделирования и анализа неавтономных систем. Имеет 5 публикаций по этой тематике. Участница трех конференций «Нелинейные дни в Саратове для молодых», VIII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур – 2007», III конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика – 2008», Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем – 2008», Международной школы-семинара «StatInfo-2009».

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: LenochkaFNP@yandex.ru



Станкевич Наталья Владимировна – родилась в 1985 году, окончила с красным дипломом факультет нелинейных процессов СГУ им. Н.Г. Чернышевского (2007). В 2011 году под руководством проф., д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В настоящее время – доцент кафедры «Радиотехника и телекоммуникации» СГТУ им. Ю.А. Гагарина. Занимается исследованием особенностей синхронизации короткими импульсами в многомерных автоколебательных системах. Автор более 30 публикаций, в том числе 15 статей в российских и зарубежных журналах. В 2009 году получила поддержку Германской службы академических обменов (DAAD) и совершила визит в научную группу Аркадия Пиковского (г. Потсдам).

410054 Саратов, ул. Политехническая, 77
Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина
E-mail: stankevichnv@mail.ru