

УДК 530.18+519.23

ВЫЯВЛЕНИЕ ВЗАИМНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ

Д. А. Смирнов, Б. П. Безручко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН,
г. Саратов, Россия

В различных областях физических исследований часто возникает вопрос о том, как по наблюдаемому временному ряду отличить двунаправленную связь между колебательными системами от однонаправленной, т. е. взаимное воздействие от одностороннего. В данной работе показано, что широко используемый подход, основанный на расчёте ошибок прогноза эмпирических моделей (причинности по Грейнджеру), может давать ложные выводы о двунаправленной связи, если интервал выборки превышает некоторый собственный временной масштаб исследуемых систем. На основе учёта этого эффекта предложен и проиллюстрирован на эталонных примерах статистический тест, позволяющий распознать двунаправленную связь с заданной доверительной вероятностью.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость количественной оценки «направленных связей» между колебательными системами (воздействий систем друг на друга) по временным рядам — дискретным последовательностям значений наблюдаемых величин — возникает в различных областях исследований, включая радиофизику [1], системы передачи информации [2], механику [3], геофизику [4–6] и биофизику [7–10]. Подходы к решению этой задачи часто опираются на математический аппарат статистической радиофизики и тестируются на соответствующих эталонных моделях [11–14]. При этом в ряде постановок фундаментально важен вопрос о том, является ли связь одно- или двунаправленной [4, 9, 10]. Для получения ответов на него оказалось полезным понятие «причинности по Грейнджеру», предложенное в эконометрике [15, 16] и становящееся всё более популярным в физических науках [4–7].

Говорят, что имеет место влияние системы Y на систему X «по Грейнджеру», если прогноз будущего поведения X улучшается при учёте данных об Y по сравнению с прогнозом, основанным только на данных об X . Ненулевое улучшение прогноза ассоциируют с наличием физического воздействия Y на X , а ненулевые улучшения прогноза в обе стороны обычно интерпретируются как признак двунаправленной связи. Прогноз осуществляется по наблюдаемым значениям X и Y , которые разделены во времени интервалом выборки Δt , определяемым процедурой измерений, например, частотой дискретизации аналого-цифрового преобразователя. При этом в физических исследованиях обычно не принимают во внимание сложную зависимость улучшения прогноза от Δt , тогда как в работах [17–19] по математической статистике отмечено, что при достаточно редкой выборке (большом Δt) могут наблюдаться ненулевые улучшения прогноза в обе стороны и в случае однонаправленно связанных систем. Это принципиальное обстоятельство остаётся неизвестным широкому кругу исследователей, по-видимому, из-за отсутствия количественных оценок возможных улучшений прогноза в ложном направлении. Но недооценка этого эффекта на практике может вести к ошибочным выводам о двунаправленной связи.

В данной работе представлен количественный анализ эффекта ложных связей из-за редкой выборки (раздел 2), и на примере эталонных колебательных систем с однонаправленной связью демонстрируется типичность больших значений улучшения прогноза в ложном направлении, иногда даже превосходящих улучшение прогноза в направлении реального воздействия. На основе

учёта этого эффекта предложен статистический тест для различения однонаправленной и двунаправленной связи (раздел 3), работоспособность которого проиллюстрирована на эталонных осцилляторах (раздел 4). В разделе 5 обсуждается степень общности предложенного подхода, а в начале всего изложения (раздел 1) вводится формальное определение причинности по Грейнджеру, смысл которой был кратко пояснён выше.

1. ПРИЧИННОСТЬ ПО ГРЕЙНДЖЕРУ

Пусть $X(t), Y(t)$ — двумерный случайный процесс, и его значения наблюдаются в дискретные моменты времени с интервалом выборки Δt : $x_n = X(n \Delta t)$, $y_n = Y(n \Delta t)$, где n — целое число. Обозначим $x_n^- = \{x_{n-k}\}_{k=1}^\infty$ и $y_n^- = \{y_{n-k}\}_{k=1}^\infty$ — последовательности значений x_n и y_n , предшествующих n -му моменту наблюдения. Из всех способов индивидуального (без учёта Y) прогноза x_n наименьший средний квадрат ошибки обеспечивается при использовании формулы $x_n^{\text{ind}} = M[x_n | x_n^-]$, где $M[x_n | x_n^-]$ — условное математическое ожидание x_n при заданном x_n^- . Обозначим этот средний квадрат $\sigma_{x,\text{ind}}^2 = M[(x_n - x_n^{\text{ind}})^2]$. Наилучший совместный (с учётом Y) прогноз $x_n^{\text{joint}} = M[x_n | x_n^-, y_n^-]$ даёт ошибку $\sigma_{x,\text{joint}}^2 = M[(x_n - x_n^{\text{joint}})^2]$. Нормированная величина улучшения прогноза $G_{y \rightarrow x} = (\sigma_{x,\text{ind}}^2 - \sigma_{x,\text{joint}}^2) / \sigma_{x,\text{ind}}^2$ характеризует причинность (влияние) по Грейнджеру в направлении $Y \rightarrow X$ [16]. Она может принимать значения от 0 до 1. Аналогично определяется влияние $X \rightarrow Y$.

Эта идея была впервые реализована [15] для стационарных гауссовских процессов (x_n, y_n) . Было использовано то обстоятельство, что такой процесс единственным образом описывается двумерным линейным уравнением авторегрессии вида

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{x,k} x_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{x,k} y_{n-k} + \xi_n; \quad y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{y,k} y_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{y,k} x_{n-k} + \psi_n, \quad (1)$$

где (ξ_n, ψ_n) — двумерный гауссовский белый шум с нулевым средним, дисперсиями $\sigma_\xi^2, \sigma_\psi^2$ и ковариацией $M[\xi_n \psi_n] = \gamma$. Условие, что шум «белый», эквивалентно условию минимальной ошибки прогноза [20], так что имеют место равенства $\sigma_\xi^2 = \sigma_{x,\text{joint}}^2$ и $\sigma_\psi^2 = \sigma_{y,\text{joint}}^2$. Далее, процесс x_n подчиняется и одномерному уравнению авторегрессии, т. е. первому уравнению (1) с нулевыми $b_{x,k}$ и белым шумом ξ'_n , дисперсия которого $\sigma_{\xi'}^2 = \sigma_{x,\text{ind}}^2$. Теперь по дисперсиям шумов $\sigma_\xi^2, \sigma_{\xi'}^2$ определяется величина $G_{y \rightarrow x}$. Всё аналогично для $G_{x \rightarrow y}$.

Чтобы оценить теоретические величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ по конечному временному ряду $\{x_n, y_n\}_{n=1}^N$, все суммы в уравнениях (1) ограничивают p -м членом (вместо ∞) и оценивают коэффициенты и дисперсии шумов в авторегрессионных моделях порядка p с помощью стандартного метода наименьших квадратов. Ниже в численных экспериментах длина ряда N велика, так что величина p выбирается просто настолько большой, чтобы результаты оценивания перестали меняться с её дальнейшим увеличением ($p = 10$ оказалось достаточным, чтобы относительное изменение $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ с ростом p было не более 0,001). Статистическая значимость отличия оценок $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ от нуля проверяется с помощью F -теста Фишера [21].

Уравнения (1) при любом Δt — это возможное представление исходной системы $X(t), Y(t)$, верно отражающее свойства её временных реализаций с шагом выборки Δt . Но при этом важен вопрос: как величины $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ зависят от Δt ? Если нет реального воздействия $Y \rightarrow X$, то естественно было бы ожидать $G_{y \rightarrow x} = 0$ при любом Δt или, по меньшей мере, $G_{y \rightarrow x} \ll 1$ и $G_{y \rightarrow x} < G_{x \rightarrow y}$. Однако ниже показано, что эти ожидания не оправдываются и, более того, относительная мера «ложной связи» $r = G_{y \rightarrow x} / G_{x \rightarrow y}$ может существенно превышать единицу.

2. ЭФФЕКТ РЕДКОЙ ВЫБОРКИ

Рассмотрим одну из наиболее широко используемых моделей колебаний — линейные диссипативные осцилляторы, задаваемые стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{X}(t) + \alpha_X \dot{X}(t) + \omega_X^2 X(t) = \Xi(t); \quad \ddot{Y}(t) + \alpha_Y \dot{Y}(t) + \omega_Y^2 Y(t) = \Psi(t) + kX(t), \quad (2)$$

где $\Xi(t)$ и $\Psi(t)$ — независимые гауссовские белые шумы с автоковариационными функциями $M[\Xi(t)\Xi(t')] = \sigma_\Xi^2 \delta(t-t')$ и $M[\Psi(t)\Psi(t')] = \sigma_\Psi^2 \delta(t-t')$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, k — коэффициент связи (однаправленной связи $X \rightarrow Y$), α_X и α_Y — параметры диссипации (определяют ширину пиков в спектрах мощности процессов X и Y), ω_X и ω_Y определяют характерные частоты колебаний. Обозначим $T_X = 2\pi/\omega_X$ и $T_Y = 2\pi/\omega_Y$.

Рисунок 1 представляет оценки улучшения прогноза по временным рядам, полученным путём интегрирования уравнений (2) при $\omega_X = \omega_Y = 1$, $\alpha_X = \alpha_Y = 0,3$, $\sigma_\Xi = \sigma_\Psi = 0,3$, $k = 0,3$ с помощью явной схемы Эйлера [22] с шагом $h = 0,006$. При дальнейшем уменьшении h результаты не менялись. Улучшение прогноза оценивалось по рядам достаточно большой длины $N = 10^5$, чтобы статистические флуктуации были малы. Наиболее важный результат состоит в том, что величина $G_{y \rightarrow x}$ оказывается ненулевой («ложная связь») при недостаточно малых Δt (рис. 1а). Она начинает значимо отличаться от нуля (на уровне 0,05 согласно F -тесту) при $\Delta t = 1,08$ и достигает максимума при $\Delta t = 3,9$. При этом и величина r становится близка к единице (рис. 1б). Это и есть эффект редкой выборки, который оказывается весьма значителен. При малых Δt величина $G_{y \rightarrow x}$ мала и незначительно отличается от нуля согласно F -тесту. При этом мала и величина r , но её предельное поведение при $\Delta t \rightarrow 0$ не исследовалось: рост r при совсем малых Δt на рис. 1б может быть связан со статистическими погрешностями оценки знаменателя $G_{x \rightarrow y}$, который также становится малым. Тот факт, что малые улучшения прогноза имеют место при Δt , кратном половине характерного периода колебаний (рис. 1а, б), объяснён ниже на более наглядном примере с дискретным временем.

Положительные $G_{y \rightarrow x}$ и r наблюдаются в широких диапазонах значений параметров системы (2), как показано на рис. 2 для $\Delta t = 2,4$, что соответствует первому заметному локальному максимуму на рис. 1а. На каждом графике меняется один из параметров, а все остальные имеют значения, указанные выше. При малых шумах σ_Ψ^2 в ведомой системе и $G_{y \rightarrow x}$, и r оказываются велики ($G_{y \rightarrow x} > 0,06$, $r > 0,1$, см. рис. 2а, б). Относительная мера «ложной связи» r превышает единицу при $T_X < 2$ (рис. 2е) или $T_Y = 4$ (рис. 2з). Однако r столь велика только для

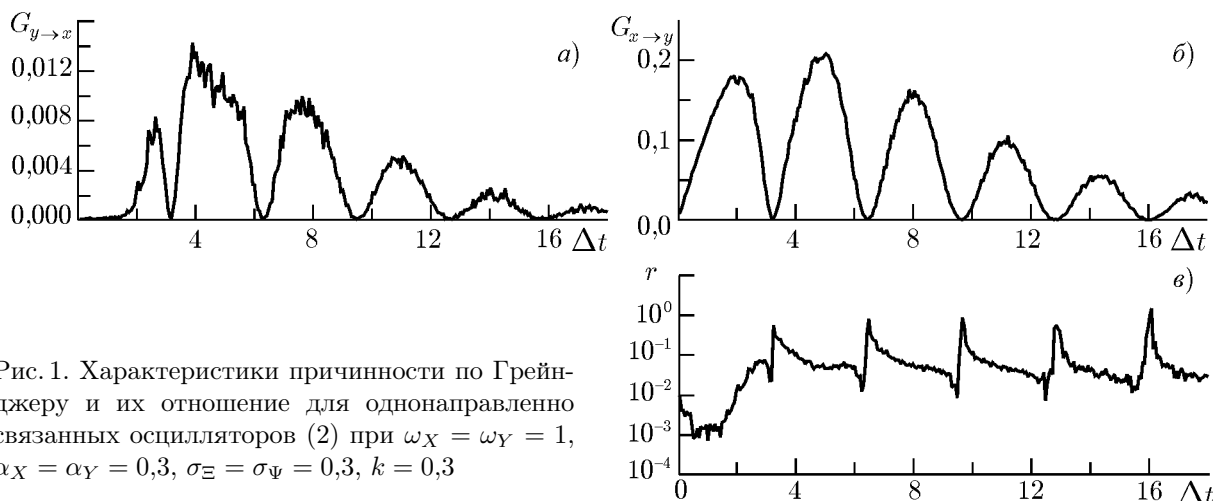


Рис. 1. Характеристики причинности по Грейнджеру и их отношение для однонаправленно связанных осцилляторов (2) при $\omega_X = \omega_Y = 1$, $\alpha_X = \alpha_Y = 0,3$, $\sigma_\Xi = \sigma_\Psi = 0,3$, $k = 0,3$

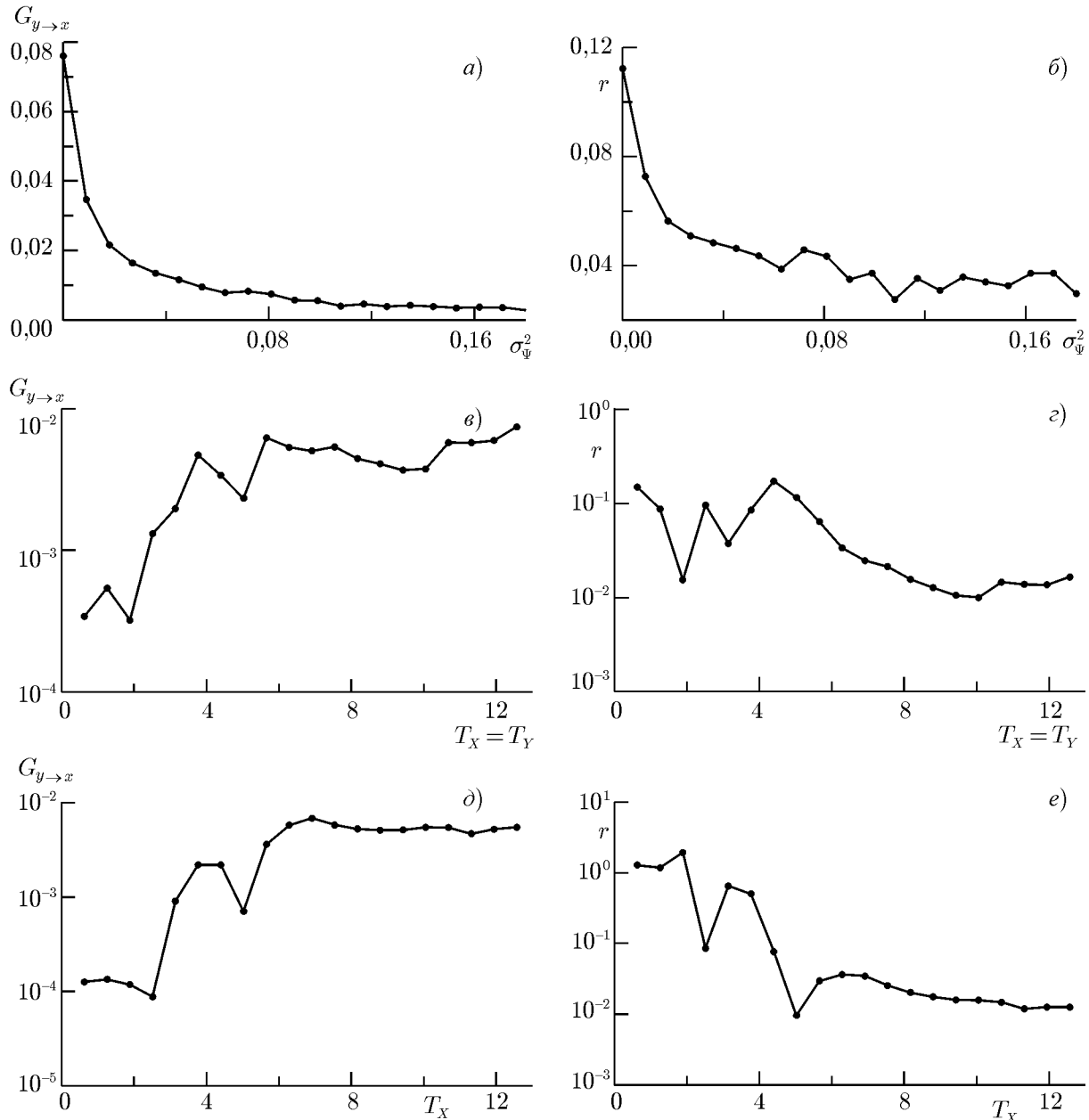


Рис. 2. Характеристика причинности по Грейнджеру, соответствующая «ложной связи», и её относительная величина r для осцилляторов (2) в зависимости от указанных на осях абсцисс параметров при фиксированных значениях всех прочих из набора $\omega_X = \omega_Y = 1$, $\alpha_X = \alpha_Y = 0,3$, $\sigma_\Xi = \sigma_\Psi = 0,3$, $k = 0,3$ и $\Delta t = 2,4$

неидентичных осцилляторов, тогда как для идентичных остаётся в пределах $r < 1$ (рис. 2в, г), хотя и $r \approx 0,1$ следует считать очень значительным проявлением эффекта ложной связи, т. к. это означает, что «нефизическое» улучшение прогноза составляет 10 % от «реального». Рисунки 2и–м показывают, что $G_{y \rightarrow x}$ и r по-разному зависят от двух параметров диссипации: уменьшаются с ростом α_X и растут с ростом α_Y . Эти зависимости объяснены ниже.

Для уточнения терминологии заметим здесь, что положительные «нефизические» значения $G_{y \rightarrow x}$ не являются ложными сами по себе, ведь улучшение прогноза действительно имеет место.

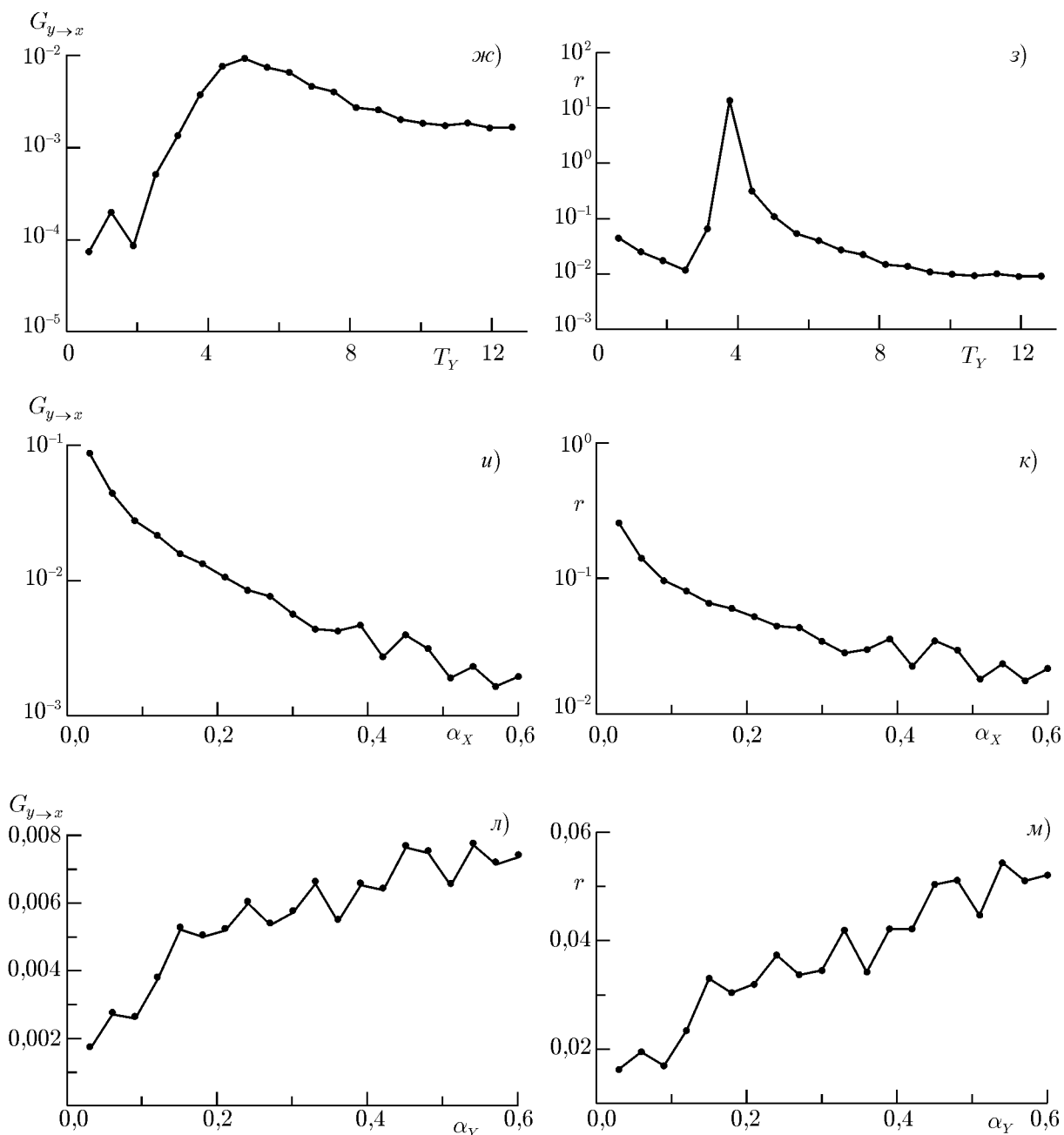


Рис. 2 (продолжение). Характеристика причинности по Грейнджеру, соответствующая «ложной связи»

Ошибочны лишь выводы о наличии воздействия $Y \rightarrow X$, сделанные из неравенства $G_{y \rightarrow x} > 0$. Поэтому мы не используем термин «ложные улучшения прогноза», а говорим о «ложных связях».

Для более наглядного объяснения эффекта редкой выборки рассмотрим стохастические линейные диссипативные осцилляторы с дискретным временем:

$$\begin{aligned} X(t) &= A_{X,1}X(t-1) + A_{X,2}X(t-2) + B_X Y(t-1) + \Xi(t); \\ Y(t) &= A_{Y,1}Y(t-1) + A_{Y,2}Y(t-2) + B_Y X(t-1) + \Psi(t), \end{aligned} \quad (3)$$

$\Xi(t)$ и $\Psi(t)$ — независимые гауссовские белые шумы с нулевым средним и дисперсиями σ_Ξ^2 и

σ_{Ψ}^2 , B_X и B_Y — коэффициенты связи, а собственный период колебаний осциллятора X (положение пика в спектре мощности) и его время релаксации (определяет ширину пика) даются выражениями $A_{X,1} = 2 \cos(2\pi/T_X) \exp(-1/\tau_X)$ и $A_{X,2} = -\exp(-2/\tau_X)$ [23]. Всё аналогично для осциллятора Y . Эта система является разностной моделью осцилляторов (2), но может быть и в точности реализована на практике с помощью электронных [24, 25] или оптических [26, 27] систем с запаздывающими обратными связями, где параметры связи B_X и B_Y могут представлять собой интенсивности реальных физических воздействий.

Было принято $T_X = T_Y = 5$, $\tau_X = \tau_Y = 4$, $\sigma_{\Xi}^2 = \sigma_{\Psi}^2 = 1$. Однонаправленная связь $X \rightarrow Y$ задавалась значениями $B_X = 0$ и $B_Y = 0,3$. Рисунок 3 показывает, что связь адекватно отражается величинами улучшений прогноза при $\Delta t = 1$: $G_{y \rightarrow x} = 0$ и $G_{x \rightarrow y} > 0$. Однако, с ростом Δt положительными становятся и значения $G_{y \rightarrow x}$ (эффект редкой выборки): $G_{y \rightarrow x}$ максимально при $\Delta t = 3$, где $r = 0,08$ достаточно велико, так что ложные связи вновь весьма заметны. С дальнейшим ростом Δt величины улучшений прогноза уменьшаются, а при $\Delta t \rightarrow \infty$ имеет место $G_{y \rightarrow x} = G_{x \rightarrow y} = 0$, т.к. зависимость между значениями x_n, y_n в сильно удалённые последовательные моменты времени пропадает, т.е. процесс (x_n, y_n) становится двумерным белым шумом (см. $\Delta t = 15$ на рис. 3а, б).

Для наглядного пояснения эффекта ложных связей при $\Delta t > 1$ заметим, что двумерный вектор $(X(t), X(t - 1))$ содержит полную информацию о распределении $X(t + l)$ при любом $l > 0$, т.е. X — марковский процесс второго порядка [20]. Другими словами, вектор $(X(t), X(t - 1))$ полностью определяет состояние процесса X в момент времени t , так что улучшение прогноза X при учёте Y отсутствует. При $\Delta t > 1$ прогноз на основе значений $\{X(t), X(t - \Delta t), X(t - 2\Delta t), \dots\}$ не является наилучшим возможным, т.к. значение $X(t - 1)$ не может быть в точности восстановлено по таким прореженным данным. Однако дополнительная информация об $X(t - 1)$ может быть получена по данным от Y за счёт корреляции между $X(t - 1)$ и наблюдаемыми значениями Y . Это и приводит к «нефизическому» положительному $G_{y \rightarrow x}$. Таким образом, источник «ложных связей» — это неполнота информации о состоянии ведущей системы в наблюдаемых данных.

Дополнительной иллюстрацией этого утверждения является «стробоскопический эффект» на рис. 3а, б. А именно, оба улучшения прогноза малы при $\Delta t = 5$. Причина этого состоит в том, что при $\Delta t = T_X = T_Y$ оба осциллятора представляют собой с высокой точностью авторегрессионные процессы первого порядка. Так, в рассматриваемом примере представление (1) при $\Delta t = 5$ даёт $a_{x,1} = 0,29$ и $|a_{x,k}| < 0,002$ для $k > 1$. Если же ведущая система — авторегрессионный процесс

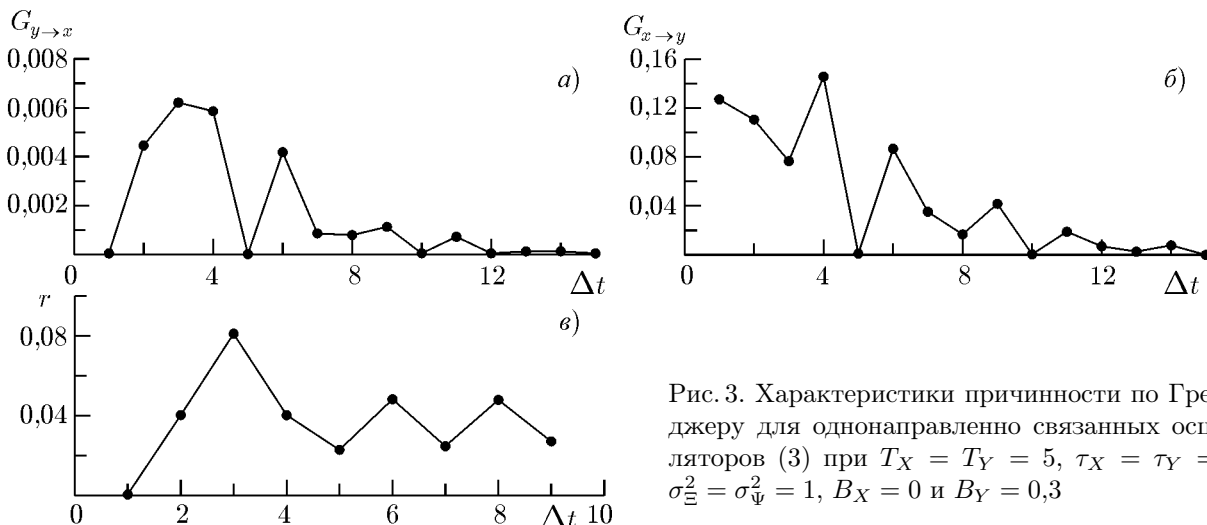


Рис. 3. Характеристики причинности по Грейнджеру для однонаправленно связанных осцилляторов (3) при $T_X = T_Y = 5$, $\tau_X = \tau_Y = 4$, $\sigma_{\Xi}^2 = \sigma_{\Psi}^2 = 1$, $B_X = 0$ и $B_Y = 0,3$

первого порядка, то ненулевое улучшение прогноза в его направлении невозможно, потому что его состояние — скаляр, и полностью определяется наблюдаемыми данными. Осцилляторы с непрерывным временем (2) демонстрируют на рис. 1а, б стробоскопический эффект, аналогичный рис. 3а, б, по той же причине: при Δt , кратных половине периода колебаний, они близки к авторегрессионным процессам первого порядка. Теоретическое отличие примера (2) от (3) состоит в том, что состояние системы X задаётся в (2) вектором $(X, dX/dt)$, а не последовательными значениями X , и не может быть точно восстановлено по ряду X при любом Δt . Значит, всегда есть и принципиальная возможность ненулевого $G_{y \rightarrow x}$. Однако, при малом Δt величина $G_{y \rightarrow x}$, если и положительна, то очень мала. Поэтому «ложные связи» практически наблюдаются только при не очень малом Δt , т. е. при редкой выборке.

Характер зависимости $G_{y \rightarrow x}$ и r от параметров (рис. 2) может быть объяснён теперь тем, как информация о состоянии X теряется при прореживании и потом частично восстанавливается при учёте Y . Так, большие $G_{y \rightarrow x}$ и r при малых σ_Y^2 (рис. 2а, б) имеют место потому, что по менее зашумлённым данным от Y лучше восстанавливается информация о состоянии X . Уменьшение $G_{y \rightarrow x}$ и r при уменьшении α_Y (диссипации в ведомой системе) на рис. 2и, к обусловлено тем, что прошлые состояния ведомой системы при этом сильнее влияют на её текущую динамику и «маскируют» корреляцию наблюдаемых значений Y со скрытыми значениями X , так что информация о состоянии X хуже восстанавливается по данным от Y .

Ненулевые $G_{y \rightarrow x}$ для осцилляторов (3) сохраняются в широких диапазонах значений параметров, полностью аналогично рис. 2 (графики не показаны). Отметим лишь, что описанный характер зависимости от параметров диссипации предполагает, что наибольшие значения $G_{y \rightarrow x}$ должны наблюдаться, если время релаксации ведущей системы сравнительно велико, а ведомой — мало. Действительно, оценки для системы (3) при $\tau_X = 10$, $\tau_Y = 1$, $T_X = T_Y = 5$, $B_X = 0$, $B_Y = 0,3$ и $\Delta t = 2$ дают $G_{y \rightarrow x} = 0,14$, что превышает все значения $G_{y \rightarrow x}$ на рис. 1–3.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ТЕСТ НА ДВУНАПРАВЛЕННУЮ СВЯЗЬ

Из изложенного выше следует, что при анализе временного ряда $\{x_n, y_n\}_{n=1}^N$ на практике нельзя с достоверностью сделать вывод о наличии двунаправленной связи, даже если обе оценки $G_{y \rightarrow x}$ и $G_{x \rightarrow y}$ статистически значимо отличны от нуля. Для такого вывода нужно провести специальную проверку «нулевой гипотезы» об однонаправленной связи и, как это принято в математической статистике, опровергнуть эту гипотезу (т. е. сделать вывод о двунаправленной связи) или нет. При этом вероятность ошибочного опровержения должна быть под контролем, т. е. не превышать заявленной малой величины, которая называется уровнем значимости вывода q . Величину $1 - q$ называют доверительной вероятностью.

Здесь мы предлагаем метод такой проверки, который назовём тестом на двунаправленную связь. Зададим некоторый класс M моделей процесса (X, Y) с однонаправленной связью и «собственным» временным шагом τ , меньшим интервала выборки Δt . Проведём в классе M поиск модели, способной адекватно воспроизвести все существенные свойства наблюдаемых данных (x_n, y_n) . Если такая модель существует, то гипотеза об однонаправленной связи не опровергается. В противном случае делается вывод о двунаправленной связи с оговоркой, что рассмотрение проводилось в классе M .

Для реализации этой идеи на примере стационарных гауссовских процессов с дискретным временем, рассмотрим класс M , состоящий из систем

$$X(t) = \sum_{k=1}^P A'_{X,k} X(t - k\tau) + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} Y(t - k\tau) + \Xi'(t),$$

$$Y(t) = \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} Y(t - k\tau) + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} X(t - k\tau) + \Psi'(t), \quad (4)$$

где временной шаг $\tau = \Delta t/L$, т. е. τ в целое число раз L меньше Δt , шумы — независимые гауссовские с дисперсиями $\sigma_{\Xi'}^2$ и $\sigma_{\Psi'}^2$. Штрихом здесь и далее помечены величины, относящиеся к моделям класса М, в отличие от характеристик исходного процесса (X, Y) . Оба направления однонаправленной связи ($X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$) следует проверить по очереди. Для определённости рассмотрим проверку гипотезы однонаправленной связи $X \rightarrow Y$, т. е. модели (4) с $S = 0$. Тогда класс М задаётся четвёркой чисел P, Q, R, L . Поскольку все свойства гауссовских процессов X и Y полностью определяются их авто- и взаимными ковариационными функциями [20], найдём распределение выборочных оценок ковариационных функций для модели (4) и, тем самым, аналитический критерий статистического согласия между ковариационными функциями модели и выборочными ковариационными функциями наблюдаемых данных.

Обозначим

$$\{\theta'\} = \left(\{A'_{X,k}\}_{k=1}^P, \{A'_{Y,k}\}_{k=1}^Q, \{B'_{Y,k}\}_{k=1}^R, \sigma_{\Xi'}^2, \sigma_{\Psi'}^2 \right)^T$$

— вектор параметров модели, где индекс Т означает транспонирование. Размерность этого вектора равна $D' = P + Q + R + 2$. Если $\{\theta'\}$ задан, то авто- и взаимные ковариационные функции модели (4) могут быть точно найдены решением системы линейных алгебраических уравнений (см. Приложение). Обозначим

$$\{\rho'\} = \left(\{\rho'_{XX}(l \Delta t)\}_{l=0}^K, \{\rho'_{YY}(l \Delta t)\}_{l=0}^K, \{\rho'_{XY}(l \Delta t)\}_{l=-K}^K \right)^T$$

— вектор значений авто- и взаимных ковариационных функций с размерностью $D = 4K + 3$, где величина K такова, что диапазон от $-K$ до K охватывает все значимо отличные от нуля ковариации (в примерах ниже принято $K = 20$, что оказывается достаточным для выполнения этого условия). Обозначим оценку вектора $\{\rho'\}$ по модельной временной реализации $\{x'_n(n \Delta t), y'_n(n \Delta t)\}_{n=1}^N$ через $\{\hat{\rho}'\}$, где

$$\hat{\rho}'_{XY}(l \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-l} x'_n y'_{n+l}$$

и аналогично для ρ'_{XX}, ρ'_{YY} . Если N велико, то оценка $\{\hat{\rho}'\}$ распределена по D -мерному гауссовскому закону со средним ρ' и матрицей ковариаций \mathbf{C} , которая рассчитывается через $\{\rho'\}$ по формуле Бартлетта (см. Приложение). Тогда величина $\chi_D^2 = (\hat{\rho}' - \rho')^T \mathbf{C} (\hat{\rho}' - \rho')$ распределена по закону «хи-квадрат» с D степенями свободы [20].

Обозначим через $\hat{\rho}$ вектор выборочных оценок ковариационных функций, полученных по наблюдаемому временному ряду $\{x_n, y_n\}_{n=1}^N$, а соответствующую ему статистику через $\hat{\chi}^2 = (\{\hat{\rho}\} - \{\rho'\})^T \mathbf{C} (\{\hat{\rho}\} - \{\rho'\})$. Минимизируем величину $\hat{\chi}^2$ как функцию параметров модели $\{\theta'\}$ (от которых зависит $\{\rho'\}$), т. е. проведём поиск наилучшей модели в классе М, и получим некоторое значение $\hat{\chi}_{\min}^2$. Если наблюдаемый процесс действительно принадлежит классу М, то величина $\hat{\chi}_{\min}^2$ распределена по закону «хи-квадрат», но уже с $D - D'$ степенями свободы, т. к. по D' переменным проводилась оптимизация. Обозначим $(1 - q)$ -квантиль этого распределения через χ_{1-q}^2 . Если оказалось, что $\hat{\chi}_{\min}^2 > \chi_{1-q}^2$, то нулевая гипотеза об однонаправленной связи опровергается на уровне значимости q . В численных экспериментах ниже для определённости принято обычное значение $q = 0,05$.

Нулевая гипотеза может быть опровергнута ошибочно с вероятностью, превышающей q , если недостаточно велики значения P, Q, R или принято неподходящее L . Поэтому целесообразно

варьировать эти величины в некотором диапазоне и повторить тест при различных P, Q, R, L . При такой множественной проверке гипотеза об однонаправленной связи опровергается, если она опровергнута для всех пробных классов M , т. е. не найдено ни одной модели с однонаправленной связью, адекватно описывающей наблюдаемые данные. Пусть проверяются значения вплоть до $P_{\max}, Q_{\max}, R_{\max}, L_{\max}$. Обозначим соответствующий класс M_{\max} . Пусть все пробные L являются делителями L_{\max} , тогда M_{\max} содержит в себе все остальные пробные классы и, следовательно, уровень значимости множественного теста равен уровню q , использованному для каждого класса отдельно. Если рассматриваются несколько пробных некранных L , то вероятность ошибки множественного теста не превосходит q . Таким образом, использование множественного теста полностью аналогично тестированию в отдельном классе M . Поэтому ниже мы приводим результаты (частоты ошибочных и правильных опровержений нулевой гипотезы) для каждого класса M отдельно.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕСТА НА ДВУНАПРАВЛЕННУЮ СВЯЗЬ В ЧИСЛЕННОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Работоспособность предложенного теста проверялась на примере осцилляторов (3) при $B_Y = 0,3$ и различных B_X . Для каждого набора значений параметров генерировались ансамбли из 100 рядов фиксированной длины $N = 1000, 2000, 3000$ с $\Delta t > 1$.

Начнём описание результатов со случая $\Delta t = 2$. При этом величина $B_X = 0$ соответствует не только однонаправленной связи $X \rightarrow Y$, но и положительному значению $G_{y \rightarrow x}$ (рис. 3а). Оценки $G_{y \rightarrow x}$ по временным рядам статистически значимо отличны от нуля (на уровне 0,05 согласно F -тесту) с вероятностью 0,22 при $N = 1000$, 0,53 при $N = 2000$ и 0,68 при $N = 3000$. Таким образом, ложный вывод о двунаправленной связи только по оценкам улучшений прогноза весьма вероятен. Проверка нулевой гипотезы об однонаправленной связи $X \rightarrow Y$ с помощью предложенного выше теста проводилась для каждого временного ряда с $L = 2$ и различными P, Q, R в диапазоне от 1 до 5 (принято $K = 20$, чтобы охватить все существенно ненулевые ковариации). Рассчитывалась относительная частота f опровержений нулевой гипотезы, т. е. доля временных рядов в ансамбле, для которых гипотеза оказалась опровергнутой. При $B_X = 0$ это частота ошибочных выводов. Для ансамбля из бесконечно большого числа рядов эта частота представляла бы собой вероятность ошибочных выводов и не должна была бы превышать заявленного уровня $q = 0,05$, чтобы тест работал корректно. При учёте конечного размера ансамбля, частота f должна быть распределена по многомерному закону Бернулли (где в результате каждого испытания имеет место ошибка с вероятностью q), и для проверки корректной работы теста следует убедиться, что она не превышает, например, 0,95-квантиль этого распределения, что для ансамбля из 100 рядов составляет примерно 0,1. Действительно, это имеет место на рис. 4 даже при больших P, Q, R .

При $B_X > 0$ частота f есть частота правильных опровержений гипотезы однонаправленной связи, т. е. чувствительность метода к двунаправленной связи. Чем она больше, тем эффективнее тест. Она растёт с ростом B_X и достигает больших значений, если P, Q, R не слишком велики (рис. 4а, б). Она уменьшается с уменьшением N и ростом P, Q, R (рис. 4г, см. также рис. 4а и б). Это ожидаемый результат, т. к. более широкий класс моделей даёт большую вероятность найти модель с ковариационными функциями, близкими к наблюдаемым выборочным функциям с точностью до ошибок их оценивания, которые растут с уменьшением N . Все результаты полностью аналогичны для $\Delta t = 3$ (рис. 4д–з) и $\Delta t = 4$ (рис. 4и–м), если только $L = \Delta t$. Лишь чувствительность теста несколько снижается по сравнению с $\Delta t = 2$. Таким образом, предложенный тест работает корректно. Пример его применения к реальным данным климатических наблюдений,

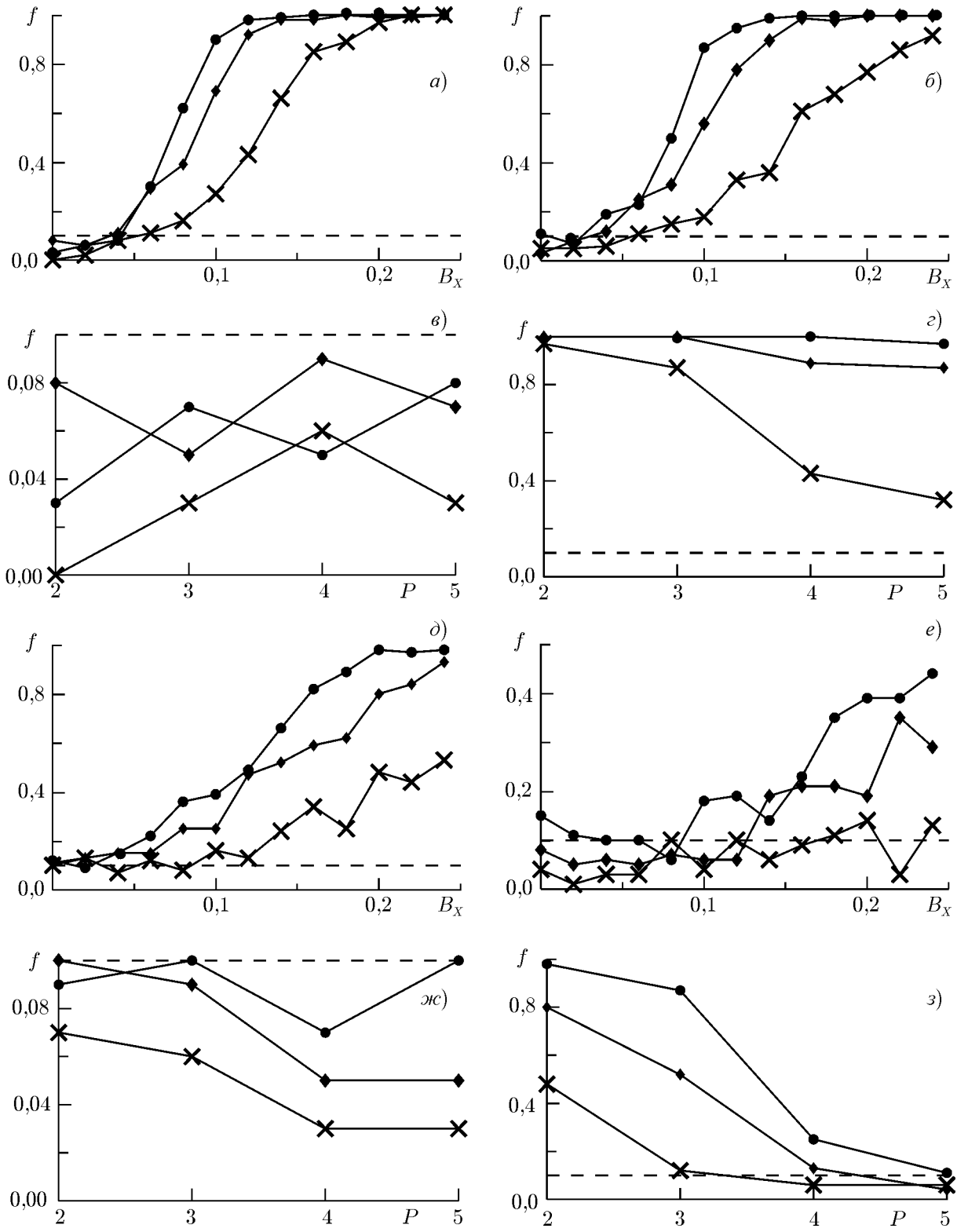


Рис. 4 (начало)

наряду с кратким описанием, представлен в другой нашей публикации [28].

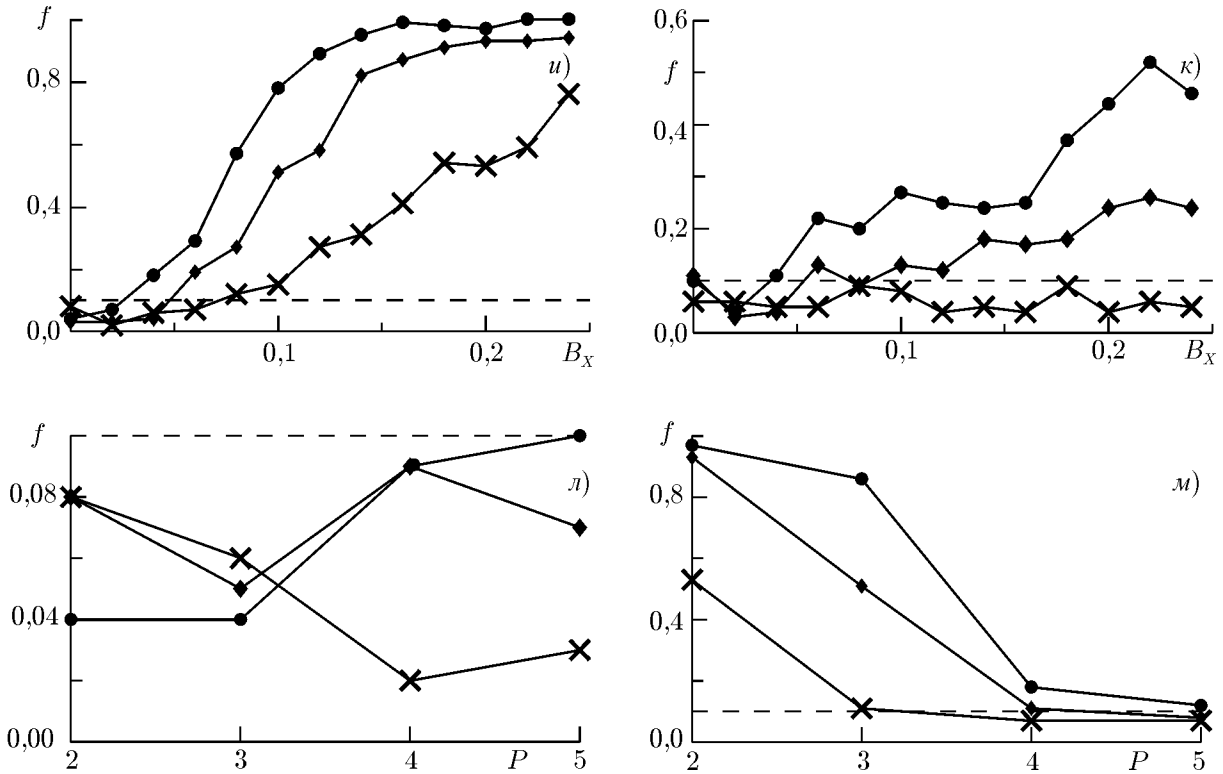


Рис. 4 (продолжение). Частота опровержения гипотезы однонаправленной связи для системы (3): крестики для $N = 1000$, ромбики — $N = 2000$, кружки — $N = 3000$. Панели (а, б, в) соответствуют $P = Q = 2, R = 1$, (б, г, ж) — $P = Q = R = 3$. На панелях (а, б, в, г) $B_X = 0$, (з, ж, л) — $B_X = 0,2$ (в обоих случаях $R = 1, Q = P$). На панелях (а–з) $\Delta t = 2$, (б–г) — $\Delta t = 3$, (в–л) — $\Delta t = 4$. Во всех случаях $L = \Delta t$. На панелях (а, б, в, г) (и при $B_X = 0$ на панелях (а, б, в, г, ж, з, л)) f представляет собой частоту ошибочных выводов. Пунктиром показана допустимая величина частоты ошибок 0,1, рассчитанная с учётом заявленного уровня значимости $q = 0,05$ и закона Бернулли для распределения частоты при конечном ансамбле в 100 рядов. На панелях (з, ж, л) (и при $B_X > 0$ на панелях (а, б, в, г, ж, з, л)) f определяет чувствительность метода

5. СТЕПЕНЬ ОБЩНОСТИ ПРЕДЛОЖЕННОГО ПОДХОДА

Предложенный тест может быть использован практически без изменений и в том случае, когда для описания исследуемых систем предполагается более уместным использование моделей с непрерывным временем (например, в случае, когда структура модельных дифференциальных уравнений может быть получена из физических соображений). Для линейных систем можно использовать класс моделей M , состоящий из стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^P X(t)}{dt^P} &= \sum_{k=1}^P A'_{X,k} \frac{d^{k-1} X(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} \frac{d^{k-1} Y(t)}{dt^{k-1}} + \Xi'(t); \\ \frac{d^Q Y(t)}{dt^Q} &= \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} \frac{d^{k-1} Y(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} \frac{d^{k-1} X(t)}{dt^{k-1}} + \Psi'(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Единственное отличие процедуры тестирования состоит в том, что модельные ковариационные функции (вектор ρ') рассчитываются путём решения соответствующей линейной системы обыкновенных дифференциальных, а не алгебраических, уравнений (см. Приложение).

При наличии нелинейности в динамике исследуемых систем эффект редкой выборки также типичен, т.к. его причиной является не конкретная форма уравнений, а неполнота информации о состояниях систем в наблюдаемых данных. Рассмотрение нелинейного случая лишь более сложно технически. Предложенная идея тестирования может быть реализована для нелинейных систем, но с большими трудностями. Во-первых, поиск нужно проводить в более широком классе нелинейных моделей, что труднее с вычислительной точки зрения. Во-вторых, модели должны воспроизводить различные статистические моменты данных (наряду с авто- и взаимными ковариационными функциями), а аналитических формул для моментных функций нелинейных моделей в общем случае нет, так что приходится ограничиться специальными моделями, для которых такие формулы есть, или использовать оценки по длинным реализациям. Для краткости мы не включили рассмотрение этих вопросов в данную работу.

При использовании предложенного теста на практике следует помнить, что сделанный вывод о двунаправленной связи справедлив лишь при рассмотрении в рамках заданного класса моделей. Однако подобное ограничение в принципе неизбежно при любом способе тестирования (всегда проверяется и опровергается конкретная гипотеза, т.е. специфический вариант описания наблюдаемых данных) и, если у класса моделей есть хорошие возможности для описания исследуемого класса объектов, то ценность полученного вывода достаточно высока.

Наконец, заметим, что эффект редкой выборки имеет место лишь для стохастических (но не для детерминированных) систем, что и учитывается при тестировании, т.к. шумовые воздействия входят в модельные уравнения (4) или (5). Полезность стохастических уравнений при моделировании по временным рядам подчёркивалась и в работах [29, 30], посвящённых вопросам моделирования и прогноза.

ВЫВОДЫ

Интервал выборки — неперменная характеристика временного ряда, обусловленная процедурой измерений. Игнорирование того, что исследуемые системы могут иметь меньший «собственный временной шаг», чревато ошибочными выводами о характере их взаимодействия при использовании оценок причинности по Грейнджеру. Как показано в данной работе, при достаточно большом интервале выборки характеристики связи (улучшение прогноза) могут оказаться положительными в обе стороны для систем с однонаправленной связью, т.е. ошибочно свидетельствовать о двунаправленной связи. Отсюда следует, в частности, что активно развиваемая идея выбора оптимальных (не малых) временных задержек в модельных отображениях при нелинейной оценке причинности по Грейнджеру [31, 32] может приводить к ложным выводам о двунаправленной связи, так что её применение требует осторожности и учёта эффекта редкой выборки.

В данной работе предложен тест на двунаправленную связь, тогда как известные подходы с использованием суррогатных данных [33, 34] позволяют выявить лишь наличие связи или её нелинейность. Предложенная идея тестирования может быть реализована для любых линейных систем с дискретным и непрерывным временем. Указана и возможность её использования в нелинейных случаях. Работоспособность предложенного теста показана в численных экспериментах на эталонных колебательных системах. Тест может быть полезен в различных областях физических исследований, в частности, для перепроверки некоторых ранее сделанных выводов о взаимных воздействиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-02-00599), программы РАН и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (контракт 14.В37.21.0247).

ПРИЛОЖЕНИЕ

КОВАРИАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
И КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИХ ВЫБОРОЧНЫХ ОЦЕНОК

Чтобы найти значения ковариационных функций системы (4), умножим обе части уравнений на $X(t - t')$ при $t' > m\tau$, где $m = \max(P, Q, R, S)$. Взяв математические ожидания, получим

$$\begin{aligned}\rho'_{XX}(t') &= \sum_{k=1}^P A'_{X,k} \rho'_{XX}(t' - k\tau) + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} \rho'_{XY}(t' - k\tau); \\ \rho'_{XY}(t') &= \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} \rho'_{XY}(t' - k\tau) + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} \rho'_{XX}(t' - k\tau),\end{aligned}\quad (6)$$

где $\rho'_{XY}(t') = M[X(t - t')Y(t)]$, $\rho'_{XX} = M[X(t - t')X(t)]$. Умножим обе части (4) на $Y(t - t')$ при $t' > m\tau$, возьмём математические ожидания и получим

$$\begin{aligned}\rho'_{YX}(t') &= \sum_{k=1}^P A'_{X,k} \rho'_{YX}(t' - k\tau) + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} \rho'_{YY}(t' - k\tau), \\ \rho'_{YY}(t') &= \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} \rho'_{YY}(t' - k\tau) + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} \rho'_{YX}(t' - k\tau).\end{aligned}\quad (7)$$

Таким образом, можно рассчитать ковариационные функции для сколько угодно больших лагов по рекурсивным формулам (6) и (7), если заданы их начальные значения для $0 \leq t' \leq (m - 1)\tau$. Чтобы найти эти начальные $4m - 1$ значений, умножим обе части (4) поочерёдно на $X(t - t')$ и $Y(t - t')$ при $1 \leq t' \leq (m - 1)\tau$, возьмём математические ожидания и получим $4m - 3$ линейных уравнений относительно искомых величин. Далее возведём в квадрат обе части каждого из уравнений (4), а также умножим друг на друга два уравнения (4), возьмём математические ожидания и получим ещё три линейных уравнения, что даёт полную систему относительно искомых величин. Из неё и (6), (7) найдём ковариационные функции для любых лагов.

Для системы с непрерывным временем (5) ковариационные функции находятся путём решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d^P \rho'_{XX}(t)}{dt^P} &= \sum_{k=1}^P A'_{X,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{XX}(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{XY}(t)}{dt^{k-1}}; \\ \frac{d^Q \rho'_{XY}(t)}{dt^Q} &= \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{XY}(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{XX}(t)}{dt^{k-1}}; \\ \frac{d^P \rho'_{YX}(t)}{dt^P} &= \sum_{k=1}^P A'_{X,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{YX}(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^S B'_{X,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{YY}(t)}{dt^{k-1}}; \\ \frac{d^Q \rho'_{YY}(t)}{dt^Q} &= \sum_{k=1}^Q A'_{Y,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{YY}(t)}{dt^{k-1}} + \sum_{k=1}^R B'_{Y,k} \frac{d^{k-1} \rho'_{YX}(t)}{dt^{k-1}},\end{aligned}\quad (8)$$

где начальные условия $\rho'_{XY}(0)$, $\rho'_{XX}(0)$, $\rho'_{YY}(0)$ находятся из линейных алгебраических уравнений, полученных возведением в квадрат обеих частей уравнений (5) при бесконечно малом dt и взятием математического ожидания (не приводятся).

Матрица ковариаций \mathbf{C} для выборочных оценок ковариационных функций в предположении достаточно малых авто- и кросскорреляций сводится к виду (см. например [20])

$$\text{cov}[\hat{\rho}'_{XY}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{XY}(l_2 \Delta t)] = \frac{1}{N - l_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \rho'_{XX}(k \Delta t) \rho'_{YY}[(k + l_2 - l_1) \Delta t] + \rho'_{XY}(-k \Delta t) \rho'_{XY}[(k + l_1 + l_2) \Delta t] \right\}, \quad (9)$$

где $-K \leq l_1, l_2 \leq K$. Всё аналогично для $\text{cov}[\hat{\rho}'_{XX}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{XX}(l_2 \Delta t)]$ с заменой в (9) во всех случаях Y на X и для $\text{cov}[\hat{\rho}'_{YY}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{YY}(l_2 \Delta t)]$ с заменой X на Y . Ковариации $\text{cov}[\hat{\rho}'_{XX}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{YY}(l_2 \Delta t)]$, $\text{cov}[\hat{\rho}'_{XX}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{XY}(l_2 \Delta t)]$, $\text{cov}[\hat{\rho}'_{YY}(l_1 \Delta t) \hat{\rho}'_{XY}(l_2 \Delta t)]$ оказываются на порядок меньше, и их можно положить равными нулю. В численных примерах выше вместо суммирования в бесконечных пределах проводится суммирование в диапазоне от $-2K$ до $2K$ (при $K = 20$), который охватывает все заметно отличные от нуля ковариации. Все недиагональные значения матрицы \mathbf{C} положены равными нулю, что существенно упрощает задачу минимизации, т.к. сглаживает «рельеф» минимизируемой функции. Такой приём может дать заниженные значения $\hat{\chi}_{\min}^2$, но не завышенные, так что вероятность ошибок не возрастает, что и требуется для достоверности выводов тестирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M. G., Pikovsky A. S. // *Chaos*. 2003. V. 13, No. 1. P. 179.
2. Hung Y.-C., Hu C.-K. // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101, No. 24. Art. no. 244102.
3. Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., et al. // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 76, No. 5. Art. no. 055201(R).
4. Wang W., Anderson B. T., Kaufmann R. K., Myneni R. B. // *J. Climate*. 2004. V. 17, No. 24. P. 4752.
5. Мохов И. И., Смирнов Д. А. // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44, № 3. С. 283.
6. Мохов И. И., Смирнов Д. А. // *Доклады академии наук*. 2009. Т. 426, № 5. С. 679.
7. Pereda E., Quiñan Quiroga R., Bhattacharya J. // *Progr. Neurobiology*. 2005. V. 77, No. 10. P. 1.
8. Brea J., Russell D. F., Neiman A. B. // *Chaos*. 2006. V. 16, No. 2. Art. no. 026111.
9. Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. и др. // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178, № 3. С. 323.
10. Smirnov D., Barnikol T., Barnikol U., et al. // *Europhys. Lett.* 2008. V. 83, No. 2. Art. no. 20003.
11. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S. // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64, No. 4. Art. no. 045202(R).
12. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. // *Phys. Rev. E*. 2003. V. 68, No. 4. Art. no. 046209.
13. Смирнов Д. А. // *Радиотехника и электроника*. 2006. Т. 51, № 5. С. 569.
14. Смирнов Д. А., Сидак Е. В., Безручко Б. П. // *Письма в ЖТФ*. 2011. Т. 37, № 1. С. 64.
15. Granger C. W. J. // *Econometrica*. 1969. V. 37, No. 3. P. 424.
16. Granger C. W. J. // *J. Economic Dynamics and Control*. 1980. V. 2, No. 6. P. 329.
17. Sims C. A. // *Econometrica*. 1971. V. 39, No. 3. P. 545.
18. Marcellino M. // *J. Business and Economic Statistics*. 1999. V. 17, No. 1. P. 129.
19. Renault E., Sekkat K., Szafarz A. // *J. Empirical Finance*. 1998. V. 5, No. 1. P. 47.

20. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Ч. 1, 2. М.: Мир, 1974. 406 с.
21. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.
22. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1978. Т. 18, № 1. С. 106.
23. Timmer J., Lauk M., Pfleger W., Deuschl G. // Biol. Cybern. 1998. V. 78, No. 1. P. 349.
24. Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 1. С. 1364.
25. Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991.
26. Ikeda K. // Opt. Commun. 1979. V. 30, No. 2. P. 257.
27. Lang R., Kobayashi K. // IEEE J. Quantum Electron. 1980. V. 16, No. 3. P. 347.
28. Smirnov D. A., Bezruchko B. P. // Europhys. Lett. 2012. V. 100, No. 1. P. 10005.
29. Molkov Ya. A., Mukhin D. N., Loskutov E. M., et al. // Phys. Rev. E. 2009. V. 80, No. 4. Art. no. 046207.
30. Molkov Ya. A., Loskutov E. M., Mukhin D. N., Feigin A. M. // Phys. Rev. E. 2012. V. 85, No. 3. Art. no. 036216.
31. Vlachos I., Kugiumtzis D. // Phys. Rev. E. 2010. V. 82, No. 1. Art. no. 016207.
32. Faes L., Nollo G., Porta A. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83, No. 5. Art. no. 051112.
33. Schreiber T., Schmitz A. // Physica D. 2000. V. 142, No. 3–4. P. 346.
34. Dolan K., Neiman A. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65, No. 2. Art. no. 026108.

REVEALING MUTUAL INFLUENCE BETWEEN OSCILLATORY SYSTEMS FROM OBSERVATION DATA

D. A. Smirnov, B. P. Bezruchko

In different fields of physical research one often encounters the question of how to distinguish a bidirectional coupling between oscillatory systems from a unidirectional coupling (i.e. a mutual influence from a one-way influence) based on a time series. We show that a widely used approach, based on the estimation of prediction errors of empirical models (Granger causality), may give spurious conclusions about bidirectional coupling if a sampling interval is not small enough (i.e. it exceeds a certain intrinsic time scale of the systems under investigation). Taking this effect into account, we suggest a statistical test, which allows to reveal a bidirectional coupling with a given confidence probability, and illustrate it with exemplary systems.