



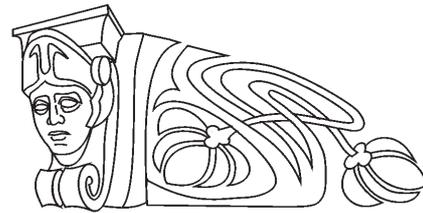
УДК 537.86

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАДЕРЖКОЙ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ, УЧИТЫВАЮЩИЙ ВИД МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Пономаренко^{1,2}, М. Д. Прохоров², Е. В. Сидак¹

¹Саратовский государственный университет
E-mail: vip@sgu.ru

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru



Предложен метод восстановления систем первого порядка с запаздыванием по их временным рядам. Особенностью метода является учет структуры уравнения системы при построении регрессионной модели. Метод позволяет восстановить время запаздывания, параметр инерционности и нелинейную функцию системы и может быть применен для реконструкции систем с задержкой, совершающих как хаотические, так и периодические колебания.

Ключевые слова: реконструкция уравнений, анализ временных рядов, динамическое моделирование, запаздывающая обратная связь.

Method of Time-Delay Systems Recovery from Time Series with Known Type of Model Equation

V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, E. V. Sidak

We propose the method for the reconstruction of first-order time-delay systems from their time series. The method is based on taking into account the type of the system equation at the regression model construction. The method allows one to recover the delay time, the parameter characterizing the inertial properties of the system and the nonlinear function. It can be applied to the recovery of time-delay systems performing chaotic and periodic oscillations.

Key words: reconstruction of equations, time series analysis, dynamical modeling, time-delayed feedback.

Введение

Реконструкция динамических моделей автоколебательных систем с запаздыванием по их экспериментальным хаотическим и периодическим временным рядам представляет собой актуальную задачу современной физики. Системы с запаздывающей обратной связью очень широко распространены в природе и технике [1–3]. Обычно они моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии, физиологии и химии. Например, в динамике популяций запаздывание связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после периода взросления [2], а в пространственно-развитых системах оно определяется тем, что

сигналы распространяются с конечной скоростью и им требуется время на преодоление расстояний [4]. К классу систем с запаздыванием относятся, например, ставшие эталонными уравнение Икеды [4], моделирующее пассивный оптический резонатор, уравнения Ланга–Кобаяши [5], описывающие полупроводниковые лазеры с оптической обратной связью, уравнение Маккея–Гласса [6] для процесса выработки организмом красных кровяных клеток и многие другие модели, используемые для описания различных процессов в живых организмах – от метаболизма глюкозы до распространения инфекционных заболеваний [7].

Так как системы с запаздыванием обладают бесконечно большим числом степеней свободы, это вносит трудности в решение задачи реконструкции по временному ряду. Действительно, при больших временах задержки даже скалярные дифференциальные уравнения с запаздыванием могут демонстрировать хаотические движения очень высокой размерности [8]. Поэтому для реконструкции систем с запаздыванием разрабатываются специальные приемы. Большинство из них основано на проецировании бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности. При этом используются такие критерии качества реконструкции системы с запаздыванием, как минимальная ошибка прогноза построенной модели [9–12], минимальная величина информационной энтропии [13] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [14, 15]. Известны также методы восстановления параметров систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [16–18], метода множественной стрельбы [19], метода оптимизации [20], теории информации [21], адаптивной синхронизации [22], нейронных сетей [23] и статистического анализа экстремумов временного ряда [24, 25].



Особое внимание в последние годы уделяется разработке методов реконструкции систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических колебаний, поскольку многие практически важные системы с запаздыванием функционируют в периодических или близких к периодическим режимам, а большинство перечисленных выше методов ориентировано на использование хаотических временных рядов. В случае периодических колебаний методы реконструкции основаны на возмущении системы с запаздыванием внешним воздействием и анализе отклика [26–30].

В данной работе мы предлагаем метод восстановления систем с запаздывающей обратной связью по их временным рядам, ориентированный на построение модельных уравнений систем с линейной зависимостью от текущего состояния и нелинейной зависимостью от состояния в задержанный момент времени. Метод основан на использовании априорной информации о виде модельного уравнения системы, структура которого учитывается при построении модели. Метод позволяет определять по временным рядам параметры систем с задержкой, совершающих как хаотические, так и периодические колебания.

1. Описание метода

Предлагаемый метод реконструкции систем с задержкой проиллюстрируем на примере одного из наиболее широко используемых дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (1)$$

где ε – параметр, характеризующий инерционные свойства системы, f – нелинейная функция, τ_0 – время запаздывания. К уравнению вида (1) сводятся, например, уравнение Маккея–Гласса [6], уравнение Икеды [4] и уравнение генератора с запаздывающей обратной связью [3]. Характерной особенностью уравнения (1) является то, что его правая часть содержит линейную зависимость от текущего состояния динамической переменной $x(t)$ и нелинейную зависимость от состояния переменной в задержанный момент времени $x(t - \tau_0)$.

Будем полагать, что отмеченная особенность модельного уравнения исследуемой системы нам априорно известна, а неизвестными являются параметры системы и нелинейная функция. Тогда для восстановления по временному ряду системы с запаздыванием, описываемой уравнением вида (1), мы предлагаем следующий подход. Будем строить регрессионную модель специального вида, в структуре которой учтем априорную информацию о виде

модельного уравнения. Модель будем строить в виде точечного отображения.

Сначала перейдем от дифференциального уравнения (1) к разностному уравнению:

$$\varepsilon \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (2)$$

где Δt – малое время, равное интервалу выборки.

Уравнение (2) можно переписать в виде

$$x(t + \Delta t) = a_1 x(t) + a_2 f(x(t - \tau_0)), \quad (3)$$

где $a_1 = 1 - \Delta t / \varepsilon$, $a_2 = \Delta t / \varepsilon$. Запишем уравнение (3) в виде отображения:

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 f(x_{n-m}), \quad (4)$$

где $n = t / \Delta t$ – дискретное время, $m = \tau_0 / \Delta t$ – дискретное время задержки. Для реконструкции уравнения (4) по временному ряду построим модели следующего вида:

$$y_{n+1}(\tau, k) = b y_n + c_0 + c_1 y_{n-\tau} + \dots + c_k y_{n-\tau}^k, \quad (5)$$

где τ – пробное время запаздывания, перебираемое с постоянным шагом из некоторого интервала, b – коэффициент, количественно характеризующий линейную зависимость модели от текущего состояния y_n , а c_0, c_1, \dots, c_k – коэффициенты полинома степени k , аппроксимирующего нелинейную зависимость модели от задержанной переменной $y_{n-\tau}$.

Оптимальные значения коэффициентов модели (5) определяются методом наименьших квадратов. Для количественной оценки качества восстановления модельного уравнения мы использовали одношаговую ошибку прогноза построенных моделей в зависимости от пробного времени запаздывания τ при фиксированном значении k :

$$S^2(\tau) = \left\langle (x_{n+1} - y_{n+1}(\tau))^2 \right\rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Такая мера показывает, насколько хорошо модель описывает наблюдаемую реализацию, если начальные условия для одношагового прогноза выбираются из исходного временного ряда. Значение τ , при котором наблюдается минимальное значение $S^2(\tau)$, принимается в качестве оценки дискретного времени запаздывания m , которое связано с истинным запаздыванием $\tau_0 = m \Delta t$.

Следует отметить, что похожий метод восстановления времени задержки был предложен в работе [12], однако в ней предлагался более общий подход, при котором модель строилась в виде функции от двух переменных, y_n и $y_{n-\tau}$: $y_{n+1} = F(y_n, y_{n-\tau})$. По сравнению с методом [12] наш подход позволяет получить более адекватную модель с меньшим количеством



коэффициентов, которым в ряде случаев удается придать физический смысл. Кроме того, предлагаемый нами метод позволяет использовать для построения модели более короткие временные ряды, а сама модель лучше отражает качественное поведение системы.

Определив коэффициенты модели (5), можно восстановить параметр инерционности и нелинейную функцию системы (1). В качестве оценки параметра ε будем использовать $\hat{\varepsilon} = \Delta t / (1 - b)$. Нелинейную функцию f можно восстановить по коэффициентам аппроксимирующего ее полинома $c_i, i = 0, 1, \dots, k$, причем коэффициенты c_i следует умножить на $\hat{\varepsilon} / \Delta t$.

2. Применение метода

2.1. Восстановление модельной системы с запаздыванием с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим применение метода к временным рядам системы с запаздыванием (1), функция f которой является квадратичной:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + \lambda - x^2(t - \tau_0), \quad (7)$$

где λ – параметр нелинейности. Параметры уравнения (7) выбираем равными $\lambda = 1,85, \tau_0 = 800, \varepsilon = 10$. При этих параметрах система демонстрирует хаотические колебания (рис. 1, а). Для построения модели будем использовать временной ряд длиной $N = 20\,000$ точек при интервале выборки $\Delta t = 1$. При построении модельного уравнения (5) ограничимся полиномом второй степени, $k = 2$. При $k > 2$ результаты качественно совпадают со случаем $k = 2$.

На рис. 1, б приведена зависимость одношаговой ошибки прогноза моделей от пробного времени задержки τ , перебираемого из интервала от 0 до 1200 с шагом 1, при $k = 2$. График демонстрирует четкий минимум при $\tau = \tau_0 = 800$. Коэффициенты модели (5) принимают при этом значения: $b = 0.9113039, c_0 = 0.1665893, c_1 = 0.00088149, c_2 = -0.0913119$. По ним легко получить оценку значений ε и λ : $\hat{\varepsilon} = 11.27, \hat{\lambda} = c_0 / (1 - b) = 1.878$. Восстановленная нелинейная функция приведена на рис. 1, в. Она хорошо совпадает с истинной квадратичной функцией системы (7).

Метод может быть применен для восстановления систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических колебаний. На рис. 2, а приведен периодический временной ряд уравнения (7) при $\lambda = 1, \tau_0 = 100, \varepsilon = 20$. На рис. 2, б построена зависимость $S^2(\tau)$ при $k = 2$ для τ , изменяющегося от 0 до 150 с шагом 1. Минимум $S^2(\tau)$ наблюдается при $\tau = \tau_0 = 100$. При $\tau = T/2$

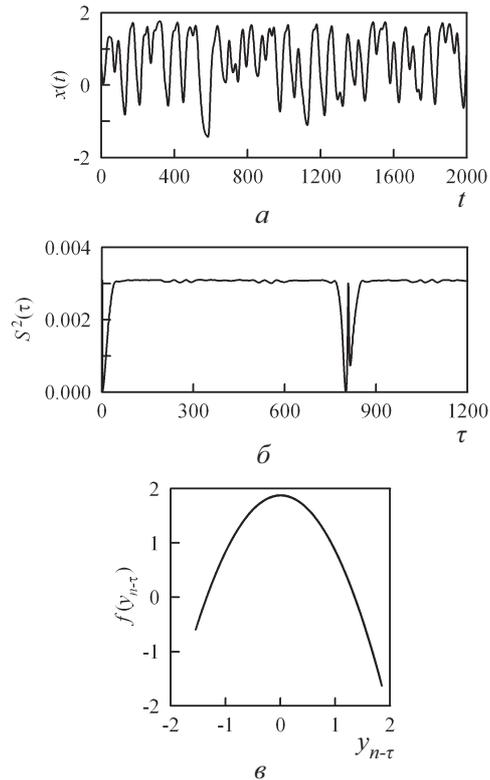


Рис. 1. Система с запаздыванием (7) в режиме хаотических колебаний: а – временной ряд системы при $\lambda = 1.85, \tau_0 = 800, \varepsilon = 10$; б – зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $k = 2$; в – восстановленная нелинейная функция при $\tau = 800, k = 2$

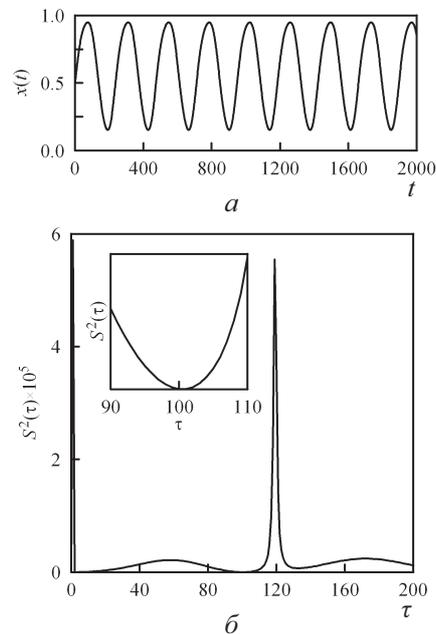


Рис. 2. Система с запаздыванием (7) в режиме периодических колебаний: а – временной ряд системы при $\lambda = 1, \tau_0 = 100, \varepsilon = 20$; б – зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $k = 2$. На вставке приведен увеличенный фрагмент $S^2(\tau)$ при $\tau = 90, \dots, 110$



$= 119$, где T – период колебаний, $S^2(\tau)$ имеет максимум, поскольку y_n и $y_{n-\tau}$ оказываются при этом линейно зависимыми, и точность модели (5) падает. Коэффициенты модели (5) принимают при $\tau = 100$ и $k = 2$ значения: $b = 0.9527235$, $c_0 = 0.0473479$, $c_1 = 0.000336$, $c_2 = -0.0479113$, а восстановленные параметры $\hat{\varepsilon} = 21.15$, $\hat{\lambda} = 1.002$ оказываются близки к истинным значениям ε и λ .

Мы исследовали эффективность метода в присутствии динамического и измерительного шума. Сначала гауссовский белый шум с нулевым средним значением был добавлен в динамику системы (7) в хаотическом режиме при $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 800$, $\varepsilon = 10$. На рис. 3, а показана одношаговая ошибка прогноза модели при 20%-ном шуме. Несмотря на достаточно высокий уровень шума, положение минимума $S^2(\tau)$ позволяет точно восстановить τ_0 , а параметры ε и λ восстановить с очень хорошей точностью: $\hat{\varepsilon} = 9.99$, $\hat{\lambda} = 1.849$. С увеличением шума минимум $S^2(\tau)$ становится все менее выраженным, а потом исчезает.

Метод оказывается более чувствительным к измерительному шуму. На рис. 3, б приведена зависимость $S^2(\tau)$ при добавлении к временному ряду уравнения (7) при указанных выше параметрах 1%-ного гауссовского белого шума с нулевым средним значением. Восстановленные параметры: $\tau_0 = 800$, $\hat{\varepsilon} = 11.24$, $\lambda = 1.876$.

Похожее влияние шум оказывает при реконструкции систем с задержкой в периодических режимах. Заметим, что динамический шум может оказаться полезным в этом случае. Хотя такой шум приводит к росту абсолютных значений $S^2(\tau)$, он позволяет избавиться от пологого участка на графике $S^2(\tau)$ вблизи $\tau = \tau_0$ (см. рис. 2, б) и получить более выраженный минимум при истинном времени запаздывания (рис. 3, в).

2.2. Восстановление уравнения Икеды

Применим метод к временному ряду уравнения Икеды в присутствии динамического шума:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0) + \xi(t). \quad (8)$$

Уравнение Икеды (8) относится к системам с запаздыванием, описываемым уравнением (1) с $\varepsilon = 1$. При $\mu = 20$, $\tau_0 = 2$, $x_0 = \tau/3$ система (8) демонстрирует хаотическую динамику. На рис. 4, а приведен фрагмент временного ряда для случая, когда $\xi(t)$ – 20%-ный гауссовский белый шум с нулевым средним значением. Весь ряд состоял из 20000 точек при интервале выборки $\Delta t = 0.01$.

При построении модельного уравнения (5) мы использовали полиномы различной степени. С увеличением степени полинома k одношаговая

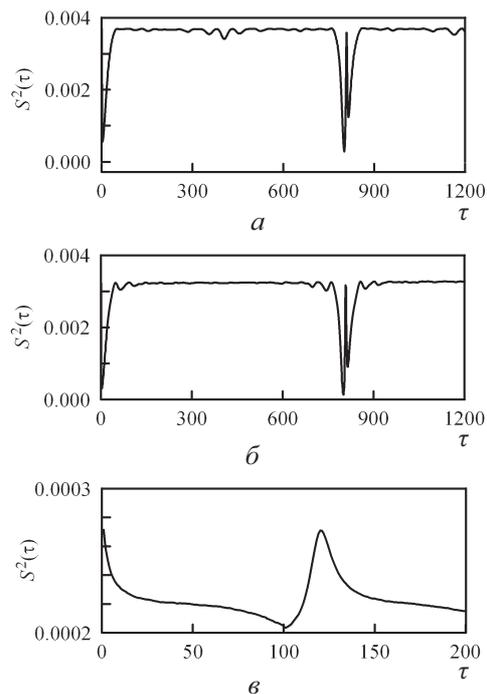


Рис. 3. Система с запаздыванием (7) в присутствии шума. Зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания: а – 20%-ный динамический шум при $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 800$, $\varepsilon = 10$; б – 1%-ный аддитивный шум при $\lambda = 1.85$, $\tau_0 = 800$, $\varepsilon = 10$; в – 100%-ный динамический шум при $\lambda = 1$, $\tau_0 = 100$, $\varepsilon = 20$

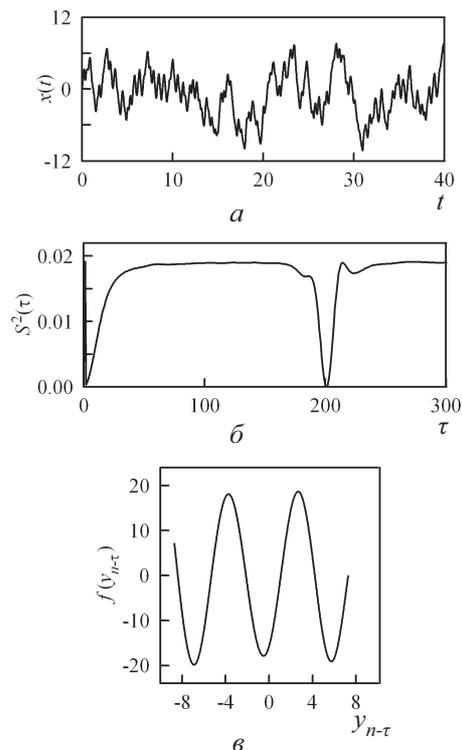


Рис. 4. Система Икеды (8): а – хаотический зашумленный временной ряд; б – зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $k = 12$; в – восстановленная нелинейная функция при $\tau_0 = 200$, $k = 12$



ошибка прогноза моделей уменьшается. Мы ограничились величиной $k = 12$, поскольку при дальнейшем увеличении k величина $S^2(\tau)$ меняется слабо. Зависимость $S^2(\tau)$, построенная при τ , изменяющемся от 0 до 300 с шагом 1, имеет минимум при $\tau = m = 200$ (рис. 4, б), обеспечивая точное восстановление τ_0 .

Коэффициент модели (5) $b = 0.9892252$ дает оценку параметра инерционности $\hat{\varepsilon} = 0.93$. Восстановленная нелинейная функция приведена на рис. 4, в. Ее амплитуда позволяет получить оценку $\hat{\mu} = 19.2$. Параметр x_0 может быть найден по формуле

$$\hat{x}_0 = -\arcsin(\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)/\hat{\mu})$$

где $\varepsilon \dot{x}(t) + x(t)$ равно значению восстановленной функции f при $x(t - \tau_0)$. Получаем $\hat{x}_0 = 0.96$ ($\pi/3 \approx 1.05$).

2.3. Восстановление радиотехнического генератора с запаздывающей обратной связью по экспериментальному временному ряду

Мы применили метод к экспериментальным временным рядам радиотехнического кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 5, а. Генератор состоит из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка. Его модельное уравнение имеет вид:

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)) \quad (9)$$

где $V(t)$, $V(t - \tau_0)$ и $-V(t)$ – напряжения на входе и выходе линии задержки, R и C – сопротивление и ёмкость элементов фильтра. Уравнение (9) имеет вид (1) с $\varepsilon = RC$.

При $\tau_0 = 4.1$ мс и $\varepsilon = 0.45$ мс мы записывали хаотический сигнал $V(t)$, рис. 5, б, с помощью аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки $f_s = 10$ кГц (интервал выборки $\Delta t = 0.1$ мс). При построении модельного уравнения (5) использовались полиномы различной степени. В конечном счете мы ограничились величиной $k = 5$, поскольку при дальнейшем увеличении k величина $S^2(\tau)$ меняется слабо. При τ , изменяющемся от 0 до 100 с шагом 1, $S^2(\tau)$ имеет минимум при $\tau = 42$ (рис. 5, в), давая оценку $\hat{\tau}_0 = 4.2$ мс. Коэффициент модели (5) $b = 0.8076275$ дает оценку $\hat{\varepsilon} = 0.51$ мс. На рис. 5, г приведена восстановленная нелинейная функция, практически совпадающая с истинной передаточной характеристикой нелинейного элемента генератора. Метод дает хорошие результаты и при реконструкции исследуемой экспериментальной системы по периодическим временным рядам.

Заключение

Нами предложен метод реконструкции систем с запаздыванием, описываемых дифференциальным уравнением первого порядка с задержкой,

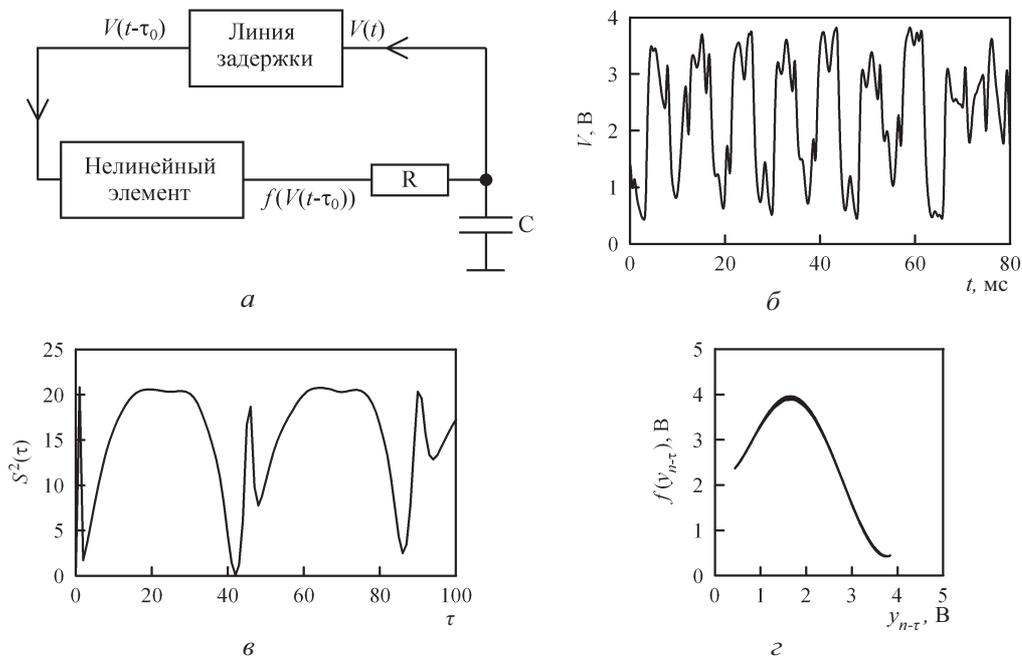


Рис. 5. Радиотехнический генератор с запаздывающей обратной связью: а – блок-схема экспериментальной установки; б – экспериментальный хаотический временной ряд; в – зависимость одношаговой ошибки прогноза модели от пробного времени запаздывания при $k = 5$; г – восстановленная нелинейная функция при $\tau = 42, k = 5$



содержащим линейную зависимость от текущего состояния динамической переменной и нелинейную зависимость от состояния переменной в задержанный момент времени. Особенностью метода является учет структуры уравнения системы при построении регрессионной модели по наблюдаемому временному ряду. Метод позволяет восстановить время запаздывания, параметр инерционности и нелинейную функцию системы и остается эффективным при высоких уровнях динамического шума. Он может быть применен для реконструкции систем с запаздыванием, совершающих как хаотические, так и периодические колебания. Работоспособность метода показана на модельных примерах и экспериментальной системе с запаздыванием.

Метод может быть развит на другие классы системы с запаздыванием, например на системы более высокого порядка, системы с несколькими задержками, неавтономные системы. В каждом из этих случаев необходимо учитывать априорную информацию о структуре модельного уравнения системы, вводя соответствующие члены в восстанавливаемую модель.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-02-00980) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 2.1.1/1738).

Список литературы

1. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston : Academic Press, 1993. 398 p.
2. Glass L., Mackey M. C. From Clocks to Chaos : The Rhythms of Life. Princeton : Princeton University Press, 1988. 248 p.
3. Кузнецов С. П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410–1428.
4. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257–261.
5. Lang R., Kobayashi K. External optical feedback effects on semiconductor injection lasers // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16. P. 347–355.
6. Mackey M. C., Glass L. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197. P. 287–289.
7. Vocharov G. A., Rihan F. A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations // J. Comp. Appl. Math. 2000. Vol. 125. P. 183–199.
8. Farmer J. D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D. 1982. Vol. 4. P. 366–393.
9. Fowler A. C., Kember G. Delay recognition in chaotic time series // Phys. Lett. A. 1993. Vol. 175. P. 402–408.
10. Hegger R., Bünner M. J., Kantz H., Giaquinta A. Identifying and modeling delay feedback systems // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558–561.
11. Udaltsov V. S., Goedgebuer J. -P., Larger L., Cuenot J. -B., Levy P., Rhodes W. T. Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations // Phys. Lett. A. 2003. Vol. 308. P. 54–60.
12. Bünner M. J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback : (I) Theory // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 10. P. 165–176.
13. Tian Y. -C., Gao F. Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // Physica D. 1997. Vol. 108. P. 113–118.
14. Kaplan D. T., Glass L. Coarse-grained embeddings of time series : Random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // Physica D. 1993. Vol. 64. P. 431–454.
15. Bünner M. J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 5083–5089.
16. Voss H., Kurths J. Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // Phys. Lett. A. 1997. Vol. 234. P. 336–344.
17. Ellner S. P., Kendall B. E., Wood S. N., McCauley E., Briggs C. J. Inferring mechanism from time-series data : Delay differential equations // Physica D. 1997. Vol. 110. P. 182–194.
18. Voss H. U., Schwache A., Kurths J., Mitschke F. Equations of motion from chaotic data : A driven optical fiber ring resonator // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 256. P. 47–54.
19. Horbelt W., Timmer J., Voss H. U. Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data // Phys. Lett. A. 2002. Vol. 299. P. 513–521.
20. Dai C., Chen W., Li L., Zhu Y., Yang Y. Seeker optimization algorithm for parameter estimation of time-delay chaotic systems // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. 036203.
21. Zunino L., Soriano M. C., Fischer I., Rosso O. A., Mirasso C. R. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. 046212.
22. Ma H., Xu B., Lin W., Feng J. Adaptive identification of time delays in nonlinear dynamical models // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. 066210.
23. Ortín S., Gutiérrez J. M., Pesquera L., Vasquez H. Non-linear dynamics extraction for time-delay systems using modular neural networks synchronization and prediction // Physica A. 2005. Vol. 351. P. 133–141.
24. Bezruchko B. P., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 056216.
25. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Караваяев А. С., Безручко Б. П. Определение параметров систем с запаздывающей обратной связью по хаотическим временным реализациям // ЖЭТФ. 2005. Т. 127, вып. 3. С. 515–527.
26. Siefert M. Practical criterion for delay estimation using random perturbations // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76. 026215.



27. Yu D., Frasca M., Liu F. Control-based method to identify underlying delays of a nonlinear dynamical system // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. 046209.
28. Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Селезнев Е. П. Оценка характеристик автоколебательных систем с запаздыванием в периодическом режиме // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, №. 6. С. 86–92.
29. Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Recovery of systems with a linear filter and nonlinear delay feedback in periodic regimes // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78. 066207.
30. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I. Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. 066206.