



## СИНХРОНИЗАЦИЯ СВЯЗАННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*А.П. Кузнецов, Ю.П. Емельянова, Е.П. Селезнев*

Рассматривается синхронизация автоколебательных осцилляторов ван дер Поля в случае неидентичности по управляющим параметрам и уровню нелинейной диссипации. Показано, что в такой системе возможен эффект смены доминирующего осциллятора. Этот эффект приводит к характерной форме основного языка синхронизации. Представлены результаты экспериментов со связанными радиофизическими автогенераторами, которые подтверждают результаты, полученные численным моделированием и аналитическим исследованием в рамках фазового приближения.

*Ключевые слова:* Синхронизация, осциллятор ван дер Поля, гибель колебаний, карта динамических режимов.

### Введение

Система связанных осцилляторов ван дер Поля является основной моделью нелинейной теории, которая демонстрирует явление взаимной синхронизации. Она интересна для исследователей как с точки зрения теории синхронизации, так и с точки зрения возможных приложений (см. монографию [1] и приведенные ниже ссылки). Система двух связанных осцилляторов ван дер Поля изучалась (см., например, [2–4]) для случая диссипативной связи между осцилляторами, [5–8] – для случая слабой инерционной (реактивной) связи, [9,10] – для сильной инерционной связи. Система связанных осцилляторов ван дер Поля использовалась при моделировании биологических и химических процессов [11–13]. В работах [6,14,15] было представлено описание системы с помощью фазового уравнения Адлера. Интерес к такой задаче, однако, не ослабевает, поскольку обнаруживаются все новые ее аспекты и новые колебательные эффекты.

Как с прикладной, так и с фундаментальной точки зрения, важно управлять режимами синхронизации связанных автоколебательных осцилляторов. В традиционной постановке задачи о связанных осцилляторах обычно предполагают осцилляторы различающимися лишь по величине их частотной расстройки. В работах

[14–16] обращено внимание на важность случая, когда взаимодействующие подсистемы характеризуются разными по величине параметрами, отвечающими за отрицательное трение в изолированных подсистемах. В работах [17,18] было показано, что для таких систем устройство плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) характеризуется существенными особенностями. На ней появляется новая, переходная область, разделяющая квазипериодические режимы и режим «гибели колебаний». В этом случае можно говорить о своеобразном режиме «широкополосной синхронизации», в основе которого лежит доминирование одного осциллятора над другим [17,18].

В настоящей статье показано, что неидентичность осцилляторов по другим параметрам позволяет существенно влиять на картину синхронизации. Будем считать различающимися параметры нелинейной диссипации, отвечающие за ограничение неустойчивости в системе. Оказывается, что, если уменьшать нелинейную диссипацию, ограничивающую амплитуду колебаний второго осциллятора, то можно добиться того, что при малой связи станет доминирующим уже этот осциллятор. В промежуточной по величине связи области оба осциллятора будут равноправны. Таким образом, в системе возможен эффект смены «лидирующего» осциллятора, который и исследован далее как численными методами, так и аналитическими в рамках фазового уравнения.

Предпринято также экспериментальное исследование возможности широкополосной синхронизации в системе связанных радиофизических генераторов ван дер Поля. Кроме того, экспериментально установлены особенности синхронизации автогенераторов с разной величиной нелинейной диссипации.

## 1. Неидентичность по управляющим параметрам

Используем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие двух неидентичных осцилляторов ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - \gamma_1 x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma_2 y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – параметры, характеризующие отрицательное трение в автономных осцилляторах;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – параметры нелинейной диссипации;  $\delta$  – частотная расстройка автономного второго осциллятора относительно первого;  $\mu$  – коэффициент диссипативной связи.

Для изолированных осцилляторов на основе квазигармонического приближения [1,19] нетрудно получить оценку размеров предельных циклов осцилляторов<sup>1</sup>:

$$R_1 \approx 2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\gamma_1}}, \quad R_2 \approx 2\sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma_2}}. \quad (2)$$

Таким образом, регулируя параметры  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , можно управлять относительным размером предельных циклов автономных осцилляторов. Один из этих

<sup>1</sup>Формально она справедлива только для малых  $\lambda$ , но по порядку величины может использоваться и для  $\lambda \approx 1$ .

параметров, однако, может быть убран перенормировкой, так что далее полагаем  $\gamma_1 = 1$  и  $\gamma_2 = \gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x + \mu \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma y^2) \frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Представим, прежде всего, результаты компьютерного исследования пространства параметров системы (3). Для этого используем метод карт динамических режимов [20]. В его рамках карты системы (3) строятся следующим образом. При проведении расчетов выполняется сканирование плоскости параметров (частотная расстройка  $\delta$  – величина связи  $\mu$ ) с достаточно малым шагом по двум координатным осям. В каждой точке этой плоскости строится сечение Пуанкаре системы (3), которое, как известно, представляет собой некоторую поверхность в фазовом пространстве [20,21]. Поскольку исследуемая система характеризуется четырехмерным фазовым пространством  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , в качестве сечения Пуанкаре будет выступать трехмерная гиперповерхность, заданная некоторым дополнительным условием, например, равенством нулю скорости второго осциллятора  $\dot{y} = 0$ . При этом учитываются траектории, пересекающие секущую поверхность только в одном направлении. В результате такой процедуры исходной дифференциальной системе оказывается поставленным в соответствие, фактически, некоторое дискретное отображение. Затем численно находится период цикла этого отображения. С этой целью определяется номер итерации, начиная с которой в численных расчетах последовательность точек в сечении Пуанкаре повторяется с некоторой фиксированной, но достаточно высокой точностью. В соответствии с определенным таким образом периодом каждая точка плоскости параметров окрашивалась в свой оттенок серого цвета. Для некоторых основных областей периоды циклов в сечении Пуанкаре обозначены цифрами на картах. Квазипериодические и хаотические режимы в сечении Пуанкаре периода не имеют, то есть изображающая точка в сечении не повторяет никогда своей траектории. На рисунках такие режимы обозначались белым цветом.

На рис. 1 показана полученная таким образом карта динамических режимов на плоскости (частотная расстройка  $\delta$  – величина связи  $\mu$ ) для идентичных осцилляторов ван дер Поля (3). На ней видны следующие характерные области:

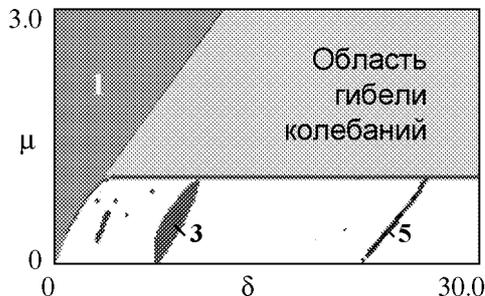


Рис. 1. Карта динамических режимов, построенная для системы (3) при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\gamma = 1$

• основной язык синхронизации периода 1;

• область квазипериодических режимов со встроенной системой высших языков синхронизации;

• область эффекта «гибели колебаний» [1,2], которой отвечает устойчивость состояния равновесия в начале координат при наличии достаточно сильной диссипативной связи.

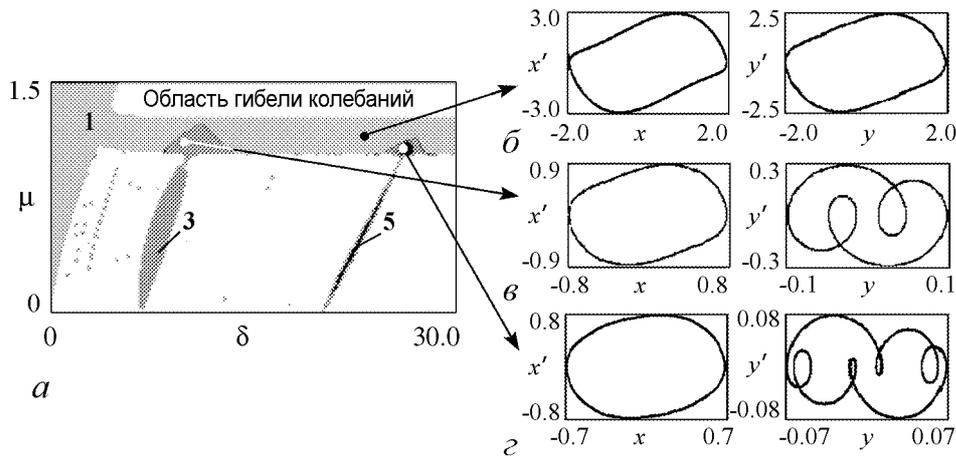


Рис. 2. Карта динамических режимов (а), построенная для системы (3) при  $\lambda_1 = 1.25$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\gamma = 1$ , и фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров (б-г)

Различие значений управляющих параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  связанных осцилляторов ван дер Поля приводит к изменению устройства плоскости параметров  $(\delta, \mu)$ . На рис. 2 представлена карта динамических режимов для неидентичных подсистем, когда  $\lambda_1 = 1.25$ ,  $\lambda_2 = 1$ , а также несколько характерных фазовых портретов первого и второго осцилляторов.

Граница между областями гибели колебаний и квазипериодических режимов на рис. 2 уже является не линией, а представляет собой полосу конечной ширины по коэффициенту связи  $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ , безгранично простирающуюся в область возрастающей частотной расстройки. Если двигаться внутри этой полосы, увеличивая собственную частоту второго осциллятора, то можно наблюдать синхронные режимы, отличающиеся на фазовых портретах числом «оборотов» фазовой траектории второго осциллятора, что демонстрируют приведенные на рис. 2 фазовые портреты. Соответствующие области на карте выглядят как «размытые» вершины языков синхронизации.

Причина особого устройства области  $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$  на качественном уровне может быть объяснена следующим образом. В этом случае диссипативная связь достаточно велика, чтобы компенсировать возбуждение второго осциллятора. Первый же осциллятор остается все еще возбужденным. По этой причине он доминирует над вторым. В этом плане очень характерно соотношение масштабов на нижней паре фазовых портретов (рис. 2, г). Можно видеть, что размер предельного цикла первого осциллятора на порядок больше, чем второго.

## 2. Неидентичность по параметрам нелинейной диссипации

Перейдем теперь к случаю, когда осцилляторы являются неидентичными по параметрам нелинейной диссипации. Оценка (2) наводит на мысль рассмотреть случай, когда нелинейная диссипация второго осциллятора существенно меньше, чем первого. В этом случае размер его предельного цикла должен увеличиться, и осцилляторы могут оказаться равноправными даже при наличии заметной диссипативной связи.

На рис. 3, *a–в* представлены карты динамических режимов, построенные для системы (3) при  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$  и разных значениях параметра нелинейной диссипации  $\gamma$ . Видно, что неодноточность по величине нелинейной диссипации приводит к существенным изменениям в устройстве плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи). У языков синхронизации происходит образование выступов в сторону больших значений частотной расстройки. Размер выступа вдоль линии ча-

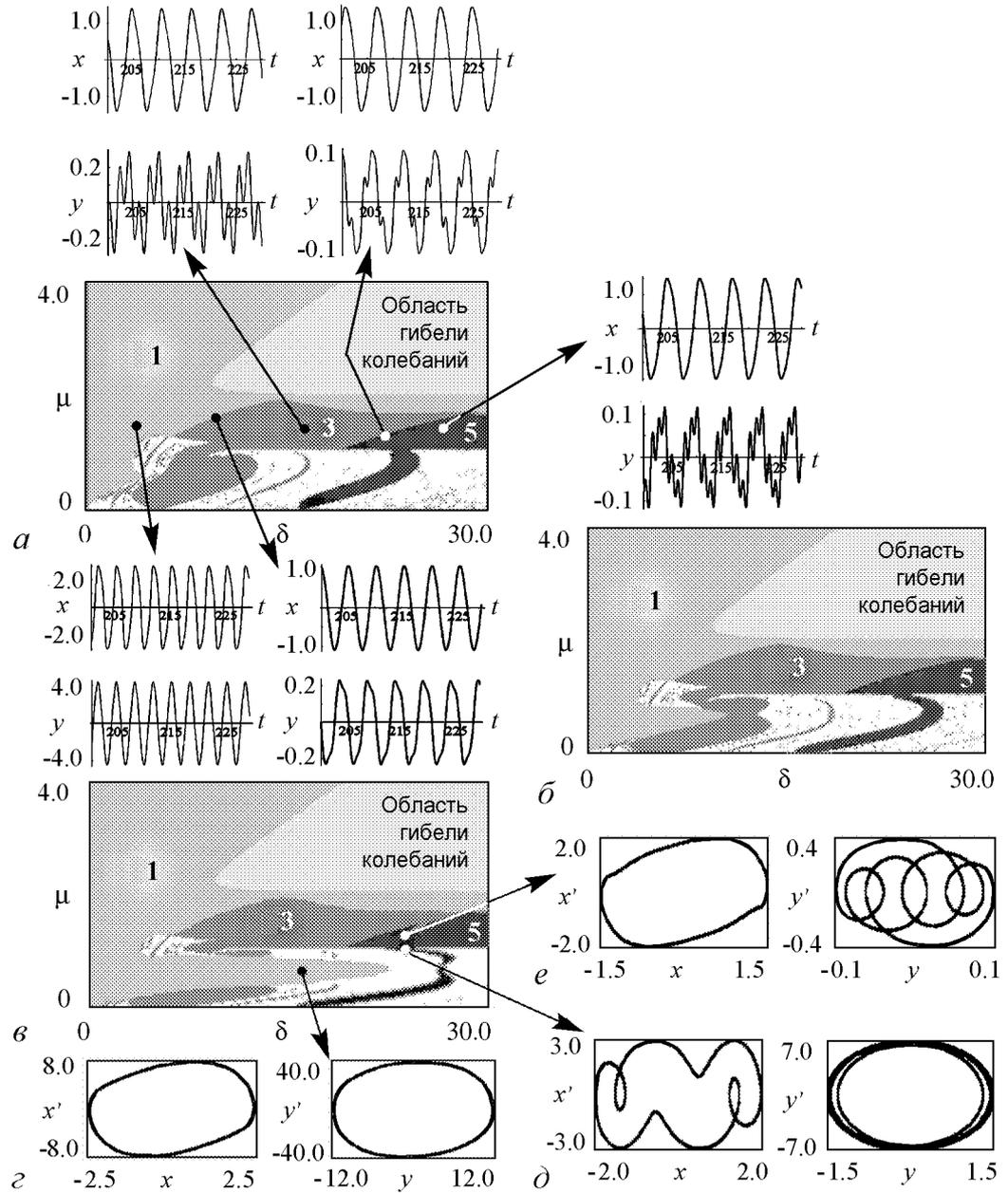


Рис. 3. Карты динамических режимов системы (3) при  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\gamma = 0.05$  (*a*),  $\gamma = 0.02$  (*б*),  $\gamma = 0.01$  (*в*). На вставках к рис. *a* – характерные реализации первого и второго осцилляторов в области  $\mu > \lambda_2$ . На вставках к рис. *в* – фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров (*г–е*)

стотной расстройке увеличивается по мере уменьшения параметра  $\gamma$ . На рис. 3, б, в видно, что основной язык синхронизации (цифра 1 на карте) в области малой связи очень резко расширяется, а с ростом величины связи сильно уменьшается по ширине. При  $\mu \approx \lambda_2$  граница области синхронизации снова уходит в область больших расстройек. В результате возникает специфическая форма границы основного языка синхронизации с «перетяжкой», напоминающая зеркально отраженную букву S.

Наблюдаемая картина имеет следующее физическое объяснение. В области малой связи различие осцилляторов по управляющим параметрам не существенно. Однако за счет очень малой относительной нелинейной диссипации второй осциллятор имеет гораздо больший размер предельного цикла, чем первый осциллятор, и доминирует над ним. В свою очередь, при переходе через линию  $\mu = \lambda_2$  автоколебания второго осциллятора будут «погашены» за счет диссипативной связи. Теперь начнет доминировать первый осциллятор. В промежуточной области по величине связи осцилляторы могут быть равноправными.

Сказанное подтверждают фазовые портреты на рис. 3. На рис. 3, г можно видеть ситуацию, отвечающую колебаниям осцилляторов внутри характерного «выступа» основного языка синхронизации. При этом размер аттрактора второго осциллятора заметно больше, чем у первого (см. масштабы по осям координат). Таким образом, второй осциллятор доминирует. Эта картина как раз имеет место внутри S-образной области при небольшой связи. Рис. 3, д отвечает ситуации  $\mu \approx \lambda_2$ . Можно видеть, что размеры предельных циклов первого и второго осцилляторов примерно сравнялись. Тем не менее, имеется существенное отличие от аналогичных фазовых портретов на рис. 2, г, где существенно возмущенным выглядит фазовый портрет второго осциллятора, а фазовый портрет первого близок по форме к случаю изолированного осциллятора. На рис. 3, д имеет место противоположная ситуация. Далее, при смещении по величине связи внутрь полосы «широкополосной синхронизации» переходим от рис. 3, д к рис. 3, е. Теперь возмущенным выглядит фазовый портрет второго осциллятора, при этом его размер заметно уменьшился. Это означает, что в системе сменился «лидер» – теперь доминирует первый осциллятор.

### 3. Бифуркационный анализ неидентичных осцилляторов

Для более полного описания наблюдаемой картины представим также найденные численно линии основных бифуркаций системы (3) для  $\gamma = 0.05$  и  $\gamma = 0.015$  (рис. 4). Можно видеть, что в области  $\mu < \lambda_2$  картина бифуркаций соответствует полученным картам динамических режимов. Для улучшения восприятия на рис. 4 цифры, обозначающие области периода 1 и 3, показаны в кружочках, цвет заполнения которых выбран таким же, как на картах динамических режимов этих периодов. На рис. 4, а можно видеть, что граница основного языка синхронизации при малых значениях связи определяется линией седло-узловой бифуркации SN, которая, однако, заканчивается в точке коразмерности два,  $R_1$  (в точке резонанса 1 : 1, по терминологии [22]). Ее продолжает линия бифуркации Неймарка–Сакера NS, которая теперь ограничивает основную область синхронизации. Линия Неймарка–Сакера продолжается и при больших амплитудах, поворачивая в сторону больших частотных расстройек. При этом, однако, она состоит из отрезков, ограниченных точками  $R_1$ .

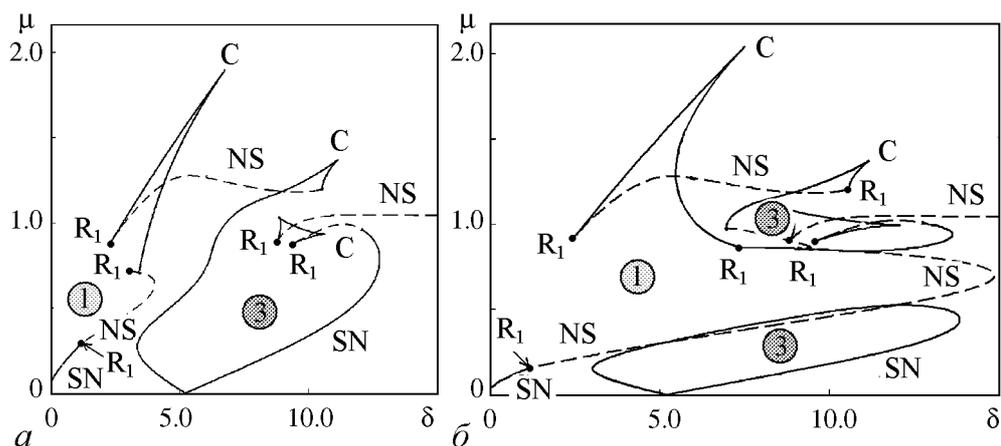


Рис. 4. Бифуркационные линии и точки системы (3) при  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\gamma = 0.05$  (а),  $\gamma = 0.015$  (б); SN – линии седло-узловых бифуркаций, NS – линии бифуркаций Неймарка–Сакера, C – точки сборки,  $R_1$  – точки резонанса 1 : 1

Переход от рис. 4, а к рис. 4, б иллюстрирует, как при уменьшении параметра неидентичности по нелинейной диссипации  $\gamma$ , величина «выступа» области основной синхронизации периода 1 увеличивается настолько, что она достигает языка периода 3. В результате последний распадается на две изолированных области – при малой и большой величине параметра связи. Эти же особенности видны и на картах динамических режимов рис. 3, б, в.

С другой стороны, имеющие место на картах режимов при  $\mu > \lambda_2$  границы областей, обозначенных цифрами 1, 3, 5, не связаны с какими-либо бифуркациями. В то же время, при переходе из одной такой области в другую тип режима испытывает определенные перестройки. Этот факт иллюстрируют реализации  $x(t)$  и  $y(t)$  первого и второго осцилляторов на вставках на рис. 3, а. Можно видеть, что определенные формальным образом периоды колебаний<sup>2</sup> первого и второго осцилляторов совпадают, так что во всей этой полосе с этой точки зрения можно говорить о синхронизации с соотношением частот осцилляторов 1 : 1. Однако при переходе из областей, обозначенных на карте как 1, 3, 5, реализация второго осциллятора наряду с основным периодом демонстрирует заметные осцилляции с утроенной частотой, частотой в пять раз больше и т.д. Таким образом, в спектре колебаний второго осциллятора будут существенно проявляться и эти частотные составляющие, а не только основная частота. В этом особенность «переходной» области  $\lambda_2 < \mu < \lambda_1$ . На фазовых портретах, как мы отмечали, такие переходы связаны с появлением у аттрактора петель, которые пересекают ось  $\dot{y} = 0$ .

#### 4. Анализ неидентичных осцилляторов в квазигармоническом приближении

Мы обсудили динамику системы в рамках исходной системы уравнений (3) и продемонстрировали, что в системе возможны режимы, связанные с доминированием одного осциллятора над другим и сменой лидирующего осциллятора при усло-

<sup>2</sup>Здесь они понимаются в традиционном смысле, то есть как временные периоды зависящих от времени функций.

вии неидентичности осцилляторов по управляющим параметрам  $\lambda_1, \lambda_2$  и параметру нелинейной диссипации. Были рассмотрены случаи, когда параметры  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют величину порядка единицы. Рассмотрим теперь случай, когда эти параметры являются малыми. Это позволяет применить квазигармоническое приближение [1,19] и провести аналитическое рассмотрение. Мы покажем, что анализ в этом случае также выявляет характерные режимы доминирования разных осцилляторов.

Итак, пусть параметры  $\lambda_1, \lambda_2$  малы. Вслед за [19] представим переменные в виде

$$x = \frac{1}{2}(ae^{it} + a^*e^{-it}), \quad y = \frac{1}{2}(be^{it} + b^*e^{-it}), \quad (4)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  – комплексные амплитуды, медленно меняющиеся на фоне осциллирующего множителя  $e^{it}$ .

Вместо двух действительных функций  $x(t)$  и  $y(t)$  мы ввели две комплексные, поэтому их можно подчинить дополнительному условию [19]

$$\frac{1}{2}(\dot{a}e^{it} + \dot{a}^*e^{-it}) = 0, \quad \frac{1}{2}(\dot{b}e^{it} + \dot{b}^*e^{-it}) = 0. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (3), умножая обе части на  $e^{-it}$  и отбрасывая быстроосциллирующие слагаемые, получаем следующие укороченные уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\lambda_1 a}{2} - \frac{|a|^2 a}{8} - \frac{\mu}{2}(a - b), \\ \frac{db}{dt} &= \frac{\lambda_2 b}{2} - \frac{\gamma |b|^2 b}{8} - \frac{\mu}{2}(b - a) + \frac{i\delta b}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  параметр  $\lambda$  может быть убран перенормировкой, так что динамика системы не зависит от его величины [16,14]. В нашем случае можно устранить перенормировкой только один из управляющих параметров, так что решение будет зависеть от отношения  $\nu = \lambda_1/\lambda_2$ . Введем следующую замену переменных и параметров:

$$a = 2\sqrt{\lambda_2}z, \quad b = 2\sqrt{\lambda_2}w, \quad t = 2\pi/\lambda_2, \quad \mu = \lambda_2\bar{\mu}, \quad \delta = \lambda_2\bar{\delta}. \quad (7)$$

Это приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= \nu z - |z|^2 z - \mu(z - w), \\ \frac{dw}{d\tau} &= w - \gamma |w|^2 w - \mu(w - z) + i\delta w. \end{aligned} \quad (8)$$

Для сокращения записи черту над новыми нормированными параметрами опускаем. В полученных нормированных уравнениях (8) все параметры теперь можно полагать порядка единицы [16].

Получим теперь уравнения для действительных амплитуд и фаз осцилляторов. С этой целью полагаем  $z = Re^{i\varphi_1}$  и  $w = re^{i\varphi_2}$ , где  $R, r$  и  $\varphi_1, \varphi_2$  – действительные амплитуды и фазы. Вводя также относительную фазу осцилляторов  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,

получим

$$\begin{aligned}\frac{dR}{d\tau} &= (\nu - \mu)R - R^3 + \mu r \cos \psi, \\ \frac{dr}{d\tau} &= (1 - \mu)r - \gamma r^3 + \mu R \cos \psi, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \delta - \mu \left( \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin \psi.\end{aligned}\tag{9}$$

Это обобщение известных уравнений квазигармонического приближения [1] на случай неидентичных осцилляторов.

Из стационарной системы уравнений (9) при условии малости слагаемых  $\mu R \cos \psi$  и  $\mu r \cos \psi$  получим оценки для установившихся амплитуд предельных циклов осцилляторов

$$R \approx \sqrt{\nu - \mu}, \quad r \approx \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma}}.$$

Подставляя эти соотношения в фазовое уравнение системы (9), получаем уравнение Адлера для относительной фазы осцилляторов

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \delta - \mu \left( \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} \right) \sin \psi.\tag{10}$$

В стационарном случае

$$\delta = \mu \left( \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} \right) \sin \psi.\tag{11}$$

Отсюда при  $\sin \psi = 1$  следует выражение для границы основного языка синхронизации:

$$\delta = \mu \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}} + \mu \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}}.\tag{12}$$

При этом должны выполняться условия  $\mu < 1$  и  $\mu < \nu$ .

Для случая идентичных осцилляторов  $\nu = 1$ ,  $\gamma = 1$  из (10) получаем уравнение для относительной фазы осцилляторов

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \delta - 2\mu \sin \psi.\tag{13}$$

Это хорошо известный результат для диссипативно связанных идентичных осцилляторов [1]. Уравнение (13) позволяет определить границу основного языка синхронизации в этом случае<sup>3</sup>

$$\delta = 2\mu\tag{14}$$

На рис. 5 эта граница показана пунктиром.

Перейдем теперь к случаю неидентичных по управляющим параметрам осцилляторов. На рис. 5 сплошной линией показана найденная с помощью (12) граница

<sup>3</sup>В силу симметрии при анализе фазового уравнения будем рассматривать только область положительных расстройк  $\delta$ .

основного языка синхронизации при  $\nu = \lambda_1/\lambda_2 = 2$ ,  $\gamma = 1$ . У своего основания в области малой связи  $\mu$  язык имеет традиционную форму «угла». Действительно, при малых  $\mu$  из (12) получаем

$$\delta \approx \mu \sqrt{\frac{1}{\nu}} + \mu \sqrt{\nu} = \mu \left( \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \right). \quad (15)$$

Визуально языки синхронизации на рис. 5 имеют одинаковый наклон у своего основания. Это связано с тем, что множитель  $\left( \sqrt{\lambda_2/\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} \right)$  минимален при равенстве  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Соответственно, он мало меняется при вариации отношения  $\nu = \lambda_1/\lambda_2$ . На самом деле, язык оказывается несколько более широким, чем в случае идентичных подсистем.

Наиболее существенные изменения наблюдаются в области больших значений расстройки  $\delta$ . В этой области найденная с помощью соотношения (12) граница языка асимптотически стремится к линии  $\mu = 1$ . (В размерных переменных с учетом (7) это отвечает  $\mu \rightarrow \lambda_2$ .)

Добавим теперь неидентичность и по величине нелинейной диссипации. На рис. 6, а показана полученная с помощью (12) граница основного языка синхронизации при  $\nu = \lambda_1/\lambda_2 = 2$ ,  $\gamma = 0.01$ . Она имеет характерный вид с «перетяжкой». Покажем, что такой вид границы обусловлен сменой лидирующего осциллятора.

Формула (12) содержит два слагаемых:

$$\delta = \delta_1(\mu) + \delta_2(\mu) = \mu \sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}} + \mu \sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}}. \quad (16)$$

Графики функций  $\delta_1(\mu)$  и  $\delta_2(\mu)$  показаны на рис. 6, б, так что кривая рис. 6, а в соответствии с (16) получается их суммированием по оси частотных расстроек.

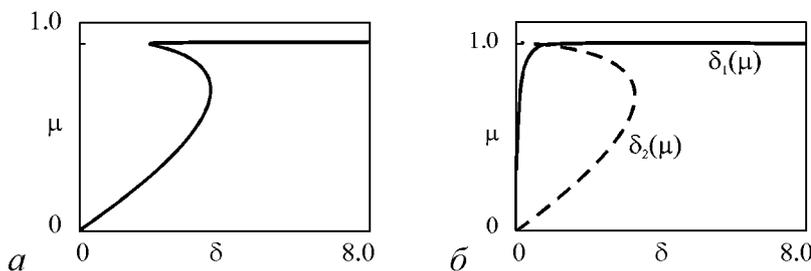


Рис. 6. Графики функций:  $\delta(\mu)$  в соответствии с уравнением (16) (а);  $\delta_1(\mu)$  в соответствии с уравнением (18) (сплошная линия) и  $\delta_2(\mu)$  в соответствии с уравнением (19) (пунктирная линия) (б) при  $\nu = 2$ ,  $\gamma = 0.01$

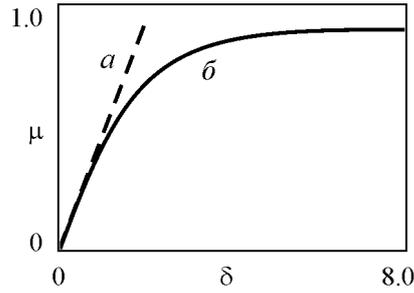


Рис. 5. Граница основного языка синхронизации:  $\delta = 2\mu$  (пунктирная линия) (а) и в соответствии с уравнением (12) при  $\nu = 2$ ,  $\gamma = 1$  (сплошная линия) (б)

Каждому из двух членов в (16) можно придать физическую интерпретацию. Действительно, «выключим» в (3) воздействие второго осциллятора на первый:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda_1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x + \mu\frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda_2 - \gamma y^2)\frac{dy}{dt} + (1 + \delta)y + \mu\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Проводя для этого случая выкладки по приведенному выше образцу, без труда получаем выражение для границы основного языка синхронизации для системы (17):

$$\delta = \delta_1(\mu) = \mu\sqrt{\frac{\gamma(\nu - \mu)}{1 - \mu}}. \quad (18)$$

Таким образом, первое слагаемое в уравнении (16) отвечает ситуации, когда второй осциллятор не действует на первый, то есть первый доминирует. Граница языка (18) показана на рис. 6, б сплошной линией. Качественно она соответствует линии «б» на рис. 5 за тем лишь исключением, что язык у основания очень узкий за счет малой нелинейной диссипации второго осциллятора.

Совершенно аналогично можно показать, что случаю выключенного воздействия первого осциллятора на второй отвечает уравнение

$$\delta = \delta_2(\mu) = \mu\sqrt{\frac{1 - \mu}{\gamma(\nu - \mu)}}. \quad (19)$$

Таким образом, второе слагаемое в (16) соответствует доминированию второго осциллятора.

График функции  $\delta_2(\mu)$  также показан на рис. 6, б пунктирной линией. Объясним его вид. В области малых  $\mu$

$$\delta_2(\mu) \approx \mu\sqrt{\frac{1}{\gamma\nu}} = \mu\sqrt{\frac{\lambda_2}{\gamma\lambda_1}}. \quad (20)$$

Эта оценка отвечает невозмущенным связью орбитам осцилляторов  $R \approx \sqrt{\nu}$ ,  $r \approx \sqrt{1/\gamma}$ . При этом реализуется режим вынужденной синхронизации первого осциллятора сигналом второго, размер предельного цикла которого при малых  $\gamma$  очень велик. По этой причине форма языка у основания на плоскости  $(\delta, \mu)$  имеет вид традиционного «угла», но наклон его, в соответствии с (20), мал.

С ростом уровня связи начинает заметно уменьшаться орбита второго осциллятора, обращаясь в ноль при условии  $\mu = 1$ . В этом случае уже не проявляется заметный эффект синхронизации и, в соответствии с (19) и рис. 6, б (пунктирная линия), ширина области синхронизации стремится к нулю.

Суммарный график, учитывающий взаимное влияние осцилляторов, приведен на рис. 6, а. Можно видеть, как два описанных механизма синхронизации в сумме приводят к характерной границе языка с «перетяжкой». То есть, форма языка, действительно, связана со сменой доминирующего осциллятора при возрастании уровня диссипативной связи.

Таким образом, в случае малых управляющих параметров квазигармонический анализ также выявляет картину смены лидирующего осциллятора, что на плоскости параметров (частотная расстройка – величина связи) приводит к возникновению характерной «перетяжки» у основного языка синхронизации. При малых  $\lambda$  во всем диапазоне изменения величины связи границей языка является линия седло-узловой бифуркации. При  $\lambda$  порядка единицы, как мы видели в п. 3, с ростом связи она заменяется линией бифуркации Неймарка–Сакера.

### 5. Экспериментальная система с неидентичными управляющими параметрами

Перейдем теперь к описанию экспериментов. Исследованная схема связанных генераторов показана на рис. 7. Каждый генератор включает в себя колебательный контур, образованный катушкой индуктивности  $L_{1,2}$  и конденсатором  $C_{1,2}$ , линейное отрицательное сопротивление ( $-R_{1,2}$ ), которое обеспечивает возбуждение автоколебаний, и дополнительное сопротивление в виде шести полупроводниковых диодов, которое вносит необходимую нелинейность. Для создания отрицательного сопротивления использовался операционный усилитель. В качестве элемента связи используется переменный резистор  $R$ .

Продемонстрируем применимость уравнений ван дер Поля к данной системе. По закону Кирхгофа сумма токов в узлах, обозначенных  $U_1$  и  $U_2$  на рис. 7, равна нулю:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{U_2 - U_1}{R},$$

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 + \tilde{I}_4 = \frac{U_1 - U_2}{R}.$$
(21)

Здесь  $I_1$  – ток через нелинейное сопротивление в первом генераторе,  $I_2$  – ток через отрицательное сопротивление ( $-R_1$ ),  $I_3$  – ток через катушку индуктивности  $L_1$ ,  $I_4$  – ток через конденсатор  $C_1$ . Знаком «тильда» обозначены соответствующие токи во втором контуре.

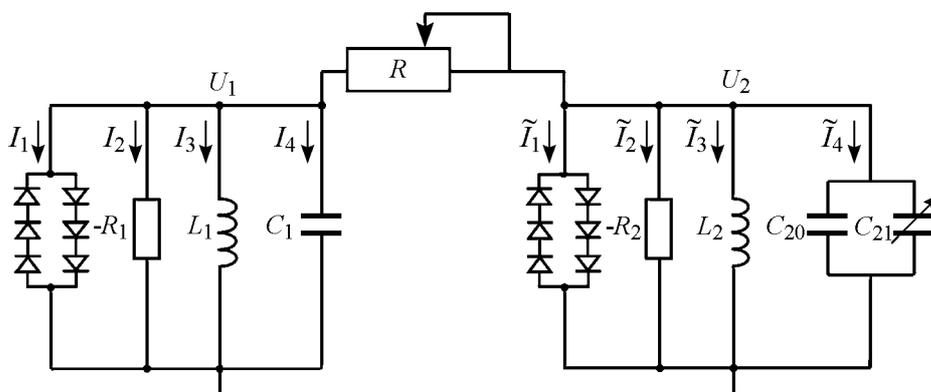


Рис. 7. Схема двух связанных автогенераторов с различными управляющими параметрами

Подставляя в соотношения (21) выражения для токов в каждой из ветвей цепи и дифференцируя соответствующие уравнения по времени, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} - f'(U_1) \right) \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{C_1 L_1} U_1 &= \frac{1}{RC_1} \left( \frac{dU_2}{dt} - \frac{dU_1}{dt} \right), \\ \frac{d^2U_2}{dt^2} - \frac{1}{C_2} \left( \frac{1}{R_2} - f'(U_2) \right) \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{C_2 L_2} U_2 &= \frac{1}{RC_2} \left( \frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Для описания вольтамперной характеристики диода можно использовать выражение  $f(U) = I_0(e^{U/\varphi} - 1)$ , где  $I_0$  – ток насыщения диода,  $\varphi = kT/e$  – температурный потенциал,  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана,  $T$  – температура,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона. Три последовательно включенных диода будут описываться характеристикой  $f(U) = I_0(e^{U/3\varphi} - 1)$ , а система встречно-параллельных диодов – соотношением  $f(U) = I_0(e^{U/3\varphi} - e^{-U/3\varphi})$ . Разложим экспоненту в ряд до кубических членов:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \quad (23)$$

Тогда  $f(U) = I_0 \left( \frac{2U}{3\varphi} + \frac{U^3}{81\varphi^3} \right)$  и  $f'(U) = I_0 \left( \frac{2}{3\varphi} + \frac{U^2}{27\varphi^3} \right)$ , а система (22) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_1}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} U_1^2 \right] \frac{dU_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1} U_1 &= \frac{1}{RC_1} \left( \frac{dU_2}{dt} - \frac{dU_1}{dt} \right), \\ \frac{C_2}{C_1} \frac{d^2U_2}{dt^2} - \frac{1}{C_1} \left[ \left( \frac{1}{R_2} - \frac{2I_0}{3\varphi} \right) - \frac{I_0}{27\varphi^3} U_2^2 \right] \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{L_2 C_1} U_2 &= \frac{1}{RC_1} \left( \frac{dU_1}{dt} - \frac{dU_2}{dt} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Итак, мы имеем уравнения, аналогичные по структуре (3), но в размерной форме. Регулируя отрицательные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , можно варьировать управляющие параметры отдельных автогенераторов. Величину связи можно менять, варьируя  $R$ , причем для сопоставления теории и эксперимента следует в качестве параметра связи использовать  $1/R$ .

В эксперименте  $R_1 = -410$  Ом,  $C_1 = 20$  нФ,  $L_1 = L_2 = 0.947$  Гн. Общее сопротивление  $R$  меняется от 1 до 310 кОм, а емкость  $C_2$  – от 1.05 до 21.8 нФ. Неидентичность генераторов достигается путем изменения отрицательного сопротивления второго генератора  $R_2$  на небольшую величину от значения  $R_1 = -410$  Ом. В качестве частотной расстройки используется параметр  $\delta = C_1/C_2$ .

Полученная экспериментально карта динамических режимов представлена на рис. 8. На ней присутствуют те же характерные области, что и на картах режимов, полученных с помощью численных методов: область основной синхронизации, язык синхронизации периода 3, области гибели колебаний и квазипериодических режимов. В случае неидентичных по величине отрицательного сопротивления генераторов граница между областью гибели колебаний и квазипериодических режимов из линии превращается в полосу конечной ширины по параметру связи, далеко простирающуюся в сторону увеличения частотной расстройки.

На рис. 8 представлены также фазовые портреты, построенные в характерных точках плоскости параметров, полученные с помощью электронного осциллографа.

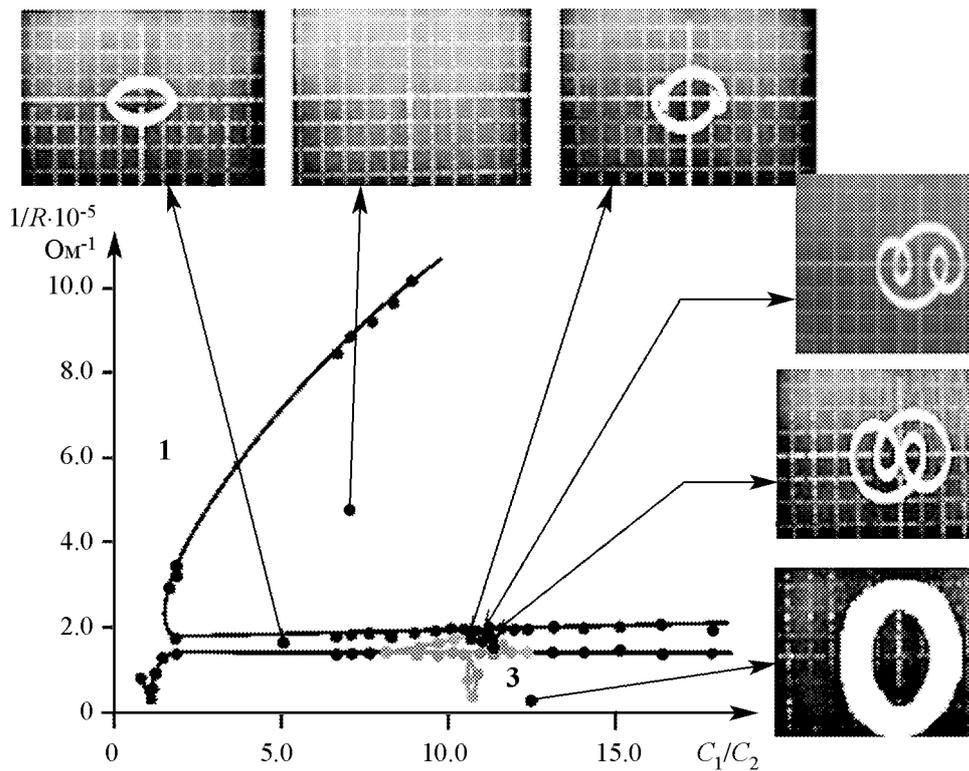


Рис. 8. Экспериментальная карта динамических режимов системы связанных автогенераторов с различными управляющими параметрами и фазовые портреты в характерных точках плоскости параметров, сфотографированные с экрана осциллографа

Внутри области гибели колебаний мы видим точку на экране осциллографа. Режиму, обозначенному на плоскости параметров цифрой 1, отвечает простой «однооборотный» предельный цикл. При продвижении внутри полосы на фазовом портрете второго генератора можно наблюдать характерное увеличение числа петель. Квазипериодический режим выглядит как «замазанный» предельный цикл. При этом полученная экспериментально карта на рис. 8 хорошо согласуется с полученной численно картой динамических режимов на рис. 2.

## 6. Экспериментальная система с неидентичными параметрами нелинейной диссипации

Для экспериментальной проверки результатов неидентичных по параметру  $\gamma$  осцилляторов необходимо обеспечить разный уровень нелинейной диссипации автогенераторов. Это достигалось включением разного количества диодов. В одном генераторе их было десять, а во втором – два. Тогда для вольт-амперной характеристики системы диодов имеем

$$\begin{aligned} f_1(U) &= I_0(e^{U/5\varphi} - e^{-U/5\varphi}), \\ f_2(U) &= I_0(e^{U/\varphi} - e^{-U/\varphi}). \end{aligned} \quad (25)$$

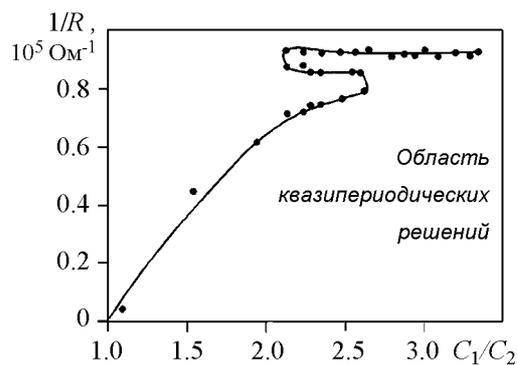


Рис. 9. Экспериментально полученная граница области основной синхронизации и квазипериодических режимов для автогенераторов с различными управляющими параметрами и неидентичных по уровню нелинейной диссипации

расстройка  $C_1/C_2$  – уровень диссипативной связи  $1/R$ ) показана на рис. 9. Можно видеть, что в эксперименте наблюдается характерная граница основного языка с «перетяжкой», выявленная как при численном исследовании системы (3), так и с помощью аналитического исследования в рамках квазигармонического приближения.

Разлагая в ряд, получим для производных

$$f'_1(U) = I_0 \left( \frac{2}{5\varphi} + \frac{U^2}{125\varphi^3} \right) + \dots,$$

$$f'_2(U) = I_0 \left( \frac{2}{\varphi} + \frac{U^2}{\varphi^3} \right) + \dots \quad (26)$$

Таким образом, отношение параметров нелинейной диссипации составляет  $\gamma = 1/125 = 0.008$ . Экспериментально полученная граница режима синхронизации автогенераторов с соотношением частот 1 : 1 и области квазипериодических режимов на плоскости (частотная

### Заключение

Для понимания картины синхронизации автоколебательных осцилляторов важным является случай, когда осцилляторы различаются по величине параметров, управляющих бифуркацией Андронова–Хопфа и величиной нелинейной диссипации. В такой системе при наличии диссипативной связи возможно доминирование как первого, так и второго осцилляторов, а также ситуация постепенной смены доминирующего осциллятора при увеличении связи. Эти физические особенности системы существенным образом проявляются в устройстве плоскости (частотная расстройка – величина связи) осцилляторов. Отчасти эти особенности могут быть выявлены в квазигармоническом приближении, а также наблюдаются в экспериментах со связанными радиофизическими автогенераторами ван дер Поля.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-0070, а также гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738.*

### Библиографический список

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация, фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.
3. Cohen D.S., Neu J.C. Interacting oscillatory chemical reactors // Bifurcation theory

- and applications in the scientific disciplines / Ed. O. Gurel and O.E. Rössler. Ann. N.Y. Acad. Sci. 316. 1979. P. 332.
4. *Neu J.C.* Coupled chemical oscillators // SIAM J. appl. Math. 1979. Vol. 37, № 2. P. 307.
  5. *Minorsky N.* Nonlinear oscillators. Van Nostrand, 1962.
  6. *Rand R.H., Holmes P.J.* Bifurcation of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
  7. *Chakraborty T., Rand R.H.* The transition from phase locking to drift in a system of two weakly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23, № 5/6. P. 369.
  8. *Chakraborty T.* Bifurcation analysis of two weakly coupled van der Pol oscillators. Doctoral thesis. Cornell University, 1986.
  9. *Storti D.W., Rand R.H.* Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17, № 3. P. 143.
  10. *Pastor-Diaz I., Lopez-Fraguas A.* Dynamics of two coupled van der Pol oscillators // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 1480.
  11. *Pavlidis T.* Biological oscillators: The Mathematical Analysis. Academic press, 1973.
  12. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Chaos and nonisochronism in weakly coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 3452.
  13. *Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W.* Hysteresis of synchronous – asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43. P. 5638.
  14. *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev V.D., Kurths J.* Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators // Physica D. 2004. Vol. 189, № 1–2. P. 8.
  15. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* Особенности устройства пространства параметров двух связанных осцилляторов ван дер Поля–Дуффинга // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 4. С. 3.
  16. *Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Тюрюкина Л.В.* Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля–Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, № 4. С. 101.
  17. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе связанных осцилляторов ван дер Поля, неидентичных по управляющему параметру // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, вып. 15. С. 15.
  18. *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* Особенности синхронизации в системе неидентичных связанных осцилляторов ван дер Поля и ван дер Поля – Дуффинга. Широкополосная синхронизация // Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 4. С. 3.
  19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
  20. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.

21. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.  
 22. Kuznetsov Yuri A. Elements of applied bifurcation theory. New York: Springer, 1998. 593 p.

Саратовский государственный  
 университет, СФ ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 22.07.2009

## SYNCHRONIZATION IN COUPLED SELF-SUSTAINED OSCILLATORS WITH NON-IDENTICAL PARAMETERS

*A.P. Kuznetsov, Yu.P. Emelianova, E.P. Seleznev*

The particular properties of dynamics are discussed for dissipatively coupled van der Pol oscillators, non-identical in values of parameters controlling the Andronov–Hopf bifurcation and nonlinear dissipation. Possibility of a special synchronization regime in an infinitively long band between oscillator death and quasiperiodic areas is shown for such system. Non-identity of parameters of nonlinear dissipation results in specific form of the boundary of the main synchronization tongue, which looks like the mirror letter S. These physical features are partly revealed by means of quasiharmonic approximation and are observed in the experiments with coupled radio-electronic generators.

*Keywords:* Synchronization, van der Pol oscillator, oscillator death, dynamic regime chart.

*Емельянова Юлия Павловна* – родилась 17 февраля 1987 года в Венгрии г. Секешфехервар, окончила факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского с красным дипломом в 2009 году. Занимается научной работой под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.П. Кузнецова с 2002 года. Научные интересы – исследование особенностей синхронизации в связанных осцилляторах ван дер Поля. Победитель студенческих научных конференций факультета нелинейных процессов СГУ, лауреат фонда поддержки фундаментальной физики «Династия» (2008), признана лучшим студентом ФНП в 2006/07 и 2007/08 учебных годах. Лауреат стипендии Президента РФ как «студент – отличник, проявивший выдающиеся способности в учебной и научной деятельности» (2008/09). Автор 14 публикаций, в том числе 5-ти статей в российских и международных журналах.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал института радиотехники и электроники  
 им. В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: yuliaem@gmail.com

*Селезнев Евгений Петрович* – родился в 1960 году в Саратове, окончил Саратовский государственный университет (1982). После окончания СГУ работает ведущим научным сотрудником Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990) и доктора физико-математических наук (2006). Область научных интересов – радиофизика, экспериментальное исследование нелинейных явлений. Имеет более 120 научных публикаций.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал института радиотехники и электроники  
 им. В.А. Котельникова РАН  
 E-mail: evgenii\_seleznev@mail.ru