

09

## Интервальные оценки времени запаздывания связи по временным рядам

© Д.А. Смирнов, Е.В. Сидак, Б.П. Безручко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: smirnovda@yandex.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2010 г.

Необходимость оценки запаздывания в связях между элементами колебательных ансамблей возникает при анализе систем различной природы, а для ее получения зачастую имеются лишь дискретные записи (временные ряды) наблюдаемых колебаний. Рассматривается такое оценивание в случае относительно коротких временных рядов и наличия шумов. На основе известной точечной оценки, основанной на моделировании фазовой динамики, предлагается интервальная оценка: введена поправка, устраняющая смещение точечной оценки, и получена формула для доверительного интервала на основе формализма максимального правдоподобия. Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется в численном эксперименте на системе осцилляторов.

Выявлению запаздывающих связей в структуре нелинейных колебательных систем и количественной оценке времени запаздывания, которое является важной характеристикой, во многом определяющей сложность наблюдаемой динамики, посвящен ряд недавних исследований [1–5]. Интерес к таким системам обусловлен их широкой распространенностью в различных областях — от радиотехники [5] до геофизики [6]. В общем случае знание запаздывания важно для понимания структуры и механизма взаимодействия элементов ансамблей. В частности, при исследовании пространственно отделенных друг от друга систем время запаздывания может характеризовать свойства среды, в которой распространяется возмущение, обеспечивающее воздействие одной системы на другую. Наиболее актуальна задача оценки запаздывания связей по данным наблюдений (временным рядам) в условиях нестационарности наличия шумов, помех или других причин, ограничивающих длительность наблюдаемых временных рядов [7,8]. Точечная оценка времени запаздывания связи между колебательными

системами, основанная на моделировании их фазовой динамики, предложена в работе [4]. Аналогичный подход применялся в [8,9]. Однако при анализе коротких временных рядов и наличии шумов важно получить доверительный интервал, показывающий погрешность оценки, чтобы делать достоверный вывод о наличии запаздывания. В данной работе предлагается такая интервальная оценка, и работоспособность подхода иллюстрируется в численном эксперименте.

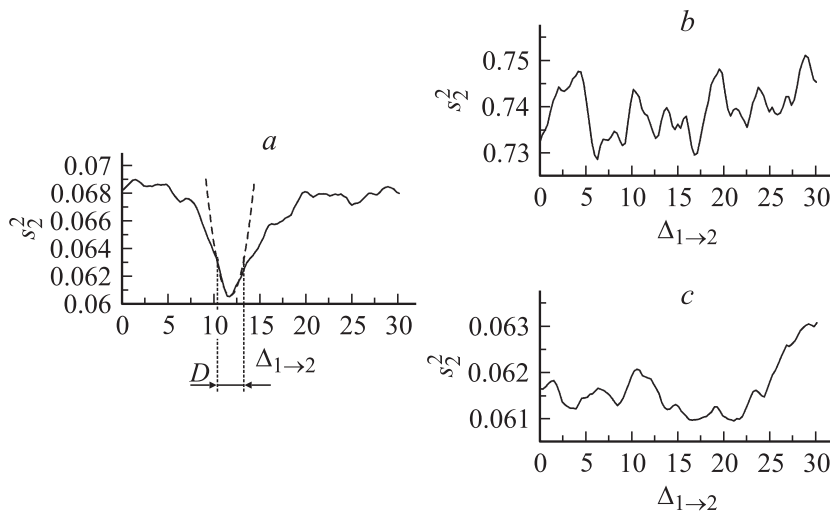
Согласно известному подходу [4], который наиболее чувствителен к слабым связям между колебательными системами, сначала переходят от записей колебаний наблюдаемых величин  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  к временным рядам фаз колебаний [10]:  $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$  и  $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$ , где  $t_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  — интервал выборки,  $N$  — длина ряда. Затем строится эмпирическая модель фазовой динамики  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Форма модельных уравнений выбирается с учетом того, что фазовая динамика периодических автоколебательных систем, возмущенных слабыми шумами и слабо связанными, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [11,12] вида

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(t)}{dt} &= \omega_1 + G_1(\phi_1(t), \phi_2(t - \Delta_{2 \rightarrow 1}^*)) + \xi_1(t), \\ \frac{d\phi_2(t)}{dt} &= \omega_2 + G_2(\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta_{1 \rightarrow 2}^*)) + \xi_2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\omega_k$  определяет угловую частоту колебаний,  $\xi_k(t)$  — нормальный белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией  $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t - t')$ ,  $\Delta_{2 \rightarrow 1}^*$  и  $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$  — запаздывания. При анализе временных рядов удобнее рассматривать разностные уравнения, которые можно получить путем интегрирования (1) на интервале конечной ширины  $\tau$ :

$$\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k(\phi_k(t), \phi_j(t - \Delta_{j \rightarrow k}^*)) + \varepsilon_k(t), \quad k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$  — нормальный шум с нулевым средним, дисперсией  $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx \sigma_{\xi_k}^2 \tau$  и линейно спадающей до нуля на интервале  $(0, \tau)$  автоковариационной функцией;  $F_k(\phi_k, \phi_j)$  — функции,  $2\pi$ -периодические по обоим аргументам.



**Рис. 1.** Графики зависимости  $s_2^2(\Delta_{1 \rightarrow 2})$  для системы (4), полученные по временному ряду длиной 100 характерных периодов: *a* —  $\sigma_{\xi_1} = 0.6$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.2$ , штриховой линией показана аппроксимирующая парабола; *b* —  $\sigma_{\xi_1} = 0.6$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.7$ ; *c* —  $\sigma_{\xi_1} = 0.1$ ,  $\sigma_{\xi_2} = 0.2$ .

По временным рядам строится модель в форме (2) с тригонометрическими многочленами

$$F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{(m,n) \in \Omega_k} (\alpha_{k,m,n} \cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n} \sin(m\phi_k - n\phi_j)),$$

где  $\Omega_k$  — диапазон суммирования,  $\mathbf{a}_k = (w_k, \{\alpha_{k,m,n}, \beta_{k,m,n}\}_{(m,n) \in \Omega_k})$  — вектор коэффициентов, и пробными временами запаздывания  $\Delta_{2 \rightarrow 1}$  и  $\Delta_{1 \rightarrow 2}$  вместо искоемых истинных значений  $\Delta_{2 \rightarrow 1}^*$  и  $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ . При этом оптимальные значения  $\Delta_{j \rightarrow k}$  и  $\mathbf{a}_k$  в модели определяются методом наименьших квадратов. А именно, при различных фиксированных  $\Delta_{j \rightarrow k}$

минимизируется

$$S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k) = \frac{1}{N - t/\Delta t} \times \sum_{i=1}^{N-t/\Delta t} \left( \phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i) - F_k(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i - \Delta_{j \rightarrow k}), \mathbf{a}_k) \right)^2.$$

Ее минимальное значение  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}) = \min_{\mathbf{a}_k} S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$ , а соответствующие оценки коэффициентов  $\hat{\mathbf{a}}_k(\Delta_{j \rightarrow k}) = \arg \min_{\mathbf{a}_k} S_k(\Delta_{j \rightarrow k}, \mathbf{a}_k)$ . Величина  $s_k^2$  минимизируется как функция  $\Delta_{j \rightarrow k}$  (рис. 1, а). Точка минимума  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k} = \arg \min_{\Delta_{j \rightarrow k}} s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  принимается в качестве точечной оценки запаздывания. Параметр  $\tau$  может быть принят любым, но слишком малые значения ведут к увеличению случайной ошибки оценки  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$  [4], а слишком большие — к росту смещения оценки  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$  [9]. Ниже предлагается поправка, устраняющая смещение  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$  при любом  $\tau$ , и выводится формула для дисперсии  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$ . Это позволяет получить интервальную оценку запаздывания.

При изложении принципа максимального правдоподобия [13] базовым примером является оценивание параметра  $a$  для зависимости вида  $y = f(x, a) + \eta$ , где  $\eta$  — гауссовская случайная величина с нулевым средним, статистически независимая от  $x$ . При оценивании по независимой выборке  $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$  минимизируют величину  $S_y^2(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, a))^2$ :  $\hat{a} = \arg \min_a S_y^2(a)$ . Известно, что при достаточно большой длине ряда оценка  $\hat{a}$  распределена по гауссовскому закону с дисперсией  $\sigma_a^2 = \frac{2S_y^2(\hat{a})}{N} \left( \frac{d^2[S_y^2(a)]}{da^2} \Big|_{a=\hat{a}} \right)^{-1}$ . Воспользуемся аналогичным соотношением для определения дисперсии  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$ , но учтем, что значения  $\varepsilon_k(t)$ , разделенные по  $t$  интервалом не более  $\tau$ , статистически зависимы друг от друга. Число независимых значений  $\varepsilon_k$  не меньше, чем  $N\Delta t/\tau$ , поэтому дисперсию  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$  можно оценить сверху как

$$\hat{\sigma}_{\Delta_{j \rightarrow k}}^2 = \frac{2(\tau/\Delta t)s_k^2(\hat{\Delta}_{j \rightarrow k})}{N - \tau/\Delta t} \left( \frac{d^2[s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})]}{d\Delta_{j \rightarrow k}^2} \Big|_{\Delta_{j \rightarrow k}=\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Чтобы найти смещение оценки  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}$ , заметим, что приращение фазы  $\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t)$  в (2) приближенно равно  $(d\phi_k(t')/dt)\tau$ , где  $t'$  — момент времени из отрезка  $(t, t + \tau)$ . С учетом почти линейного роста фазы  $\phi_k(t)$  это приближение является наиболее точным при  $t' = t + \tau/2$ , т.е.  $\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t)$  примерно пропорционально  $d\phi_k(t + \tau/2)dt$ . Значит наименьшая ошибка  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  должна быть достигнута при  $\Delta_{j \rightarrow k}$ , сдвинутом на  $\tau/2$  относительно истинного  $\Delta_{j \rightarrow k}^*$ . Несмещенной оценкой должна быть  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} = \hat{\Delta}_{j \rightarrow k} + \tau/2$ .

При достаточной длине ряда оценка  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr}$  распределена по нормальному закону, так что 95%-ный доверительный интервал для  $\Delta_{j \rightarrow k}^*$  имеет вид  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$ . Чтобы найти  $\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}^2$  по временному ряду, нужно оценить вторую производную в (3). Для этого будем аппроксимировать зависимость  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  квадратичной параболой в окрестности  $D$  точки минимума (рис. 1, *a*). Наши численные эксперименты показали, что использование  $D$  шириной в один характерный период колебаний дает приемлемый результат.

В случае короткого временного ряда зависимость  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  может не иметь одного четкого определенного минимума (рис. 1, *b, c*), тогда предложенный формализм неприменим. Это имеет место в двух случаях. Во-первых, при относительно большом уровне шума в „ведомом“ осцилляторе  $\varepsilon_k$  и слабом воздействии  $j \rightarrow k$  вид графика  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  определяется конкретной реализацией шума  $\varepsilon_k$ , а не связью (рис. 1, *b*). Во-вторых, при малом уровне шума в „ведущем“ осцилляторе  $\varepsilon_j$  значения  $s_k^2$  оказываются практически одинаковы для различных  $\Delta_{j \rightarrow k}$  (рис. 1, *c*), так как значения фазы  $\phi_j(t)$  в разные моменты времени  $t$  практически однозначно связаны друг с другом. Отметим неожиданное на первый взгляд наблюдение, что наличие шума может приводить к полезным результатам. Это подробно рассмотрено и прокомментировано в работе [4].

Предложенная интервальная оценка запаздывания применялась при анализе ансамблей из 100 пар временных рядов от эталонных осцилляторов. По каждой паре рядов рассчитывались значение  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr}$  и 95%-ный доверительный интервал и проверялось, попадает ли  $\Delta_{j \rightarrow k}^*$  в интервал  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$ . Подсчитывалась частота (оценка вероятности) правильных выводов о величине запаздывания  $n_{true}$ , т.е. таких ситуаций, когда  $\Delta_{j \rightarrow k}^*$  принадлежит интервалу  $\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}^{corr} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j \rightarrow k}}$ . Интервальная

оценка применима, если  $n_{true}$  не меньше 0.95, так как доверительный интервал — 95%-ный.

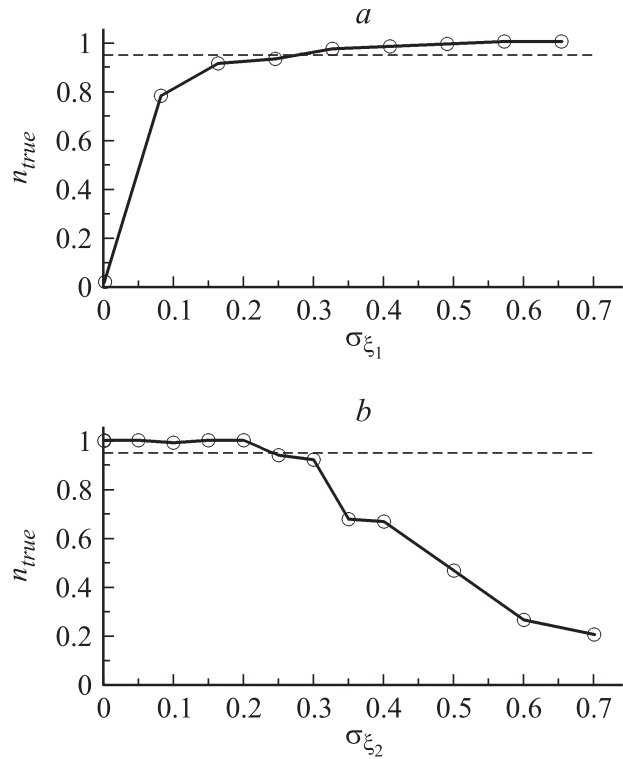
В качестве первой тестовой системы использовались фазовые осцилляторы

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(t)}{dt} &= \omega_1 + \xi_1(t), \\ \frac{d\phi_2(t)}{dt} &= \omega_2 + k \sin(\phi_1(t - \Delta_{1 \rightarrow 2}^*) - \phi_2(t)) + \xi_2(t),\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\omega_1 = 0.95$ ,  $\omega_2 = 1.05$ ,  $k = 0.1$ ,  $\Delta_{1 \rightarrow 2}^* = 12$ . Для получения временных рядов при различных уровнях шума  $\sigma_{\xi_1}^2$ - и  $\sigma_{\xi_2}^2$ -уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде). Длина ряда была принята равной  $N = 2000$ , т.е. примерно 100 характерных периодов. Величина  $\tau$  принималась равной четверти периода ( $\tau = 1.5$ ), но результаты схожи при различных  $\tau$ . Использовались многочлены  $F_k$  3-го порядка аналогично работам [8,9].

На рис. 2, *a* представлен график зависимости  $n_{true}$  от уровня шума в ведущем осцилляторе  $\sigma_{\xi_1}$  при фиксированном  $\sigma_{\xi_2} = 0.2$ . При больших  $\sigma_{\xi_1}$  величина  $n_{true}$  не меньше 0.95, как и требуется. При  $\sigma_{\xi_1} < 0.2$  величина  $n_{true}$  уменьшается, что соответствует ситуации, показанной на рис. 1, *c*. На рис. 2, *b* представлен график зависимости  $n_{true}$  от уровня шума в ведомом осцилляторе  $\sigma_{\xi_2}$  при фиксированном  $\sigma_{\xi_1} = 0.6$ . При небольших  $\sigma_{\xi_2}$  величина  $n_{true}$  не меньше 0.95, а при  $\sigma_{\xi_2} > 0.3$  уменьшается, что соответствует рис. 1, *b*. Тесты проводились также на фазовых осцилляторах при других значениях параметров и на осцилляторах Ван-дер-Поля при различных уровнях шума, коэффициентах связи, расстройке частот. Во всех примерах метод дает верные оценки времени запаздывания, если минимум на графике зависимости  $s_k^2(\Delta_{j \rightarrow k})$  хорошо выражен (аналогично рис. 1, *a*).

Таким образом, в работе предложена интервальная оценка времени запаздывания связи между осцилляторами. Ее эффективность показана в численном эксперименте. Основным содержательным условием применимости метода является адекватность модели (1) с белыми шумами  $\xi_k$  для описания наблюдаемой фазовой динамики. С физической точки зрения время корреляции фазовых шумов в исследуемых системах должно быть гораздо меньше характерного периода колебаний. Поскольку



**Рис. 2.** Вероятность  $n_{true}$  правильного вывода о величине запаздывания  $\Delta_{1 \rightarrow 2}^*$ , рассчитанная по ансамблю реализаций системы (4):  $a$  —  $\sigma_{\xi_2} = 0.2$ ,  $b$  —  $\sigma_{\xi_1} = 0.6$ . Горизонтальной штриховой линией показан уровень 0.95.

эта модель достаточно универсальна [11,12], то предложенная оценка представляется перспективным средством анализа коротких временных рядов для широкого круга практических ситуаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-02-00081), программ РАН и Министерства образования и науки.

## Список литературы

- [1] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // Eur. Phys. J.D. 2000. V. 10. P. 165–185.
- [2] *Voss H.U., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [3] *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513–521.
- [4] *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046213.
- [5] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваяев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. № 3. С. 515–527.
- [6] *Tziperman E., Cane M.A., Zebiak S.E.* et al. // J. Climate. 1998. V. 11. P. 2191–2199.
- [7] *Meeren H.K., Pijn J.P., vanLuijtelaar E.L.* et al. // J. Neurosci. 2002. V. 22. P. 1480–1495.
- [8] *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 5. С. 650–667.
- [9] *Smirnov D., Barnikol U.B., Barnikol T.T.* et al. // Europhys. Lett. 2008. V. 83. P. 20003.
- [10] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* // Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [11] *Kuramoto Y.* // Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [12] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. P. 2291–2305.
- [13] *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* // Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.