



СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ*

Д.А. Смирнов, Е.В. Сидак, Б.П. Безручко

Оценка коэффициента фазовой синхронизации, полученная по временному ряду, может принимать большие значения даже для несвязанных осцилляторов в случае коротких рядов и близких основных частот колебаний. Поскольку такие ситуации часто встречаются на практике, то необходимо уметь их диагностировать, чтобы избежать ошибочных выводов о наличии связи. В работе проводится исследование статистических свойств оценки на эталонном примере – несвязанных фазовых осцилляторах. Количественно определены условия, при которых вероятность получить большие значения оценки велика. На основе проведенного анализа предложен специальный метод подготовки суррогатных данных для контроля статистической значимости результатов оценивания.

Введение

Задача обнаружения синхронизации между колебательными системами важна в различных приложениях [1–3]. Это явление играет существенную роль в нейрофизиологии [3], где определенная степень синхронизации между различными группами нейронов обеспечивает нормальное функционирование мозга [4], но слишком высокий ее уровень свидетельствует о патологии и характерен для таких заболеваний, как эпилепсия [5] и болезнь Паркинсона [6], сопровождающихся нарушениями движения: эпилептические припадки и паркинсоновский тремор. Привлекают значительное внимание исследования синхронизации ритмов сердечно-сосудистой системы [7, 8], климатических процессов [9], и т.д.

Для количественной характеристики синхронизации между двумя осцилляторами используется ряд показателей. В частности, популярны различные коэффициенты фазовой синхронизации, отражающие стабильность разности фаз колебаний; в работах [10, 11] приведен их сравнительный анализ. Наиболее часто используется коэффициент синхронизации

$$\rho = \left| M \exp^{j(\phi_1 - \phi_2)} \right|, \quad (1)$$

где M означает математическое ожидание, ϕ_1 и ϕ_2 – одновременные значения фаз колебаний двух осцилляторов. Величина ρ принимает значения от нуля до единицы. При этом $\rho = 1$ соответствует строго синхронному режиму, когда разность

*По материалам доклада на Школе «Хаос'07», Саратов, 6–10.10.2007.

фаз $\phi_1 - \phi_2$ постоянна. Для несвязанных осцилляторов $\rho = 0$ (при некотором дополнительном условии). Значение ρ можно называть характеристикой степени синхронизации, если под синхронизацией понимать наличие любой, хотя бы и слабой, взаимосвязи между одновременными значениями фаз ϕ_1 и ϕ_2 . Если синхронизацией называть только режим с постоянной разностью фаз, то ρ лучше трактовать как количественную характеристику связи между осцилляторами. Величина ρ имеет много различных названий, например, средняя фазовая когерентность [12].

На практике решается задача оценивания ρ по измеренным временным рядам $\{x_1(t_1), x_1(t_2), \dots, x_1(t_N)\}$ и $\{x_2(t_1), x_2(t_2), \dots, x_2(t_N)\}$, где x_1, x_2 – переменные, характеризующие первый и второй осцилляторы, $t_n = n\Delta t$ – последовательные моменты времени, разделенные интервалом выборки Δt , N – длина ряда. В качестве оценки величины ρ обычно используется соответствующий эмпирический момент

$$\hat{\rho} = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp^{j(\phi_1(t_n) - \phi_2(t_n))} \right|. \quad (2)$$

При достаточно большой длине ряда и эргодичности процессов оценка $\hat{\rho}$ очень близка к истинному значению величины ρ . Однако в практически интересных ситуациях (нестационарные физиологические процессы, короткие ряды геофизических величин и т.д.) длина ряда оказывается довольно малой, не более нескольких десятков характерных периодов колебаний. При этом можно получить близкое к единице значение $\hat{\rho}$ даже для несвязанных осцилляторов.

Аналитически получить уровень статистической значимости отличия $\hat{\rho}$ от нуля не удастся за исключением некоторых специальных попыток, не дающих возможности практического применения [13]. В данной работе проводится подробное исследование вероятностных свойств оценки $\hat{\rho}$ на примере несвязанных фазовых осцилляторов (п. 1) и количественно определяются условия, когда она может принимать большие значения (п. 3).

За отсутствием аналитических формул статистическую значимость полученной оценки определяют с помощью суррогатных данных [14]. Способы приготовления суррогатных данных, предложенные в работах [15, 16] и не предполагающие линейности исследуемых процессов, с некоторыми оговорками соответствуют рассматриваемой ситуации. В данной работе предложен новый способ, основанный на построении модели в виде фазовых осцилляторов (п. 2), который иллюстрируется и сравнивается с двумя указанными способами на эталонном примере в п. 3.

1. Методика исследования свойств оценки

В качестве объекта исследования взяты два несвязанных фазовых осциллятора

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + b_1 \cos \phi_1 + \xi_1(t), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + b_2 \cos \phi_2 + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где переменные ϕ_1 и ϕ_2 – фазы колебаний; параметры $\omega_{1,2}$ определяют угловые частоты; $b_{1,2}$ – коэффициенты фазовой нелинейности; $\xi_{1,2}$ – независимые белые шумы

с автокорреляционными функциями $c_{1,2}(\tau) = \sigma_{1,2}^2 \delta(\tau)$; параметры $\sigma_{1,2}$ определяют интенсивность шумов.

Фазовый осциллятор – достаточно универсальная модель колебательных процессов с явно выраженным основным ритмом [17]. Поэтому исследование свойств оценки $\hat{\rho}$ на этой простой модели даст результаты соответствующей степени общности.

Для пары несвязанных осцилляторов (3) известно, что $\rho = 0$ выполняется в точности при условии отсутствия фазовой нелинейности, то есть при $b_{1,2} = 0$. Однако $\rho \approx 0$ и при умеренном нарушении этого условия.

Для исследования свойств оценки $\hat{\rho}$ численно решались уравнения (3) методом Эйлера с шагом 0.01 при случайных начальных условиях. Получался ансамбль из M пар временных рядов длины N с интервалом выборки Δt . По каждой паре рядов рассчитывалось значение $\hat{\rho}$ и строилась эмпирическая функция распределения, которая содержит достаточно полную информацию о свойствах этой случайной величины. Расчеты проводились при различных значениях N , Δt и параметров осцилляторов.

Для наиболее информативной и компактной иллюстрации результатов мы приводим ниже (п. 3) только две статистические характеристики, полученные по функции распределения: среднее значение ($\hat{\rho}$) и 95-процентный квантиль распределения $\rho_{0.95}$. Квантиль распределения $\rho_{0.95}$ есть такая величина, что вероятность $P\{\hat{\rho} < \rho_{0.95}\} = 0.95$. Он имеет практическое значение. Если полученная по экспериментальному временному ряду оценка $\hat{\rho}$ превышает $\rho_{0.95}$, то можно сделать вывод о наличии связи между осцилляторами на уровне значимости $p = 0.05$, то есть с вероятностью случайной ошибки не более 0.05. Ниже мы приводим графики зависимости $\rho_{0.95}$ от различных параметров, которые могут служить как элементы каталога при практической проверке значимости полученной величины $\hat{\rho}$, что является одним из основных результатов данной работы.

2. Методы построения суррогатных данных для проверки статистической значимости

Каталог (таблица) значений $\rho_{0.95}$ для всевозможных значений параметров исходных систем был бы весьма громоздким. Эти табличные значения можно использовать для некоторых характерных наборов параметров осцилляторов, а в общем случае мы предлагаем в качестве альтернативы процедуру расчета $\rho_{0.95}$ для набора параметров, наиболее соответствующего практической ситуации, состоящей в следующем.

Предполагается, что система (3) является адекватной моделью наблюдаемой динамики. Ее параметры оцениваются по наблюдаемым данным. А именно, параметры нелинейности $b_{1,2}$ полагаются равными нулю. Как будет показано, это обоснованно, так как даже достаточно большие значения $b_{1,2}$ (вплоть до 0.5) слабо влияют на величину $\rho_{0.95}$. Угловые частоты при этом можно оценить как средние скорости роста фаз: $\hat{\omega}_{1,2} = (\phi_{1,2}(t_n) - \phi_{1,2}(t_1)) / (t_n - t_1)$. Для оценки величин σ_i используется следующий алгоритм. Отыскиваются такие моменты времени t_{n_k} , что значения фазы $\phi_i(t_{n_k})$, свернутые в интервал $[0, 2\pi]$, принимают примерно одинаковые значения: $\phi^{(l)} - \Delta\phi/2 < \phi_i(t_{n_k}) \bmod 2\pi < \phi^{(l)} + \Delta\phi/2$, где $\phi^{(l)}$ – некоторая константа, $\Delta\phi$ – достаточно малое число. Пусть этих моментов оказа-

лось N_l штук. Оценивается дисперсия значений фазы через K интервалов выборки после t_{n_k} : $\sigma_{i,l}^2 = \frac{1}{N_l} \sum_{k=1}^{N_l} (\phi_i(t_{n_k+K}) - \bar{\phi}_i(t_{n_k+K}))^2$. Это проводится для нескольких значений $\phi^{(l)} = l\Delta\phi$, $l = 1, \dots, P$, и рассчитывается усредненная оценка дисперсии $\langle \sigma_i^2 \rangle = \frac{1}{P} \sum_{l=1}^P \sigma_{0,l}^2$. При условии $b_{1,2} = 0$ эта величина должна быть равна $\langle \sigma_i^2 \rangle \approx \sigma_i^2 K \Delta t$. Отсюда получаем оценку $\hat{\sigma}_i^2 = \langle \sigma_i^2 \rangle / (K \Delta t)$. При расчетах в п. 3 мы брали 8 опорных значений $\phi^{(l)}$, для чего полагали $\Delta\phi = \pi/4$, $P = 8$, $K \Delta t = \pi/4$. При наличии явных признаков или априорной информации о сильной нелинейности систем можно оценить значения $\omega_{1,2}$ и $b_{1,2}$ с помощью более строгой процедуры, аналогичной оценке величин $\sigma_{1,2}$. Наконец, генерируется набор из M пар временных рядов системы (3) при случайных начальных условиях, рассчитываются оценки для каждого из них, а по ним – величина $\rho_{0.95}$. Проверяется, превышает ли оценка $\hat{\rho}$, полученная по экспериментальному ряду, значение $\rho_{0.95}$.

Предложенная процедура представляет собой метод приготовления суррогатных данных. Он сопоставляется в п. 2 с двумя схожими методами, основанными также на предположении об адекватности модели (3) с $b_{1,2} = 0$. Основная их идея состоит в том, что для линейного фазового осциллятора приращения фазы на неперекрывающихся интервалах времени независимы друг от друга. Поэтому в работе [15] предлагается для каждого из осцилляторов случайным образом тасовать участки временного ряда длиной τ_k , на которых значение фазы нарастает на 2π : $\phi_i(t_{n_k} + \tau_k) - \phi_i(t_{n_k}) = 2\pi$. Так генерируется M пар суррогатных временных рядов, в которых зависимости между ϕ_1 и ϕ_2 отсутствуют (далее – метод I). В работе [16] предлагается аналогичный метод, основанный на анализе возвратов траектории в окрестность каждой ее точки. В приложении к фазам это приводит к тасованию тех же участков ряда, но с возможным замещением, то есть в суррогатном ряде некоторые из исходных участков могут отсутствовать, а другие – повторяться два или более раз (далее – метод II).

При использовании метода I для всех суррогатных рядов сохраняются постоянными значения оценок $\hat{\omega}_{1,2}$. Это может внести некоторые погрешности при проверке статистической значимости отличия оценки $\hat{\rho}$ от нуля, так как для системы (3) и любой реальной системы оценки $\hat{\omega}_{1,2}$ варьируются от одного временного ряда к другому. Метод II только отчасти снимает это ограничение. Предложенный нами и описанный выше метод, основанный на построении модели в виде фазовых осцилляторов, позволяет генерировать ансамбль суррогатных данных, на свойства которого не наложено такое ограничение (далее – метод III). Это может быть в ряде случаев практическим преимуществом согласно исследованию [18]. Ниже мы сопоставляем все три метода в численном эксперименте.

3. Результаты

Большинство результатов мы приведем для интервала выборки $\Delta t = 0.3$, что соответствует примерно 20 точкам на характерном периоде, если $\omega_{1,2} = 1$. Результаты не меняются при вариации Δt в широких пределах, что будет также проиллюстрировано ниже. Для исследования статистических свойств оценки $\hat{\rho}$ используются ансамбли из $M = 1000$ рядов.

На рис. 1 представлены семейства графиков, показывающие зависимость $\langle \hat{\rho} \rangle$ от различных параметров при отсутствии нелинейности ($b_{1,2} = 0$) и шумах $\xi_{1,2}$ с интенсивностью σ : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Значения частот определены через расстройку $\Delta\omega$: $\omega_1 = 1 + (\Delta\omega/2)$, $\omega_2 = 1 - \Delta\omega/2$.

Рис. 1, *a* иллюстрирует зависимость $\langle \hat{\rho} \rangle$ от длины ряда N при фиксированном небольшом уровне шума $\sigma = 0.1$ и различных $\Delta\omega$. При недостаточной длине рядов разность фаз не успевает существенно измениться, что приводит к большому значению $\langle \hat{\rho} \rangle$, тогда как истинное значение $\rho = 0$. Так, при нулевой расстройке частот $\langle \hat{\rho} \rangle > 0.75$ вплоть до $N = 700$ (35 характерных периодов). С ростом $\Delta\omega$ длина ряда, необходимая для того, чтобы $\langle \hat{\rho} \rangle$ не превышало некоторого значения, сокращается, так как разность фаз нарастает быстрее.

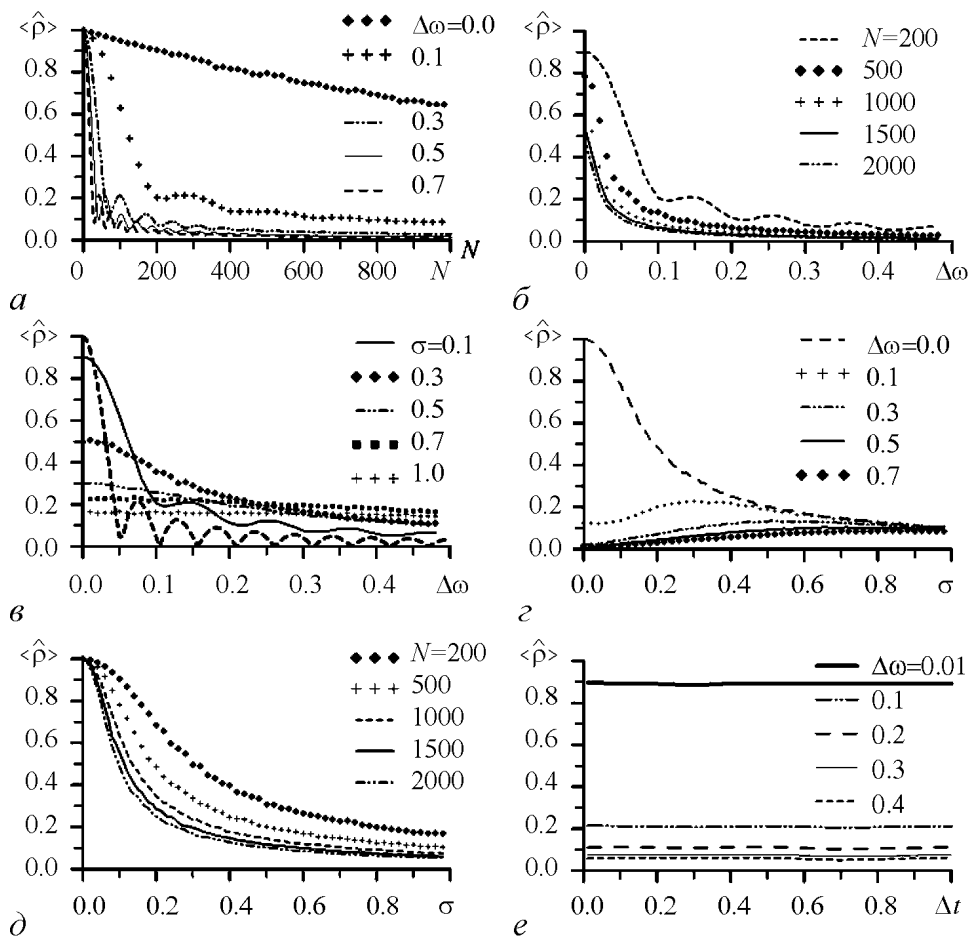


Рис. 1. Зависимости среднего значения оценки коэффициента синхронизации от различных параметров для фазовых осцилляторов (3) при $b_{1,2} = 0$: *a* – от длины ряда при различных расстройках частот, уровень шума $\sigma = 0.1$; *б* – от расстройки частот при различных длинах ряда, уровень шума $\sigma = 0.1$; *в* – от расстройки частот при различных уровнях шума, штриховая линия – аналитическая кривая для нулевого уровня шума, длина ряда $N = 200$; *г* – от уровня шума при различных расстройках частот, длина ряда $N = 500$; *д* – от уровня шума при различных длинах ряда, расстройка частот $\Delta\omega = 0$; *e* – от интервала выборки при различных расстройках частот, длина ряда $N\Delta t = 60$, уровень шума $\sigma = 0.1$; (на графиках *a*–*д* интервал выборки $\Delta t = 0.3$)

Последнее утверждение иллюстрирует рис. 1, б, где показаны зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от расстройки частот при различных длинах ряда. При не слишком малой длине ряда величина $\langle \hat{\rho} \rangle$ монотонно падает с ростом $\Delta\omega$. На монотонное уменьшение накладываются заметные колебания при малой длине ряда: на рис. 1, б это длина $N = 200$ (10 характерных периодов). Длина ряда, при которой становятся заметными эти колебания, зависит от уровня шума. Чем больше шум, тем менее заметны эти колебания. Это показано и на рис. 1, в, где представлены зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от $\Delta\omega$ при различных уровнях шума и $N = 200$.

Для $\sigma = 0$ мы получили аналитическую формулу зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от $\Delta\omega$ следующим образом. Из-за отсутствия шума значение $\hat{\rho}$ одинаково для всех временных реализаций системы и, следовательно, оно совпадает с $\langle \hat{\rho} \rangle$. Временные реализации фаз имеют вид $\phi_{1,2}(t) = \phi_{1,2}(0) + \omega_{1,2}t$. Предполагая, что интервал выборки значительно меньше периода колебаний, формулу (1) можно переписать в виде интеграла $\hat{\rho} \approx \left| \frac{1}{N\Delta t} \int_0^{N\Delta t} e^{j(\Delta\phi(0) + \Delta\omega t)} dt \right|$. Это приводит к зависимости $\hat{\rho} = (\sin \Delta\omega N\Delta t) / (\Delta\omega N\Delta t)$,

график которой показан на рис. 1, в штриховой линией. На нем видны колебания, наложенные на спадающую кривую. При уменьшении σ до нуля зависимость $\langle \hat{\rho} \rangle$ от $\Delta\omega$ приближается к этому асимптотическому случаю.

Интересно, что графики $\langle \hat{\rho} \rangle$ от $\Delta\omega$ для различных уровней шума пересекаются друг с другом, то есть при малых расстройках частот $\langle \hat{\rho} \rangle$ растет с уменьшением уровня шума, а при больших – наоборот. Это наглядно иллюстрирует рис. 1, з, где показаны зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от уровня шума при $N = 500$ и различных $\Delta\omega$. Такой характер зависимостей можно объяснить следующим образом. При малых $\Delta\omega$ и малых шумах значение отдельной оценки $\hat{\rho}$, как правило, велико, так как разность фаз не успевает существенно измениться на длине ряда. С ростом шума вариации разности фаз растут, что ведет к уменьшению $\langle \hat{\rho} \rangle$. При больших $\Delta\omega$ и малых шумах значение отдельной оценки $\hat{\rho}$ близко к нулю, так как разность фаз практически равномерно нарастает и многократно «оборачивается», если ее свернуть на отрезок $[0, 2\pi]$. Рост уровня шума в таком случае приводит только к увеличению разброса значений $\hat{\rho}$, то есть к появлению случайных (хотя и редких) больших значений $\hat{\rho}$, и, следовательно, к некоторому (хотя и не сильному) увеличению $\langle \hat{\rho} \rangle$.

На рис. 1, з график, соответствующий $\Delta\omega = 0.1$ (и близким значениям), имеет промежуточный характер: $\hat{\rho}$ почти константа. Величина расстройки частот, при которой имеет место переход от убывающих к возрастающим зависимостям $\langle \hat{\rho} \rangle$ от σ , определяется длиной ряда. Эта «критическая» расстройка уменьшается с ростом N , так как для более длинного ряда уже меньшая расстройка частот ведет к падению отдельной оценки $\hat{\rho}$ почти до нуля, то есть ко второй из описанных зависимостей $\langle \hat{\rho} \rangle$ от σ .

Зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от σ при различных длинах ряда показаны на рис. 1, д для нулевой расстройки частот. В этом крайнем случае все они убывающие. С ростом длины ряда $\langle \hat{\rho} \rangle$ монотонно приближается к нулю при любом фиксированном σ . Этого и следует ожидать, так как при наличии шума оценка по бесконечно длинному ряду соответствует расчету математического ожидания, то есть эквивалентности формул (1) и (2).

На рис. 1, е проиллюстрирована упомянутая выше слабая зависимость результатов от интервала выборки Δt . Изменения становятся заметными, только если

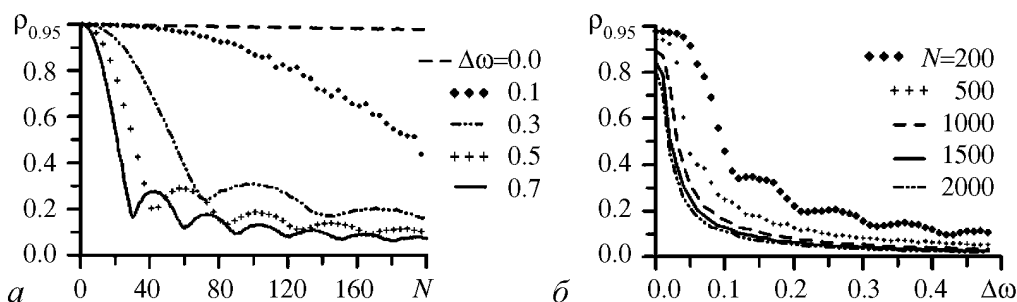


Рис. 2. Зависимости 95-процентного квантиля оценки коэффициента синхронизации от различных параметров для фазовых осцилляторов (3) при уровне шума $\sigma = 0.1$ и $b_{1,2} = 0$: a – от длины ряда при различных расстройках частот; b – от расстройки частот при различных длинах ряда

интервал Δt не мал по сравнению с периодом колебаний и имеется нелинейность систем (не показано на графиках).

Мы подробно рассмотрели зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от различных параметров, так как их проще анализировать и использовать для иллюстраций. С другой стороны, по ним можно судить приближенно и о характере изменений всего закона распределения оценки $\hat{\rho}$ при изменении различных параметров. На практике же важно оценить статистическую значимость отличия $\hat{\rho}$ от нуля. Для этого необходимо рассчитать квантиль распределения $\hat{\rho}$. Удобно использовать описанный выше $\rho_{0.95}$. На рис. 2, a, b (сравните с рис. 1, a, b) показано, что зависимости $\rho_{0.95}$ от параметров качественно те же, что и зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ от тех же параметров. Отличаются численные значения $\rho_{0.95}$, которые превышают значения $\langle \hat{\rho} \rangle$. Эти численные значения и могут использоваться для проверки статистической значимости рассчитанной оценки $\hat{\rho}$ при соответствующей длине ряда, интервале выборки, интенсивности шума и расстройке частот.

При этом важно оценить влияние параметров нелинейности на величину $\rho_{0.95}$. Рис. 3 показывает зависимости $\rho_{0.95}$ от $\Delta\omega$ при различных нелинейностях b : $b_1 = b_2 = b$. В данном диапазоне $\Delta\omega$ величина $\rho_{0.95}$ практически не зависит от b вплоть до значения $b = 0.4$. При $b = 0.5$ некоторая зависимость наблюдается только при $\Delta\omega \approx 0.45$, то есть когда одна из частот становится равной 0.775 (приближается к значению b). Однако при этом осциллятор демонстрирует поведение, резко отличное от случая малой нелинейности: зависимость фазы от времени становится «ступенчатой», чередуются интервалы примерного постоянства фазы и быстрые скачки на 2π . Такую ситуацию легко диагностировать визуально. Если она не наблюдается, то почти отсутствует и зависимость $\rho_{0.95}$ от параметров нелинейности, а следовательно, можно использовать результаты, полученные для линейных осцилляторов (напри-

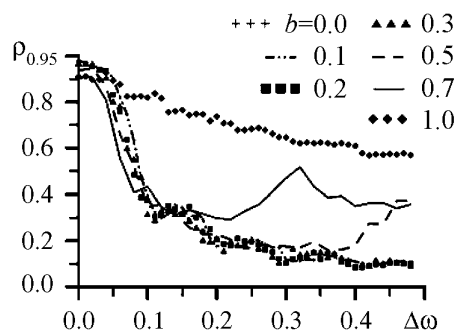


Рис. 3. Зависимости 95-процентного квантиля оценки коэффициента синхронизации от расстройки частот для фазовых осцилляторов (3) при различных значениях параметра нелинейности b . Длина ряда $N = 500$, уровень шума $\sigma = 0.1$

мер, приведенные на рис. 1) для проверки статистической значимости оценки $\hat{\rho}$. Это же наблюдение обосновывает и применимость описанных трех методов получения суррогатных данных (п. 2). Качественно зависимости $\langle \hat{\rho} \rangle$ и $\rho_{0.95}$ от различных параметров при b , не превышающем значения 0.4–0.5, не отличаются от случая линейных осцилляторов (графики не приводятся).

Предложенный нами метод приготовления суррогатных данных (метод III) заменяет необходимость построения полного каталога значений $\rho_{0.95}$. Мы сравнили его с методами I и II на примере системы двух осцилляторов ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \mu(1 - x_1^2) \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 &= k(x_2 - x_1) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} - \mu(1 - x_2^2) \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 &= k(x_1 - x_2) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mu = 0.2$, $\omega_1 = 1.02$, $\omega_2 = 0.98$, $\xi_{1,2}$ – белые шумы с $\sigma_{1,2} = 0.2$. Параметр связи k меняется от нуля до больших значений. При каждом значении k мы генерировали ансамбль из 100 временных рядов системы (4). Интервал выборки $\Delta t = \pi/10$, длина каждого ряда $N = 10000$. Реализации фаз получали с помощью преобразования Гильберта [1, 2]. По каждому из рядов рассчитывалось значение оценки $\hat{\rho}$ и проверялась его значимость на уровне $p = 0.05$. Затем рассчитывалась доля временных рядов, для которых оценка $\hat{\rho}$ признана значимой. Обозначим ее r . При нулевой связи r есть число ложных выводов об отличии ρ от нуля, то есть о наличии связи. Если он не превосходит уровня 0.05, то метод работает корректно, так как уровень значимости и определяет число случайных ошибок. Для ненулевого k величина r есть число правильных выводов о наличии связи. Чем больше число правильных выводов, тем чувствительнее метод.

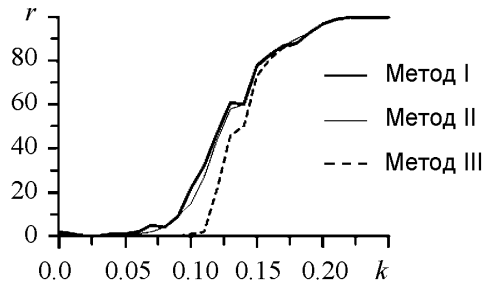


Рис. 4. Вероятности вывода о наличии значимой связи между осцилляторами ван дер Поля (4) в зависимости от коэффициента связи для трех методов приготовления суррогатных данных

этого рассмотрения можно предложить и некоторые рекомендации по их применению. Метод II следует использовать вместо метода I при обработке больших объемов данных, так как тасование с замещением реализуется быстрее (п. 2). Однако метод III более адекватно учитывает возможные вариации оценки угловой частоты и более адекватно отражает статистические свойства ансамбля реализаций. Поэтому результаты применения метода II полезно выборочно проверять с использованием метода III. В случае адекватности линейной модели (3) оба метода должны давать примерно одинаковые результаты. Существенные различия свидетельствуют о нарушении этого условия и возможной некорректности всех трех методов. Тогда следует

На рис. 4 показаны зависимости $r(k)$ для трех методов приготовления суррогатных данных. Все три метода дают вероятность ложных выводов не более 0.05 при нулевой связи. Для всех методов $r(k)$ одновременно достигает большого значения 0.9 при $k = 0.18$. Некоторые различия имеют место в промежуточном случае, когда метод III несколько менее чувствителен. Однако эти различия не велики. Таким образом, для проверки значимости $\hat{\rho}$ одинаково пригодны все три подхода. На основе

проводить более тщательный анализ, например, методом III с учетом фазовой нелинейности. Эта возможность является преимуществом предложенного метода, так как не ясно, как учесть нелинейность в методах I и II.

Выводы

Практическая важность обнаружения явления синхронизации и определения его характеристик обуславливает необходимость получения надежных оценок коэффициентов синхронизации по наблюдаемым данным. При этом в большинстве ситуаций, например, в биомедицинских и геофизических приложениях, приходится иметь дело с короткими сигналами. В таком случае велика вероятность получить большое значение оценки для несвязанных систем и ошибочно истолковать его как характеристику существующей связи систем, а не как результат флуктуаций.

В работе на простой и универсальной модели автоколебательных систем – фазовых осцилляторах – подробно исследованы свойства оценки (2) одного из широко используемых коэффициентов фазовой синхронизации (1). Продемонстрированы количественные условия, при которых наблюдаются большие (близкие к единице) значения оценки. Показан характер зависимости свойств оценки от различных параметров и даны объяснения.

На основе проведенных расчетов составлен каталог некоторых избранных значений 95-процентного квантиля распределения оценки для проверки статистической значимости результатов оценивания на практике, что отчасти иллюстрирует рис. 2. В качестве более удобного подхода, реализующего ту же идею, предложен новый метод получения суррогатных данных, основанный на построении эмпирической модели в виде фазовых осцилляторов (3) для конкретного наблюдаемого ряда. Работоспособность метода показана на численном примере. Предложенный метод дополняет известные методы [15, 16], так как более адекватно воспроизводит свойства ансамбля временных реализаций фаз несвязанных автоколебательных систем [18]. Полученные результаты позволяют получать оценки коэффициента синхронизации на практике с более надежным контролем значимости результатов.

Исследование проведено для синхронизации на основном тоне (синхронизации 1:1). Однако степень общности рассмотрения больше, так как оценки синхронизации более высоких порядков (синхронизации $n : m$) могут быть рассмотрены полностью аналогично лишь с заменой формул (1) и (2) на соответствующие формулы. Характер зависимостей свойств оценки от параметров систем при этом не меняется.

Е. Сидак благодарит А.С. Караваева и Т.В. Диканева за обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-05-00381, 08-02-00081) и программы Президиума РАН.

Библиографический список

1. Пиковский А.С., Розеблом М.Г., Куртс Ю. Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера. 2002.
2. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

3. *Tass P.A.* Phase resetting in medicine and biology – stochastic modelling and data analysis. Berlin: Springer, 1999.
4. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. Vol. 100, № 22. P. 13064.
5. *Lopes da Silva F., Blanes W., Kalitzin S.N., Parra J., Suffczynsky P., Velis D.N.* Epilepsies as dynamical diseases of brain systems: Basic models of the transition between normal and epileptic activity // Epilepsia. 2003. Vol. 44 (suppl. 12). P. 72.
6. *Tass P.A.* A model of desynchronizing deep brain stimulation with a demand-controlled coordinated reset of neural subpopulations // Biological Cybernetics. 2003. Vol. 89. P. 81.
7. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., Mc-Clintock P.V.E.* Phase Synchronization between Several Interacting Processes from Univariate Data // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 1749.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75. 056207.
9. *Maraun D., Kurths J.* Epochs of phase coherence between El Nino/Southern Oscillation and Indian monsoon // Geophys. Res. Lett. 2005. Vol. 32. L15709, doi: 10.1029/2005GL023225.
10. *Kraskov A.* Synchronization and interdependence measures and their applications to the electroencephalogram of epilepsy patients and clustering of data. Dissertation (PhD thesis). Research Centre Juelich, John von Neumann Institute for Computing (NIC Series. Vol. 24), 2004. 90 p.
<http://www.fz-juelich.de/nic-series/volume24/nic-series-band24.pdf>.
11. *Mormann F., Andrzejak R.G., Kraskov A., Lehnertz K., Grassberger P.* Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches // Physica D. 2007. Vol. 225. P. 29.
12. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // Physica D. 2000. Vol. 144. P. 358.
13. *Allefeld C., Kurths J.* Testing for phase synchronization // Int. J. Bif. Chaos, 2004. Vol. 14, № 2. P. 405.
14. *Schreiber T., Schmitz A.* Surrogate time series // Physica D. 2000. Vol. 142. P. 346.
15. *Brea J., Russell D.F., Neiman A.B.* Measuring direction in the coupling of biological oscillators: A case study for electroreceptors of paddlefish // Chaos. 2006. Vol. 16. 026111.
16. *Romano M.C., Thiel M., Kurths J., Rolfs M., Engbert R., Kliegl R.* Synchronization analysis and recurrence in complex systems // Handbook of time series analysis. / Eds B. Chelton, M. Wuntherhalder, J. Timmer. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2006.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
18. *Dolan K.T., Spano M.L.* Surrogate for nonlinear time series analysis // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 4. P. 046128.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 14.11.2007

STATISTICAL PROPERTIES OF PHASE SYNCHRONIZATION COEFFICIENT ESTIMATOR

D.A. Smirnov, E.V. Sidak, B.P. Bezruchko

A phase synchronization coefficient estimate, obtained from a time series, can take a high value even for uncoupled oscillators in the case of short signals and close basic frequencies. Since such situations are widespread in practice, it is necessary to detect them to avoid false conclusions about the presence of coupling. We investigate statistical properties of the estimator with the use of an exemplary system – uncoupled phase oscillators. Conditions leading to high probability to get big values of the estimator are determined quantitatively. Based on the performed analysis, we suggest a special technique for surrogate data generation to control statistical significance of the estimation results.



Смирнов Дмитрий Алексеевич – родился в 1977 году, окончил факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (1999), защитил кандидатскую диссертацию (2001). Старший научный сотрудник СФ ИРЭ РАН. Опубликовал более 30 статей в научных журналах и (в соавторстве с Б.П. Безручко) монографию «Математическое моделирование и хаотические временные ряды» (Саратов, ГосУНЦ «Колледж», 2005, 320 с.). Область научных интересов: теория колебаний и волн, теория динамических систем, анализ временных рядов, математическое моделирование сложных систем по данным наблюдений.



Сидак Елена Владимировна – родилась в 1987 году, студентка 3-го курса факультета nano- и биомедицинских технологий Саратовского госуниверситета. Автор и соавтор 1 научной статьи и 10 докладов на конференциях. Область научных интересов: анализ временных рядов.



Безручко Борис Петрович – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Доктор физико-математических наук (1995). Заведующий кафедрой биомедицинской инженерии и динамического моделирования Саратовского госуниверситета, заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике СФ ИРЭ РАН. Опубликовал более 100 статей в научных журналах и 2 монографии (в соавторстве). Область научных интересов: радиофизика и электроника, нелинейная динамика, моделирование по временным рядам с приложением к задачам физиологии и медицинской диагностики, физический эксперимент.