

4. На основе разработанной модели нейрона нижних олив предложена система контроля и координации движений автономных машин-роботов. Основной идеей здесь является введение в систему управления блока дискретного контроля, корректирующего ошибки, возникающие за счет действия механизмов фазовой автопереустановки при движении, например, по неровной поверхности.

Автор признателен всем соавторам своих работ, положенных в основу значительной части данного доклада. Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 06-02-16137).

Список литературы

1. Андронов А А, Витт А А, Хайкин С Э *Теория колебаний* (М.: Физматиз, 1959) [Translated into English: Andronov A A, Vitt A A, Khaikin S E *Theory of Oscillators* (Oxford: Pergamon Press, 1966)]
2. Андронов А А и др. *Качественная теория динамических систем второго порядка* (М.: Наука, 1966) [Translated into English: Andronov A A et al. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems* (New York: J. Wiley, 1973)]
3. Андронов А А и др. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости* (М.: Наука, 1967) [Translated into English: Andronov A A et al. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane* (New York: J. Wiley, 1973)]
4. Андронов А А, в кн. А.А. Андронов. *Собрание трудов* (Отв. ред. М А Леонтович) (М.: Изд-во АН СССР, 1956) с. 41
5. Рубин А Б *Биофизика* (М.: Книжный дом Университет, 1999)
6. Kandel E R, Schwartz J H, Jessell T M (Eds) *Principles of Neural Science* 3rd ed. (New York: Elsevier, 1991)
7. Scott A *Neuroscience: A Mathematical Primer* (Berlin: Springer, 2002)
8. Arbib M A *The Metaphorical Brain* (New York: Wiley-Intersci., 1972) [Арбид М *Метафорический мозг* (М.: Едиториал УРСС, 2004)]
9. Борисюк Г Н и др. *Математическое моделирование* **4** (1) 3 (1992)
10. Абарбанель Г Д И и др. *УФН* **166** 363 (1996) [Абарбанель Н Д И et al. *Phys. Usp.* **39** 337 (1996)]
11. Arbib M A, Erdi P, Szentágothai J *Neural Organization: Structure, Function and Dynamics* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1998)
12. Чернавский Д С *УФН* **170** 157 (2000) [Chernavskii D S *Phys. Usp.* **43** 151 (2000)]
13. Борисюк Г Н и др. *УФН* **172** 1189 (2002) [Borisjuk G N et al. *Phys. Usp.* **45** 1073 (2002)]
14. Rabinovich M I et al. *Rev. Mod. Phys.* **78** 1213 (2006)
15. Izhikevich E M *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 2007)
16. Llinás R, Yarom Y *J. Physiol.* (London) **376** 163 (1986)
17. Elson R C et al. *J. Neurophysiol.* **82** 115 (1999)
18. Golomb D *J. Neurophysiol.* **79** 1 (1998)
19. Leznik E, Makarenko V, Llinás R *J. Neurosci.* **22** 2804 (2002)
20. Hodgkin A L, Huxley A F *J. Physiol.* (London) **117** 500 (1952)
21. Hindmarsh J L, Rose R M *Proc. R. Soc. London Ser. B* **221** 87 (1984)
22. FitzHugh R *Biophys. J.* **1** 445 (1961)
23. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S *Proc. IRE* **50** 2061 (1962)
24. Morris C, Lecar H *Biophys. J.* **35** 193 (1981)
25. Tuckwell H C *Introduction to Theoretical Neurobiology* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988)
26. Wilson H R, Cowan J D *Kybernetik* **13** (2) 55 (1973)
27. Ermentrout G B, Kopell N *SIAM J. Math. Anal.* **15** 215 (1984)
28. Kuramoto Y *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Berlin: Springer-Verlag, 1984)
29. Ermentrout G B, Kopell N *SIAM J. Appl. Math.* **46** 233 (1986)
30. Cazelles B, Courbage M, Rabinovich M *Europhys. Lett.* **56** 504 (2001)
31. Rulkov N F *Phys. Rev. E* **65** 041922 (2002)
32. Некоркин В И, Вдовин Л В *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **15** (5) 36 (2007)
33. Courbage M, Nekorkin V I, Vdovin L V *Chaos* **17** 043109 (2007)
34. Rubin J, Bose A *Network* **15** (2) 133 (2004)
35. Kazantsev V B et al. *Phys. Rev. E* **68** 017201 (2003)
36. Казанцев В Б, Некоркин В И, в сб. *Нелинейные волны 2002* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов, В И Некоркин) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2003) с. 9
37. Kazantsev V B *Phys. Rev. E* **64** 056210 (2001)
38. Некоркин В И и др. *Математическое моделирование* **17** (6) 75 (2005)
39. Nekorkin V I, Velarde M G *Synergetic Phenomena in Active Lattices* (Berlin: Springer, 2002)
40. Некоркин В И, Шапин Д С, Дмитричев А С *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **15** (1) 3 (2007)
41. Nekorkin V I et al. *Physica D* (submitted)
42. Henze D A, Buzsáki G *Int. Congress Ser.* **1250** 161 (2003)
43. Welsh J P et al. *Nature* **374** 453 (1995)
44. Leznik E, Makarenko V, Llinás R *J. Neurosci.* **22** 2804 (2002)
45. Kazantsev V B et al. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **101** 18183 (2004)
46. Henze D A, Buzsáki G *Int. Congress Ser.* **1250** 13064 (2003)
47. Казанцев В Б, Некоркин В И, в сб. *Нелинейные волны 2004* (Отв. ред. А В Гапонов-Грехов, В И Некоркин) (Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005) с. 345
48. Llinás R R *I of the Vortex: From Neurons to Self* (Cambridge, Mass.: MIT Press, 2001)
49. Казанцев В Б, Некоркин В И *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **9** (1) 38 (2001)

PACS numbers: **05.45.-a**, **87.10.+e**, 87.19.La
DOI: 10.3367/UFNr.0178.200803h.0323

Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии)

Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко,
М.Д. Прохоров, Д.А. Смирнов, П.А. Тасс

1. Введение

Задача выявления и оценки параметров взаимодействия между источниками сложных (хаотических) колебаний по временным рядам экспериментально наблюдаемых величин междисциплинарна [1–3]. Она возникает в физике, биологии, геофизике, медицине, технике. Так, анализ колебаний различных элементов механизма может указать на источник вибраций [4], а умение выявлять взаимодействия между различными областями мозга по многоканальным записям электроэнцефалограмм помогает определить положение очагов патологической активности у пациентов, страдающих эпилепсией [5]. При этом особое внимание уделяется нерегулярным сигналам, поскольку уже давно пришло осознание типичности хаотического поведения нелинейных систем [3, 6, 7].

Разнообразие специфических ситуаций, а также наличие шумов и нестационарности определили появление множества подходов к выявлению и оценке "интенсивности" связи. Эти подходы развивались в рамках математической статистики и спектрального анализа [1], теории информации [8, 9], нелинейной динамики [5, 10–12]. Среди наиболее популярных из них можно назвать расчет взаимных корреляционных функций и функций когерентности [1], анализ следования событий во временных рядах [13], оценку распределения ближайших соседей в пространстве состояний [5], определение характеристик "переноса информации" между сигналами [8]. В отличие от перечисленных методик, в которых сигналы обрабатываются "непосредственно" с помощью рабочих формул и алгоритмов, существует и "опосредованный" подход, в котором по исходным временным рядам формируются предска-

тельные математические модели, а оценка связи делается по их свойствам.

Каждый из подходов имеет свою преимущественную сферу применения [14–16]. В данном докладе мы остановимся лишь на оценках связей с использованием математических моделей (раздел 2). Полученные при этом характеристики близки к интуитивным понятиям о причинно-следственных связях между процессами (коэффициенты связи в уравнениях динамики и т.п.). При адекватном выборе структуры модели такой подход оказывается и наиболее чувствительным, особенно при наличии нелинейности и хаоса. Подобная ситуация складывается при рассмотрении практически важных задач физиологии — анализа механизмов патологий при эпилепсии и болезни Паркинсона (раздел 4).

В связи с важностью проблемы построения модели, которая служит инструментом для выявления связей, мы затрагиваем ряд проблем собственно реконструкции уравнений в разделе 3.

2. Диагностика связи с помощью предсказательных моделей

2.1. Известная априори структура модели

Если структура адекватной математической модели элементов (подсистем) исследуемой системы известна и имеется конечный набор вариантов структуры связей, параметры которых следует установить, то можно прибегнуть к простому перебору. Для каждого из вариантов структуры связей подбираются значения параметров модели (в том числе и коэффициенты связи), которые обеспечивают наиболее точное воспроизведение наблюдаемой динамики (например, прогноз следующих точек по предыдущим). В итоге выбирается наиболее адекватная модель и устанавливаются соответствующие ей характеристики связей. В качестве примера можно привести оценку связи двух автоколебательных систем с запаздыванием [17], представленных на рис. 1. Это две системы, представляющие собой включенные в кольцо нелинейный усилитель f , линию задержки τ и фильтр ε (инерционный элемент). Штриховыми линиями пока-

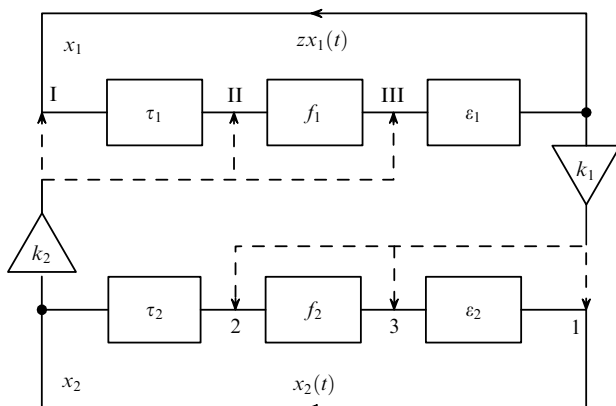


Рис. 1. Блок-схема связанных систем с запаздыванием X_1 и X_2 . Элементы, обозначенные как τ_1 и τ_2 , f_1 и f_2 , ε_1 и ε_2 , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний, а элементы k_1 и k_2 определяют величину связи систем X_1 и X_2 друг с другом. 1–3 — точки, в которых система X_1 действует на систему X_2 , I–III — точки, в которых X_2 действует на X_1 .

заны различные варианты подключения в точки I, II и III элементов связи с коэффициентами передачи k . Разным типам связи соответствуют различные структуры математических моделей:

$$\varepsilon_{1,2} \frac{dx_{1,2}(t)}{dt} = -x_{1,2} + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t - \tau_{1,2})), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{1,2} \frac{dx_{1,2}(t)}{dt} = -x_{1,2} + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t)), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{1,2} \frac{dx_{1,2}(t)}{dt} = -x_{1,2} + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2})) + k_{2,1}x_{2,1}(t). \quad (3)$$

Уравнение (1) описывает способ связи, который обозначим как 1/I: первая система с запаздыванием воздействует на вторую в точке I, а вторая система воздействует на первую в точке I. Уравнения (2) и (3) описывают связанные системы для способов связи 2/II и 3/III соответственно. При различающихся способах воздействия друг на друга системы X_1 и X_2 описываются разными уравнениями. Например, при способе связи 1/II система X_1 описывается уравнением (2), а система X_2 — уравнением (1).

Используя специальную технологию реконструкции уравнений с запаздыванием, кратко описанную в разделе 3, можно убедиться в получении наилучшего результата при выборе той из моделей, которая правильно отражает способ введения связей между автогенераторами в физическом эксперименте и между эталонными динамическими системами в численном эксперименте [17].

2.2. Причинность по Грейнджеру

При отсутствии априорной информации о структуре модельных уравнений можно использовать универсальные конструкции. Полезной практической реализацией является метод, основанный на построении нелинейных прогностических моделей [18, 19], который представляет собой обобщение линейного подхода к выявлению причинно-следственных связей, предложенного К. Грейнджером [20–23]. Основная идея состоит в том, что по временным рядам $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$ строятся прогностические модели — "индивидуальные" и "совместные". Существенное улучшение прогноза динамики первой системы при учете значений переменной второй системы — признак наличия воздействия второй системы на первую (если такого улучшения нельзя достичь усложнением индивидуальной модели). Возможна следующая реализация подхода, использованная, например, в работе [24].

Для оценки влияния второй системы на первую сначала строится индивидуальная авторегрессионная модель вида

$$x_1(t_n) = f_1(x_1(t_{n-1}), x_1(t_{n-2}), \dots, x_1(t_{n-d_1}), \mathbf{a}_0) + \xi_n, \quad (4)$$

где f_1 — алгебраический многочлен порядка K , d_1 — размерность модели, ξ_n — шум с нулевым средним. Оценки коэффициентов \mathbf{a}_0 находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК), т.е. посредством минимизации среднего квадрата ошибки прогноза

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{N - n_0} \sum_{n=n_0+1}^N \left(x_1(t_n) - f_1(x_1(t_{n-1}), \dots, x_1(t_{n-d_1}), \mathbf{a}_0) \right)^2, \quad (5)$$

где $n_0 = \max(d_1, d_2)$, величина d_2 определена ниже. Затем с использованием двух рядов строится совместная модель:

$$x_1(t_n) = g_1(x_1(t_{n-1}), \dots, x_1(t_{n-d_1}), x_2(t_{n-1}), \dots, x_2(t_{n-d_2}), \mathbf{a}) + \eta_n, \quad (6)$$

где d_2 — число учтенных значений x_2 , g_1 — многочлен порядка K , η_n — шум с нулевым средним. Достигнутый с помощью МНК минимальный средний квадрат ошибки прогноза определяется как

$$\sigma_{2 \rightarrow 1}^2 = \frac{1}{N - n_0} \sum_{n=n_0+1}^N \left(x_1(t_n) - g_1(x_1(t_{n-1}), \dots, x_2(t_{n-d_2}), \mathbf{a}) \right)^2. \quad (7)$$

Улучшение прогноза ряда x_1 при учете ряда x_2 характеризуется разностью квадратов ошибок $PI_{2 \rightarrow 1} = \sigma_1^2 - \sigma_{2 \rightarrow 1}^2$.

Для оценки статистической значимости отличия полученной по временному ряду величины $PI_{2 \rightarrow 1}$ от нуля часто используется аналитическая формула, основанная на предположении о том, что процессы x_1 и x_2 не связаны, а ошибки прогноза (остаточные ошибки) моделей (4) и (6) обусловлены влиянием нормального белого шума. Тогда нормированная величина

$$F_{2 \rightarrow 1} \equiv \frac{(N - n_0)(\sigma_1^2 - \sigma_{2 \rightarrow 1}^2)}{(P_2 - P_1)\sigma_{2 \rightarrow 1}^2},$$

где P_1 и P_2 — числа коэффициентов индивидуальной и совместной моделей, имеет F-распределение Фишера с $(P_2 - P_1, N - n_0 - P_2)$ степенями свободы. Значимость отличия $F_{2 \rightarrow 1}$ от нуля проверяется с помощью F-теста [9]. Если это отличие значимо на уровне p , то следует признать наличие влияния x_2 на x_1 с доверительной вероятностью $1 - p$. Все аналогично для характеристики воздействия $1 \rightarrow 2$.

Альтернативным подходом к оценке достоверности существования обнаруженных связей является использование ансамбля суррогатных данных — искусственно полученных пар сигналов, не связанных между собой, но сохраняющих некоторые черты динамики исследуемых процессов. Например, это могут быть исходные временные ряды, сдвинутые относительно друг друга на интервал времени, больший времени автокорреляции процессов [13, 14].

Значения величин d_1 , d_2 и K рекомендуется подбирать следующим образом. Строят модели (4) и (6) при различных d_1 , d_2 и K , начиная с их значений, равных единице. Выбирают такие значения, при которых среднеквадратичные ошибки прогноза моделей (формулы (5) и (7)) стабилизируются, т.е. перестают существенно уменьшаться с возрастанием d_1 , d_2 и K . При этом сначала целесообразно подобрать значения d_1 и K , рассматривая ошибку прогноза индивидуальной модели, а затем при найденных d_1 и K подобрать d_2 по ошибке прогноза совместной модели. Вид функций f и g может быть любым, например, они могут быть локально-постоянными [18] или радиальными базисными функциями [19]. Однако в случае коротких временных рядов, типичных в биологических и геофизических приложениях, возможности использования упомянутых нелинейных функций, содержащих много свободных параметров, или увеличе-

ния d_1 , d_2 и K для многочленов сильно ограничены. Поэтому, как правило, информативные результаты удается получить (если удастся) только при использовании малых размерностей и многочленов низкого порядка [24].

2.3. Моделирование фазовой динамики

Выбранная структура модели должна быть адекватной исследуемым процессам, поэтому указанное выше вынужденное использование наиболее простых моделей для оценки причинности по Грейнджеру сильно сужает область эффективных приложений метода. Плодотворная идея, позволяющая существенно расширить эту область, — это применение той же технологии к временным рядам фаз наблюдаемых процессов, а не к самим наблюдаемым величинам [25].

Такой подход эффективен, когда в исходных временных рядах проявляются ярко выраженные ритмы колебаний (в спектрах мощности имеется существенный подъем в узкой полосе частот). При этом имеет ясный смысл понятие фаз ϕ_1 и ϕ_2 наблюдаемых колебательных процессов x_1 и x_2 , а наиболее широко используемый метод расчета фаз основан на преобразовании Гильберта и введении аналитического сигнала [26]. Причин высокой эффективности подхода две. Во-первых, фазы описанных узкополосных процессов — это переменные, которые наиболее подвержены изменениям при воздействии на автоколебательную систему, поэтому их использование обещает обеспечить высокую чувствительность метода к слабой связи между источниками сигналов [3]. Во-вторых, для широкого класса колебательных процессов адекватно описание в виде достаточно простой системы стохастических разностных уравнений [25, 27, 28]:

$$\phi_{1,2}(t + \tau) - \phi_{1,2}(t) = f_{1,2}(\phi_{1,2}(t), \phi_{2,1}(t - \Delta_{1,2})), \quad (8)$$

где $f_{1,2}$ — тригонометрические многочлены невысокого порядка, τ — фиксированный временной интервал, обычно равный меньшему из характерных периодов колебаний, $\Delta_{1,2}$ — пробные времена запаздывания воздействий. Коэффициенты тригонометрических многочленов оценивают по временному ряду с помощью МНК, и по полученным оценкам рассчитывают силы воздействия систем друг на друга. Степень влияния $c_{2 \rightarrow 1}^2$ системы 1 на систему 2 определяется крутизной зависимости f_1 от ϕ_2 ; аналогично для $c_{1 \rightarrow 2}^2$:

$$c_{2 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f_{1,2}(\phi_{1,2}, \phi_{2,1})}{\partial \phi_{2,1}} \right)^2 d\phi_1 d\phi_2. \quad (9)$$

Методика очень чувствительна к слабой связи, что было показано в численных экспериментах [25]. Но условием ее применимости при существенных уровнях динамического шума в исходной системе является длина тренировочного ряда порядка 1000 характерных периодов при умеренных уровнях шума. Применение на практике сталкивается с трудностями, когда исследуемые временные ряды нестационарны. Так, для электроэнцефалограмм интервал квазистационарного поведения составляет, как правило, не более 100 характерных периодов для любых выделяемых физиологических "ритмов". Поэтому необходимо делить временные ряды на относительно короткие сегменты и рассчитывать

оценки связи отдельно для каждого сегмента. Применение описанной методики без модификаций в таком случае приводит к получению смещенных оценок [29]. С учетом этого нами введены [29] новые оценки $\gamma_{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1} = c_{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1}^2 + r_{1,2}$, где $r_{1,2}$ — поправки, зависящие от уровня шума, частот колебаний и длины временного ряда. Получены также приближенные формулы для 95%-ных доверительных интервалов, которые позволяют отслеживать значимость результатов, полученных по отдельной временной реализации.

3. Реконструкция модельных уравнений по временным рядам

Построение эмпирических моделей, которые в разделе 2 использованы для диагностики связей, — это центральный вопрос широкого направления исследований, которое в математической статистике получило название *идентификации систем* [1, 30], а в нелинейной динамике — *реконструкции динамических систем* [7, 31–33]. С формированием концепции динамического хаоса стало ясно, что сложное хаотическое поведение демонстрируют уже нелинейные уравнения с малой размерностью. Поэтому в последние годы эмпирическое моделирование часто проводится на основе нелинейных разностных уравнений (отображений) $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})$ или обыкновенных дифференциальных уравнений $dx/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$, где \mathbf{x} — D -мерный вектор состояния, \mathbf{F} — вектор-функция, \mathbf{c} — P -мерный вектор параметров, n — дискретное время, t — непрерывное время.

Некоторое время казалось, что могут быть созданы универсальные подходы, работоспособные для любых систем. Так, общий алгоритм построения упомянутых нелинейных моделей во многом схож с тем, который применяют при аппроксимации точек на плоскости гладкой кривой, хотя и включает в себя дополнительные этапы. Реконструкция начинается с предварительного анализа экспериментальных данных и выбора структуры модели: типа и числа уравнений, вида функций \mathbf{F} и связи динамических переменных \mathbf{x} с наблюдаемыми величинами. Затем проводится подгонка модели — подбираются значения параметров уравнений \mathbf{c} , которые обеспечивают наилучшее воспроизведение наблюдаемого сигнала с помощью модели. Чаще всего на практике используют метод максимального правдоподобия или МНК в различных вариантах. Одна из самых простых формулировок — минимизировать средний квадрат ошибки прогноза на один шаг вперед. Наконец, качество модели проверяется с использованием специально выделенного тестового ряда.

Однако ожидания универсальной работоспособности какого-либо метода на практике не оправдались. Математические модели часто получаются громоздкими и негрубыми. Реализация описанной последовательности действий может встречать трудности на любом из этапов. Ситуация тем сложнее, чем больше степень неопределенности. Наиболее сложен случай "черного ящика", при котором информация о структуре возможной адекватной модели отсутствует. Основная трудность при этом получила хлесткое название — "проклятие размерности", а именно: резкое повышение сложности задачи и необходимость увеличения длины стационарных временных рядов с возрастанием размерности модели.

Однако вероятность успеха можно повысить, если разработать специальные подходы для некоторых узких классов объектов и использовать направленные технологические приемы моделирования, что мы продемонстрируем здесь на конкретном примере. Неопределенность в выборе структуры модели может быть уменьшена, например, за счет использования априорной информации о свойствах систем некоторого выделенного класса и предварительного анализа рядов.

Рассмотрим модель широкого класса сложных колебательных процессов — систему, описываемую дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом:

$$\varepsilon \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + F(x(t - \tau_0)). \quad (10)$$

Временные реализации колебаний динамической переменной x такой системы, как оказывается [34], обладают характерной особенностью: в них отсутствуют экстремумы, разделенные во времени интервалом, равным времени задержки τ_0 (рис. 2). Точка минимума зависимости количества экстремумов, разделенных временным интервалом τ , от τ позволяет оценить время задержки $\tau \approx \tau_0$ (рис. 2б). Имея эту оценку, нетрудно оценить параметр инерционности ε и аппроксимировать нелинейную функцию F [34].

На рисунке 2 в качестве примера приведены результаты реконструкции уравнений вида (10) по хаотической временной реализации (рис. 2а) уравнения Икеды

$$\varepsilon_0 \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \mu \sin(x(t - \tau_0) - x_0), \quad (11)$$

описывающего динамику пассивного оптического резонатора. Подробное описание технологии реконструкции систем с запаздыванием можно найти в [35].

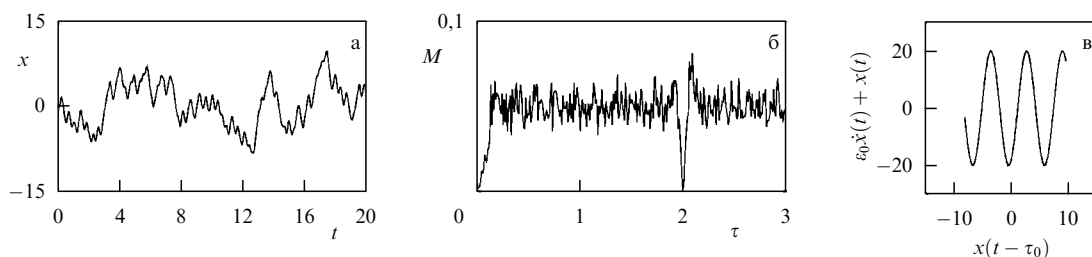


Рис. 2. Пример реконструкции системы с задержкой: (а) временная реализация уравнения Икеды (11) при $\tau_0 = 2$; (б) число пар экстремумов $M(\tau)$, нормированное на общее число экстремумов ряда $M_{\min} = M(2, 0)$; (в) восстановленная нелинейная функция. Численные эксперименты с добавлением шума показывают возможность реконструкции при уровнях шума до 20% от уровня сигнала.

В качестве другого примера специальных технологий реконструкции, направленных на некоторый выделенный класс объектов, можно указать системы, находящиеся под внешним воздействием [36]. Мы здесь не будем подробно останавливаться на описании методик моделирования. Отметим только, что помимо отмеченного ключевого этапа выбора наиболее адекватной структуры модели важны и технические проблемы, возникающие на различных этапах процедуры реконструкции. В наших работах представлены исследования по повышению точности оценок параметров [37], включая случай скрытых переменных [38]; оптимизации структуры модели [39]; подбору динамических переменных для моделирования [40]. Обширная информация по проблеме представлена в работах нескольких групп (см., например, обзоры [41–45]).

4. Приложения метода диагностики связей в нейрофизиологии

Многие заболевания нервной системы, включая эпилепсию и болезнь Паркинсона, связаны с патологической синхронизацией больших групп нейронов головного мозга. Признаком болезни Паркинсона является синхронизация нейронов в ядрах таламуса и базальных ганглий [46]. Однако функциональная роль этой синхронизации при генерации паркинсоновского тремора (непроизвольных регулярных колебаний конечностей с частотами от 3 до 6 Гц) остается предметом обсуждений [47]. Гипотеза о том, что синхронизация нейронов вызывает тремор, еще не получила убедительного эмпирического подтверждения [47]. Стандартная терапия при отсутствии эффекта от лекарств — это постоянная глубокая электрическая стимуляция мозга (ГЭСМ) на высоких частотах (более 100 Гц) [48]. Стандартная ГЭСМ была найдена эмпирически, механизм ее влияния до сих пор не выяснен [49], и она имеет соответствующие ограничения, например, связанные с побочными эффектами [50, 51]. Затем было предложено подавлять тремор более специфично — с помощью десинхронизирующей ГЭСМ [2],

например методом координированной переустановки [50]. Подтверждение того, что тремор вызывается синхронной активностью нейронов в ядрах таламуса и базальных ганглий, могло бы, предположительно, привести к созданию более мягких способов терапии с меньшими побочными эффектами. В связи с этим приобретает актуальность задача определения характера связей между различными областями мозга и мышцами пациентов.

Нами исследовались ансамбли интервалов спонтанного паркинсоновского тремора трех пациентов [52]. Колебания конечностей были представлены сигналами акселерометра, записанными с частотой выборки 200 Гц и 1 кГц. Информация об активности мозга была представлена записями локальных потенциалов (ЛП) от четырех глубинных электродов, вживленных в таламус или базальные ганглии. Данные были получены на факультете стереотаксической и функциональной нейрохирургии университета г. Кельн и в Институте нейронауки и биофизики исследовательского центра Юлих (Германия).

Сигналы акселерометра и ЛП с одного из электродов во время сильного паркинсоновского тремора представлены на рис. 3 вместе с их спектрами. В сигнале акселерометра видны колебания, которым соответствует четкий пик в спектре мощности на частоте 5 Гц. В спектре ЛП тоже виден пик на частоте тремора, хотя несколько более широкий. Фаза может быть корректно введена для обоих сигналов. В результате анализа с помощью метода моделирования фазовой динамики (см. раздел 2.3) зафиксировано статистически значимое воздействие конечности на мозг с запаздыванием не более чем в несколько десятков миллисекунд. Воздействие мозга на конечность также присутствует и характеризуется временем запаздывания в интервале 200–400 мс (порядка 1–2 характерных периодов колебаний). Результаты очень хорошо количественно воспроизводятся для всех трех пациентов (рис. 4).

Наличие влияния конечности на активность таламуса и базальных ганглий ранее было установлено с

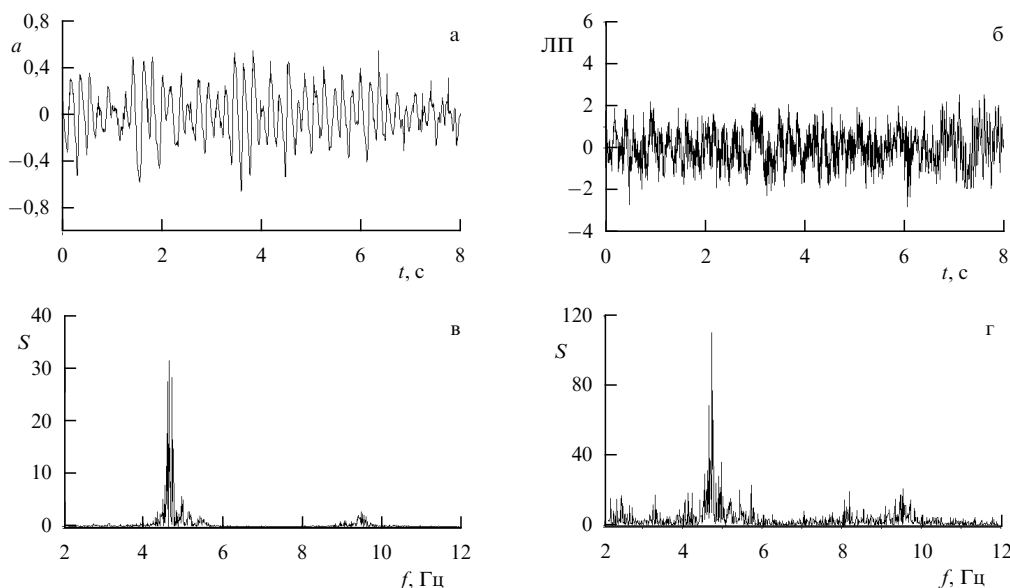


Рис. 3. Интервал спонтанного паркинсоновского тремора (общая длительность 80 с) [52]: (а, б) сигнал акселерометра и ЛП с одного из электродов в произвольных единицах измерения (показаны только первые 8 с); (в, г) оценки их спектров мощности.

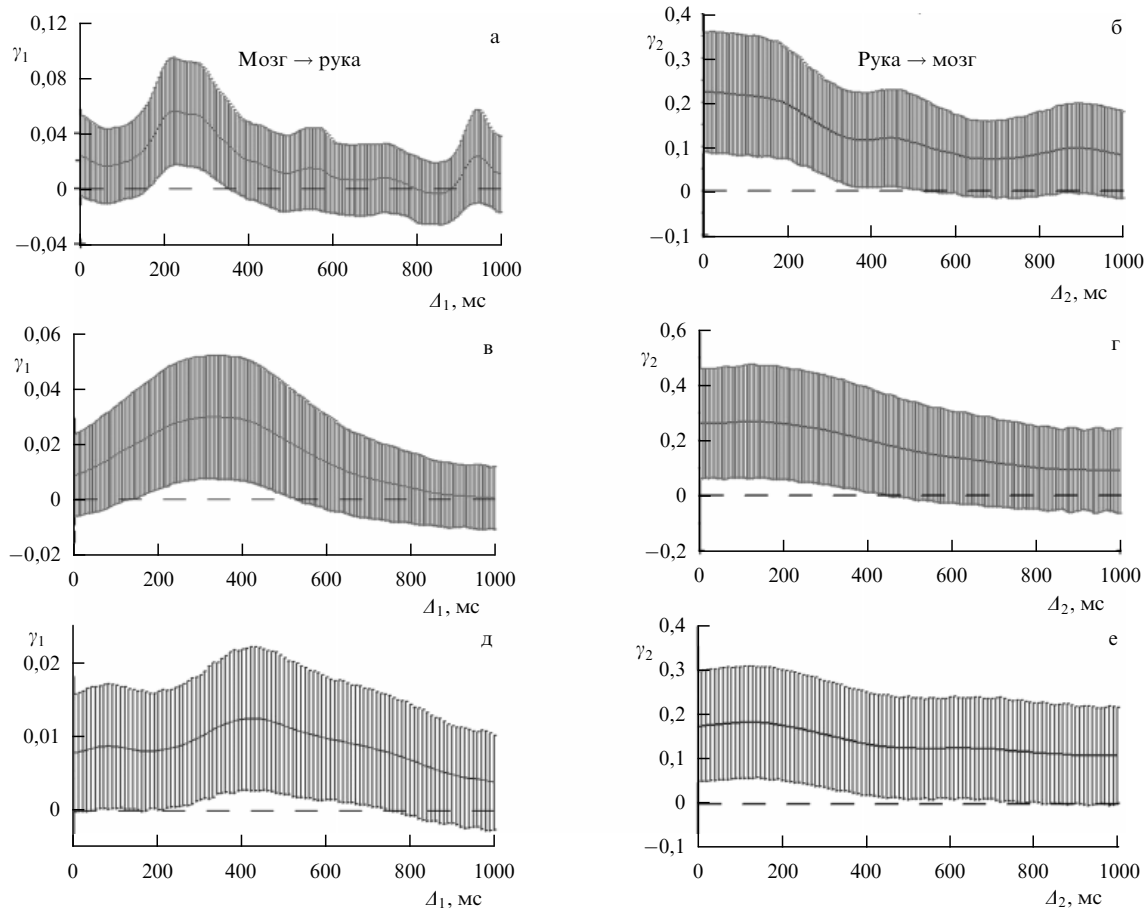


Рис. 4. Оценки силы влияния активности таламуса на колебания руки (а, в, д) и наоборот (б, г, е) для трех пациентов (соответственно (а, б), (в, г) и (д, е)) в зависимости от пробного времени запаздывания [52]. Представлены усредненные по ансамблю из 10–15 интервалов сильного тремора оценки и их усредненные 95%-ные доверительные интервалы (безразмерные величины).

помощью линейной оценки причинности по Грейнджеру [53]. Но метод моделирования фазовой динамики позволил получить новый результат: выявлено обратное влияние и оценено время запаздывания. Это запаздывание велико по сравнению со временем прохождения сигнала от мозга к мышцам по нервным волокнам. Поэтому оно было интерпретировано [52] как признак опосредованного влияния активности таламуса и базальных ганглий на колебания конечностей (после обработки сигналов в коре головного мозга). Кроме того, это означает, что ядра таламуса и базальных ганглий являются звеньями "кольца обратной связи", определяющей колебания конечности, а не просто пассивными приемниками сигналов. Поэтому новая методика десинхронизирующей ГЭСМ этих целевых структур [2, 50] представляется более специфичным и мягким воздействием, которое согласно теоретическим исследованиям может даже заставить стимулируемые нейронные сети "отучиться" от патологической активности [51] и вызвать положительный долгосрочный эффект. Другой важной областью приложения методики анализа направленных связей может стать определение положения целевой точки для стимуляции, что позволит более эффективным образом размещать стимулирующие электроды.

Статистическая значимость представленных выводов подтверждена с помощью тестов на суррогатных данных [54]. Эти тесты показали также, что линейные методы не

позволяют выявить влияние активности таламуса и базальных ганглий на конечности.

Подобные же предварительные результаты, показывающие перспективность методики для локализации эпилептического фокуса по записям локальных потенциалов, представлены в работе [55].

5. Заключение

Важная в прикладном и фундаментальном аспектах проблема моделирования по временным рядам часто решается с использованием идей и методов нелинейной динамики. Наиболее известным из приложений такого моделирования является *прогноз* поведения системы (см., например, [56]). Можно перечислить и ряд других: выделение квазистационарных участков в нестационарном сигнале [44], прогноз бифуркаций слабонеавтономных систем [57], многоканальная конфиденциальная передача информации [43] и др. В данном докладе показаны возможности моделирования при решении важной практической задачи диагностики взаимодействия между колебательными системами.

Хотя математическое моделирование всегда останется в значительной степени искусством, тем не менее, могут быть выделены некоторые общие принципы и частные рецепты, позволяющие повысить практические шансы на получение "хорошей" модели. Некоторые соображения по этому поводу изложены выше. Соот-

ветствующие методики успешно применялись для исследования реальных систем (см., например, [31–33, 41–45]): нелинейных электрических цепей, климатических процессов, функциональных систем живых организмов и пр. В данном докладе представлен новый результат, иллюстрирующий эффективность подходов при решении задачи нейрофизиологии (исследование механизмов паркинсоновского тремора).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 07-02-00747, 08-02-00081), программы Президиума РАН, Центра ЕС по биомоделированию (BioSim LSHV-CT-20004-005137).

Список литературы

1. Вох Е Р, Jenkins G M *Time Series Analysis. Forecasting and Control* (San Francisco: Holden-Day, 1970) [Бокс Дж, Дженкинс Г *Анализ временных рядов. Прогноз и управление* (М.: Мир, 1974)]
2. Tass P A *Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modelling and Data Analysis* (Berlin: Springer-Verlag, 1999)
3. Пиковский А С, Розенблум М Г, Куртс Ю *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (М.: Техносфера, 2003)
4. Блехман И И *Синхронизация в природе и технике* (М.: Наука, 1981) [Translated into English: Blekhman I I *Synchronization in Science and Technology* (New York: ASME Press, 1988)]
5. Arnhold J et al. *Physica D* **134** 419 (1999)
6. Lehnertz K et al. (Eds) *Chaos in Brain? Proc. of the Workshop, Bonn, Germany, 10–12 March 1999* (Singapore: World Scientific, 2000)
7. Анищенко В С, Вадивасова Т Е, Астахов В В *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем* (Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999)
8. Schreiber T *Phys. Rev. Lett.* **85** 461 (2000)
9. Hlaváčková-Schindler K et al. *Phys. Rep.* **441** 1 (2007)
10. Čenys A, Lasiene G, Pyragas K *Physica D* **52** 332 (1991)
11. Rulkov N F et al. *Phys. Rev. E* **51** 980 (1995)
12. Schiff S J et al. *Phys. Rev. E* **54** 6708 (1996)
13. Quian Quiroga R, Kreuz T, Grassberger P *Phys. Rev. E* **66** 041904 (2002)
14. Quian Quiroga R et al. *Phys. Rev. E* **65** 041903 (2002)
15. Smirnov D A, Andrzejak R G *Phys. Rev. E* **71** 036207 (2005)
16. Smirnov D et al. *Chaos* **17** 013111 (2007)
17. Prokhorov M D, Ponomarenko V I *Phys. Rev. E* **72** 016210 (2005)
18. Feldmann U, Bhattacharya J *Int. J. Bifurc. Chaos* **14** 505 (2004)
19. Ancona N, Marinazzo D, Stramaglia S *Phys. Rev. E* **70** 056221 (2004)
20. Granger C W J *Econometrica* **37** 424 (1969)
21. Blinowska K J, Kuś R, Kamiński M *Phys. Rev. E* **70** 050902 (2004)
22. Wang W et al. *J. Climate* **17** 4752 (2004)
23. Hallin M, Saidi A J. *Time Ser. Analysis* **26** 83 (2005)
24. Мохов И И, Смирнов Д А *Изв. РАН. Сер. Физ. атм. и океана* **42** 650 (2006) [Mokhov I I, Smirnov D A *Izv. Russ. Acad. Sci., Atm. Ocean. Phys.* **42** 598 (2006)]
25. Rosenblum M G, Pikovsky A S *Phys. Rev. E* **64** 045202 (2001)
26. Вайнштейн Л А, Вакман Д Е *Разделение частот в теории колебаний и волн* (М.: Наука, 1983)
27. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 2291 (2000)
28. Cimprone L, Rosenblum M, Pikovsky A *Phys. Rev. E* **70** 046213 (2004)
29. Smirnov D A, Bezruchko B P *Phys. Rev. E* **68** 046209 (2003)
30. Ljung L *System Identification. Theory for the User* (Englewoodcliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987) [Льюнг Л *Идентификация систем. Теория для пользователя* (М.: Наука, 1991)]
31. Малинецкий Г Г, Потапов А Б *Современные проблемы нелинейной динамики* (М.: Эдиториал УРСС, 2000)
32. Gouesbet G, Meunier-Guttin-Cluzel S, Ménard O (Eds) *Chaos and Its Reconstruction* (New York: Nova Sci. Publ., 2003)
33. Безручко Б П, Смирнов Д А *Математическое моделирование и хаотические временные ряды* (Саратов: Колледж, 2005)
34. Bezruchko B P et al. *Phys. Rev. E* **64** 056216 (2001)
35. Пономаренко В И и др. *ЖЭТФ* **127** 515 (2005) [Ponomarenko V I et al. *JETP* **100** 457 (2005)]
36. Bezruchko B P, Smirnov D A *Phys. Rev. E* **63** 016207 (2000)
37. Bezruchko B P, Smirnov D A, Sysoev I V *Chaos, Solitons Fractals* **29** 82 (2006)
38. Smirnov D A, Vlaskin V S, Ponomarenko V I *Phys. Lett. A* **336** 448 (2005)
39. Bezruchko B P, Dikanev T V, Smirnov D A *Phys. Rev. E* **64** 036210 (2001)
40. Smirnov D A, Bezruchko B P, Seleznev Ye P *Phys. Rev. E* **65** 026205 (2002)
41. Abarbanel H D I et al. *Rev. Mod. Phys.* **65** 1331 (1993)
42. Kantz H, Schreiber T *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997)
43. Павлов А Н, Янсон Н Б, Анищенко В С *Радиотехника и электроника* **44** 1075 (1999) [Pavlov A N, Yanson N B, Anishchenko V S *J. Commun. Technol. Electron.* **44** 999 (1999)]
44. Аносов О Л, Бутковский О Я, Кравцов Ю А *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика* **8** 29 (2000)
45. Voss H U, Timmer J, Kurths J *Int. J. Bifurc. Chaos* **14** 1905 (2004)
46. Nini A et al. *J. Neurophysiol.* **74** 1800 (1995)
47. Rivlin-Etzion M et al. *Current Opinion Neurobiol.* **16** 629 (2006)
48. Benabid A-L et al. *Lancet* **337** 403 (1991)
49. Benabid A-L et al. *Acta Neurol. Belg.* **105** 149 (2005)
50. Tass P A *Biol. Cybern.* **89** 81 (2003)
51. Tass P A, Majtanik M *Biol. Cybern.* **94** 58 (2006)
52. Smirnov D A et al. *Europhys. Lett.* (2008) (submitted)
53. Wang S et al. *J. Franklin Inst.* **344** 180 (2007)
54. Dolan K T, Neiman A *Phys. Rev. E* **65** 026108 (2002)
55. Smirnov D A et al. *Chaos* **15** 024102 (2005)
56. Кравцов Ю А (Ред.-сост.) *Пределы предсказуемости* (М.: ЦентрКом, 1997)
57. Фейгин А М и др. *Изв. вузов. Радиофизика* **44** 376 (2001) [Feigin A M et al. *Radiophys. Quantum Electron.* **44** 348 (2001)]