

01

## Определение параметров систем с запаздыванием по переходным процессам

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 31 октября 2007 г.

Предложен метод восстановления систем с запаздывающей обратной связью, совершающих периодические колебания. Метод основан на исследовании отклика системы с запаздыванием на регулярное внешнее воздействие, приводящее к возникновению переходного процесса.

PACS: 05.45.Tp

Задача определения параметров систем с запаздыванием по временным рядам наблюдаемых динамических переменных привлекает в последние годы внимание многих исследователей. Для ее решения были предложены различные методы, позволяющие восстановить модельные уравнения систем с запаздыванием по хаотическим временным рядам их колебаний [1–9]. Однако в случаях, когда системы с запаздыванием находятся в периодических режимах, эти методы оказываются неэффективными [10]. Вместе с тем многие практически важные системы с запаздыванием функционируют в периодических или близких к периодическим режимам [11–12]. Поэтому разработка методов определения по временным рядам параметров систем с запаздыванием, совершающих периодические колебания, весьма актуальна. Первые шаги в этом направлении были предприняты недавно в работе [13], в которой для оценки времени запаздывания предлагалось воздействовать на систему шумом большой амплитуды, время корреляции которого много меньше времени задержки системы, и анализировать поведение корреляционной функции. В настоящей работе нами предлагается другой подход для восстановления систем с запаздыванием в периодическом режиме, основанный на исследовании отклика системы на регулярное внешнее воздействие, приводящее к возникновению переходного процесса.

Рассмотрим систему с запаздыванием, описываемую дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом,

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)), \quad (1)$$

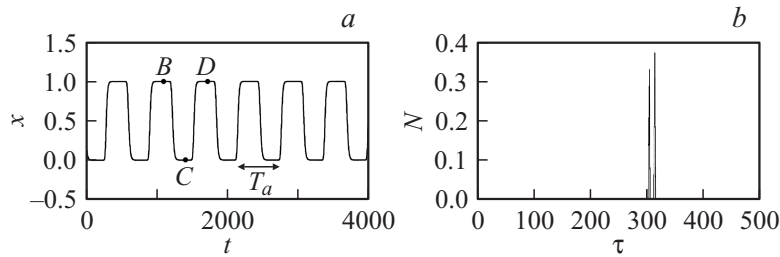
где  $\tau_1$  — время запаздывания,  $\varepsilon_1$  — параметр, характеризующий инерционные свойства системы,  $f$  — нелинейная функция. Ранее нами было установлено, что во временных реализациях систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [8]. Если система (1) совершает хаотические колебания, то экстремумы в ее временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства был предложен метод определения  $\tau_1$ , использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Определив для различных значений  $\tau$  число  $N$  ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени  $\tau$ , одновременно являются экстремальными, и построив зависимость  $N(\tau)$ , легко найти время задержки  $\tau_1$ , как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [8].

Однако если система (1) совершает периодические автоколебания, такой подход оказывается неработоспособным, так как экстремумы во временном ряде расположены регулярным образом. В результате на графике  $N(\tau)$  имеется несколько пиков, разделенных участками нулевых значений  $N$ . В качестве примера на рис. 1 приведены временной ряд и зависимость  $N(\tau)$  системы (1) при  $\tau_1 = 300$ ,  $\varepsilon_1 = 10$ ,  $f(x) = \lambda - x^2$ ,  $\lambda = 1.0$ . При выбранном значении параметра нелинейности  $\lambda$  система (1) демонстрирует периодическое поведение с периодом  $T_a = 619$  (рис. 1, *a*). Так как временная реализация колебаний имеет несимметричный вид, на графике  $N(\tau)$  (рис. 1, *b*) наблюдаются два пика при  $\tau = 305$  и  $\tau = 314$ , равных расстоянию между максимумом  $B$  и минимумом  $C$  и между минимумом  $C$  и максимумом  $D$  соответственно. Таким образом, зависимость  $N(\tau)$  не позволяет определить время запаздывания по временной реализации периодических колебаний.

Будем воздействовать на систему (1) внешним сигналом  $F(t)$ , т.е. рассмотрим систему следующего вида:

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)) + F(t). \quad (2)$$

В качестве внешнего воздействия  $F(t)$  возьмем сигнал в виде прямоугольных импульсов с амплитудой  $A$ , периодом  $T$  и длительностью

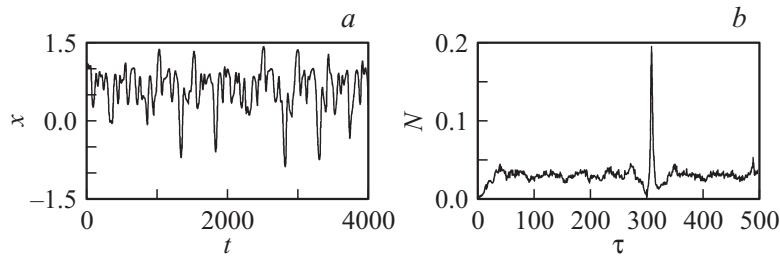


**Рис. 1.** *a* — временная реализация периодических автоколебаний системы (1). *b* — число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов во временном ряде.

импульса  $M$ . Если воздействие достаточно сильное, то оно приводит к возникновению переходного процесса. В результате движение системы совершается в более широкой области фазового пространства, что позволяет получить дополнительную информацию о динамике системы и может помочь восстановить ее параметры [14]. В частности, появление во временной реализации колебаний большого количества дополнительных экстремумов на участках, соответствующих переходному процессу, приводит к появлению ярко выраженного минимума на зависимости  $N(\tau)$ , по которому можно определить время задержки.

На рис. 2 приведены временной ряд и зависимость  $N(\tau)$  системы (2) при таких же значениях параметров, как на рис. 1 для автономной системы (1), и параметрах воздействия  $A = 0.5$ ,  $T = 490$ ,  $M = 0.2T$ . Временной ряд при этом похож на хаотический (рис. 2, *a*) и содержит большое количество нерегулярно расположенных экстремумов, что позволяет точно восстановить время запаздывания по графику  $N(\tau)$ , построенному при шаге измерения  $\tau$ , равном 1, и демонстрирующему минимум при  $\tau = \tau_1 = 300$  (рис. 2, *b*).

Исследования показывают, что предложенный способ определения времени запаздывания работоспособен в широком диапазоне изменения параметров внешнего воздействия. При  $A = 0.5$  и  $M = 0.2T$  период повторения импульсов внешнего воздействия  $T$ , при котором удается точно определить  $\tau_1$ , может быть выбран любым: от  $T = 1.2\tau_1$  до  $T = 1.8\tau_1$ . Имеются также более узкие области значений параметра  $T$ , меньшего  $\tau_1$  и большего  $2\tau_1$ , при которых время запаздывания восстанавливается точно. Заметим, что при выборе  $T$  можно использовать

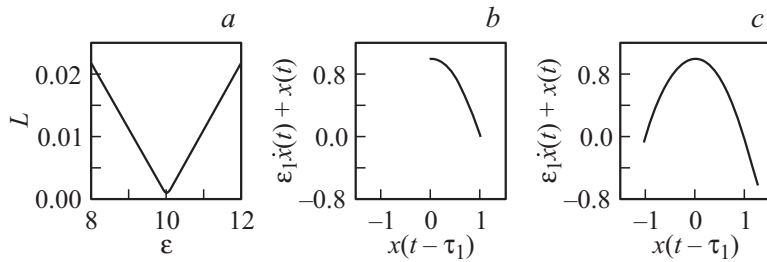


**Рис. 2.** *a* — временная реализация колебаний системы (2). *b* — число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов во временном ряде.  $N_{\min}(\tau) = N(300)$ .

грубую оценку времени запаздывания автономной системы (1):  $\tau_1$  всегда меньше  $T_a/2$ . Мы также тестировали метод, меняя в широких пределах длительность импульса от  $M = 0.05T$  до  $M = 0.5T$ . Эффективность метода сохраняется, однако при малых  $M$  требуется увеличение амплитуды  $A$ , величину которой можно уменьшать с увеличением  $M$ . Следует отметить, что определение времени запаздывания возможно также и при гармоническом виде внешнего воздействия  $F(t)$ , если его параметры таковы, что в результате его действия система с запаздыванием демонстрирует хаотическое поведение.

Восстановление параметра  $\varepsilon_1$  и нелинейной функции  $f$  может быть проведено по невозмущенному периодическому временному ряду (рис. 1, *a*) в соответствии с алгоритмом, описанным в [8], где он был применен для хаотических временных рядов систем с запаздыванием. Для его реализации точки временного ряда следует, восстановив  $\tau_1$ , расположить на плоскости  $(x(t - \tau_1), \varepsilon x(t) + x(t))$  и при вариации параметра  $\varepsilon$  определить длину  $L(\varepsilon)$  линии, последовательно соединяющей эти точки, упорядоченные по величине абсциссы. Если параметр  $\varepsilon$  соответствует истинному значению  $\varepsilon_1$ , то, как следует из уравнения (1), точки на исследуемой плоскости воспроизведут нелинейную функцию, а длина  $L(\varepsilon)$  соединяющей их линии будет минимальной. Чем менее точно определены параметры, тем более беспорядочно расположены точки, а соединяющая их ломаная линия имеет большую длину, чем в случае, когда множество точек ложится на одномерную кривую.

На рис. 3, *a* приведена зависимость  $L(\varepsilon)$ , построенная при восстановленном времени запаздывания  $\tau_1 = 300$  и шаге изменения  $\varepsilon$ ,



**Рис. 3.** *a* — длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости  $(x(t - \tau_1), \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$ , в зависимости от  $\varepsilon$ .  $L(\varepsilon)$  нормирована на число точек.  $L_{\min}(\varepsilon) = L(10.00)$ . *b* — восстановленная по периодическому временному ряду нелинейная функция. *c* — нелинейная функция, восстановленная по временному ряду неавтономной системы (2).

равном 0.01. График  $L(\varepsilon)$  демонстрирует минимум при  $\varepsilon = \varepsilon_1 = 10.00$ . Нелинейная функция, восстановленная при  $\tau_1 = 300$  и  $\varepsilon_1 = 10$  по периодическому временному ряду системы (1), приведена на рис. 3, *b*. При таком подходе удается реконструировать лишь фрагмент функции  $f$ , поскольку в силу регулярности движения колебания совершаются в небольшой области фазового пространства. Для более полного восстановления нелинейной функции можно использовать временной ряд неавтономной системы (2). При этом при построении зависимости  $\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_1)$  следует использовать только точки временного ряда, соответствующие собственной динамике системы с запаздыванием, т.е. выбирать точки, расположенные в промежутках между последовательными импульсами воздействия. Восстановленная таким образом нелинейная функция приведена на рис. 3, *c*. Она достаточно хорошо совпадает с истинной квадратичной функцией системы (1).

Метод остается эффективным при наличии шума. Мы применяли его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (2) гауссовского белого шума с нулевым средним значением. Для случаев, когда добавленный шум имел среднеквадратичное отклонение, составляющее до 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда, положение минимума зависимости  $N(\tau)$  все еще позволяло нам точно восстановить время запаздывания. Параметр  $\varepsilon_1$  и нелинейная функция при этом восстанавливались с хорошей точностью, однако для их реконструкции следовало использовать временной ряд неавтономной

системы, используя только точки, расположенные в промежутках между последовательными импульсами воздействия.

Таким образом, нами предложен метод восстановления времени задержки, параметра инерционности и нелинейной функции систем с запаздывающей обратной связью, совершающих периодические колебания. Метод основан на воздействии на систему внешним сигналом, приводящим к возникновению переходного процесса, что позволяет получить дополнительную информацию о динамике системы и помогает восстановить ее параметры.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 07-02-00589 и № 08-02-00081.

## Список литературы

- [1] *Voss H., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [2] *Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [3] *Zhou C., Lai C.-H.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 320–323.
- [4] *Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A. et al.* // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [5] *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513–521.
- [6] *Удальцов В.С., Локе А., Ларже Л., Годжебуэр Ж.-П., Ситрин Д.С.* // Оптический журнал. 2005. Т. 72. № 5. С. 23–28. [*Udaltsov V.S., Locquet A., Langer L., Goedgebuer J.P., Citrin D.S.* // J. of Optical Technology. 2005. V. 72. N 5. P. 373–377.]
- [7] *Ortin S., Gutierrez J.M., Pesquera L., Vasquez H.* // Physica A. 2005. V. 351. P. 133–141.
- [8] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* // Physica D. 2005. V. 203. P. 209–223.
- [9] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 17. С. 73–80. [*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Tech. Phys. Lett. 2006. V. 32. N 9. P. 768–771.]
- [10] *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046213.
- [11] *Bocharov G.A., Rihan F.A.* // J. Comp. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
- [12] *Ringwood J.V., Malpas S.C.* // Am. J. Physiol. Regulatory Integrative Comp. Physiol. 2001. V. 280. P. 1105–1115.
- [13] *Siefert M.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 026215.
- [14] *Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 036210.