

01;09

Восстановление модельных уравнений цепочек связанных систем с запаздыванием по временным рядам

© М.Д. Прохоров, В.И. Пономаренко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: sbire@sgu.ru

В окончательной редакции 8 октября 2007 г.

Впервые предложен метод реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для цепочек связанных систем с задержкой по их временным рядам. Эффективность метода продемонстрирована на примере хаотических временных рядов цепочек как однонаправленно, так и взаимно связанных систем с запаздыванием, описываемых уравнениями Икеды и Маккея—Гласса, при высоких уровнях шума.

PACS: 05.45.Tp

Системы с запаздыванием широко распространены в природе и технике [1]. В отличие от исследования динамики автоколебательных систем с запаздыванием, задача восстановления модельных уравнений таких систем по временным рядам является менее изученной. Так как даже простые системы с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности, универсальные методы реконструкции оказываются неэффективными и для восстановления уравнений систем с задержкой требуется разрабатывать специальные подходы [2–8]. Однако все эти подходы ориентированы на восстановление изолированных систем с запаздыванием. Вместе с тем ситуация, когда несколько систем с запаздыванием взаимодействуют между собой, является типичной в ряде практически важных задач [9–11]. Метод восстановления двух линейно связанных систем с запаздыванием по их хаотическим временным рядам был предложен нами в [12]. В настоящей работе мы развиваем этот метод на случай произвольного числа связанных между собой систем с запаздыванием и предлагаем методику реконструкции по временным рядам модельных уравнений для цепочек

связанных систем с задержкой при различных способах связи элементов цепочки.

Рассмотрим сначала цепочку, состоящую из трех однонаправленно связанных систем с запаздыванием, описываемую уравнениями

$$\varepsilon_1 \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + f_1(x_1(t - \tau_1)), \quad (1)$$

$$\varepsilon_2 \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + f_2(x_2(t - \tau_2)) + k_1[x_1(t) - x_2(t)], \quad (2)$$

$$\varepsilon_3 \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + f_3(x_3(t - \tau_3)) + k_2[x_2(t) - x_3(t)], \quad (3)$$

где τ_1, τ_2, τ_3 — времена запаздывания, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — параметры, характеризующие инерционные свойства элементов системы, f_1, f_2, f_3 — нелинейные функции, k_1 и k_2 — коэффициенты связи. Такой способ связи систем с запаздыванием и возникающая при нем синхронизация колебаний элементов цепочки исследовались в [9,13]. Для восстановления по временной реализации $x_i(t)$ времени задержки τ_i воспользуемся методом, предложенным нами в работе [8], в которой было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время задержки. Тогда для нахождения τ_i нужно найти экстремумы временного ряда, определить для различных значений времени τ число N пар экстремумов, удаленных друг от друга на τ , и построить зависимость $N(\tau)$. Значению времени запаздывания τ_i соответствует положение абсолютного минимума $N(\tau)$. Исследования показывают, что этот метод определения времени задержки может быть успешно применен и для связанных систем с запаздыванием при условии, что взаимодействие систем не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов во временных реализациях их колебаний.

На систему (1) не действуют другие системы, и для восстановления ε_1 и функции f_1 может быть использован метод, предложенный в [8]. А для реконструкции модельных уравнений (2) и (3) второй и третьей систем соответственно будем использовать следующий подход. Если построить зависимости $\varepsilon_{2,3} \dot{x}_{2,3}(t) + x_{2,3}(t) - k_{1,2}(x_{1,2}(t) - x_{2,3}(t))$ от $x_{2,3}(t - \tau_{2,3})$, то, как следует из уравнений (2) и (3), они воспроизведут нелинейные функции f_2 и f_3 соответственно. Поскольку заранее величины $\varepsilon_{2,3}$ и $k_{1,2}$ неизвестны, будем перебирать различные их значения, добываясь однозначных зависимостей на исследуемых плоскостях, которые возможны лишь при правильном выборе параметров. В качестве количественного критерия однозначности при таком

поиске $\varepsilon_{2,3}$ и $k_{1,2}$ будем использовать минимальную длину $L(\varepsilon, k)$ линии, последовательно соединяющей точки на перебираемых плоскостях вложения, упорядоченные по величине абсциссы. При ошибочном выборе значений $\varepsilon_{2,3}$ и $k_{1,2}$ мы получаем на плоскости набор точек, не связанных между собой функционально. Чем менее точно определены параметры, тем более беспорядочно расположены точки, а соединяющая их ломаная линия имеет большую длину, чем в случае, когда множество точек ложится на одномерную кривую. Для уменьшения времени счета начальный шаг изменения параметров ε и k можно выбрать большим, а затем уменьшить его в окрестности минимума $L(\varepsilon, k)$.

В качестве примера на рис. 1 приведены результаты реконструкции уравнения (3) по хаотическим, сильно зашумленным временным рядам переменных $x_2(t)$ и $x_3(t)$ цепочки однонаправленно связанных уравнений Икеды [14], описываемой уравнением

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0i}) + k_{i-1}[x_{i-1}(t) - x_i(t)], \quad (4)$$

где $i = 1, 2, 3$, $x_0 \equiv x_1$. Использовано граничное условие $x_0 \equiv x_1$, при котором на первый элемент цепочки не действуют другие элементы. Параметры всех трех уравнений Икеды выбраны одинаковыми: $\mu_{1,2,3} = 20$, $\tau_{1,2,3} = 2$, $x_{01,02,03} = \pi/3$, а начальные условия различными. При этих параметрах системы демонстрируют движение на хаотическом аттракторе высокой размерности [14]. Для уравнения (4) $\varepsilon_i = 1$. Коэффициенты связи между элементами цепочки выбраны различными: $k_1 = 1.5$ и $k_2 = 1$. Заметим, что при выбранных значениях параметров синхронизация однонаправленно связанных систем Икеды наблюдается при $k_1 = k_2 \geq 7.5$. Во все три связанные системы добавлен гауссовский белый шум с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением, составляющим 20% от среднеквадратичного отклонения временного ряда без шума (отношение сигнал/шум около 14 dB).

На рис. 1, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в третьем элементе цепочки. Масштабы таковы, что 200 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки. Несмотря на высокий уровень шума, зависимость $N(\tau)$, построенная при шаге изменения τ , равном 0.01, демонстрирует четко выраженный минимум при τ , в точности соответствующем времени запаздывания (рис. 1, *b*). Отметим, что для сглаживания временного ряда и уменьшения числа обусловленных шумом экстремумов при оценке производной по временному ряду использовалось 7 соседних точек в процедуре локальной аппроксимации.

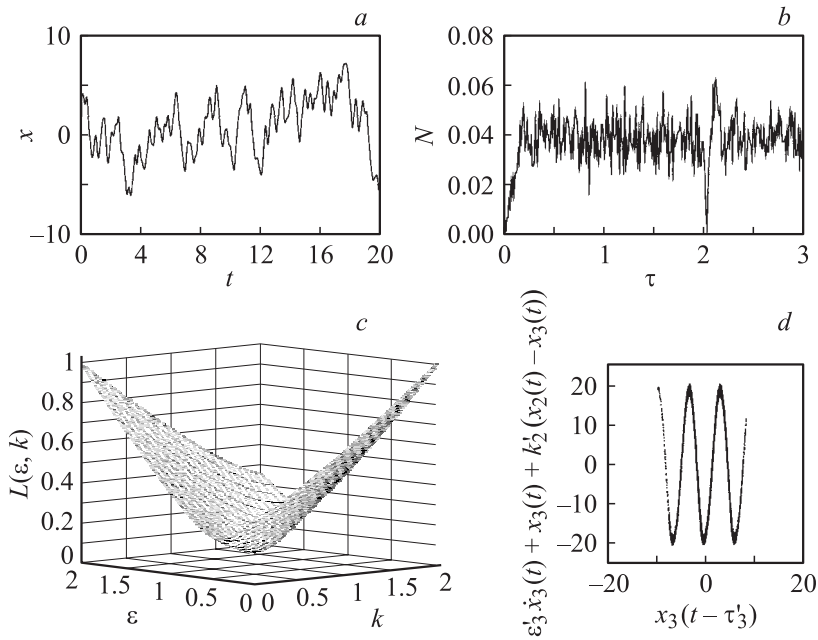


Рис. 1. Восстановление элемента цепочки однонаправленно связанных уравнений Икеды в присутствии 20% гауссовского белого шума. *a* — временной ряд переменной $x_3(t)$. *b* — число N пар экстремумов временного ряда переменной $x_3(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде. $N_{\min}(\tau) = N(2.00)$. *c* — зависимость $L(\varepsilon, k)$, нормированная на максимальную длину $L_{\max}(\varepsilon, k) = L(0.0, 2.0)$ в исследуемом интервале параметров. $L_{\min}(\varepsilon, k) = L(0.98, 0.95)$. *d* — восстановленная нелинейная функция f_3 при $\tau_3' = 2.00$, $\varepsilon_3' = 0.98$, $k_2' = 0.95$.

Длина $L(\varepsilon, k)$ линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости $(x_3(t - \tau_3), \varepsilon_3 \dot{x}_3(t) + x_3(t) - k_2(x_2(t) - x_3(t)))$, минимальна при $\varepsilon_3 = 0.98$ и $k_2 = 0.95$, перебираемых с шагом 0.01 (рис. 1, *c*). Восстановленная при этих значениях мультимодальная функция f_3 приведена на рис. 1, *d*. Она достаточно хорошо совпадает с истинной функцией уравнения Икеды. Аппроксимация восстановленной нелинейной функции полиномом 12-й степени позволила нам получить следующую оценку параметров: $\mu_3' = 19.31$ и $x_{03}' = 1.025$ ($\pi/3 \approx 1.047$).

Рассмотрим теперь цепочку, состоящую из диффузионно связанных систем с запаздыванием, описываемую уравнением

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + k[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)], \quad (5)$$

где i — номер элемента цепочки, а k — коэффициент связи. Исследование синхронизации таких цепочек взаимно связанных систем с запаздыванием проводилось в [15,16]. Реконструкция уравнений цепочек связанных систем с запаздыванием до настоящего времени не исследовалась. Для восстановления уравнений элементов цепочки (5) мы предлагаем использовать следующий подход. Для нахождения τ_i будем использовать описанный выше метод, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда системы. Установлено, что такой метод определения времени запаздывания работоспособен в очень широких пределах изменения параметров взаимодействующих систем и коэффициентов связи между ними. Для восстановления нелинейной функции f_i и параметров ε_i и k потребуются временные реализации колебаний в трех элементах цепочки: i -м и двух соседних, $i - 1$ -м и $i + 1$ -м. Если построить на плоскости множество точек с координатами $(x_i(t - \tau_i), \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - k[k_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)])$, то, как следует из уравнения (5), оно воспроизведет функцию f_i . Так как значения ε_i и k неизвестны, будем перебирать их из некоторого интервала, добиваясь однозначной зависимости на выбранной плоскости, которая возможна лишь при правильном выборе параметров. В качестве количественного критерия однозначности будем опять использовать минимальную длину $L(\varepsilon_i, k)$ линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на рассматриваемой плоскости. Минимум длины этой линии будет наблюдаться при истинных значениях параметров ε_i и k , а построенное при них множество точек воспроизведет нелинейную функцию.

Для иллюстрации метода рассмотрим реконструкцию одного из элементов цепочки (5), состоящей из трех диффузионно связанных неидентичных систем Маккея–Гласса

$$\dot{x}_i(t) = -b_i x_i(t) + \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{1 + x_i^{c_i}(t - \tau_i)} \quad (6)$$

с периодическими граничными условиями: $i = 1, 2, 3$; $x_4 \equiv x_1$. Параметры $\tau_1 = 300$, $\tau_2 = 350$, $\tau_3 = 400$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.25$,

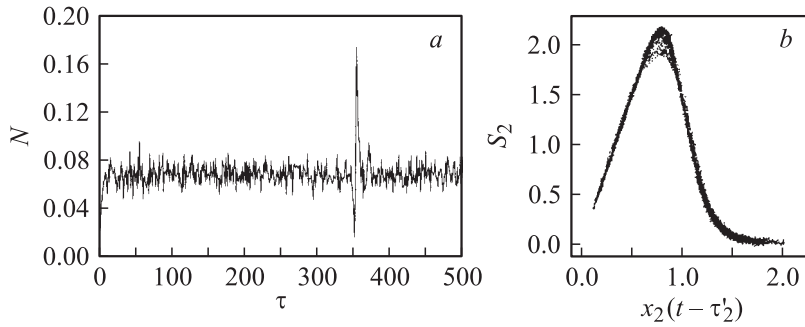


Рис. 2. Восстановление элемента цепочки взаимно связанных уравнений Маккея–Гласса в присутствии 10% аддитивного гауссовского белого шума. *a* — число N пар экстремумов временного ряда переменной $x_2(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде. $N_{\min}(\tau) = N(350)$. *b* — восстановленная нелинейная функция f_2 при $\tau'_2 = 350$, $\varepsilon'_2 = 10.0$, $k' = 0.09$. $S_2 = \varepsilon'_2 \dot{x}_2(t) + x_2(t) - k'(x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t))$.

$b_{1,2,3} = 0.1$, $c_{1,2,3} = 10$ соответствуют движению элементов цепочки на хаотическом аттракторе высокой размерности. Делением на b_i цепочка связанных уравнений Маккея–Гласса приводится к виду (5) с $\varepsilon_{1,2,3} = 10$. Коэффициент связи между элементами цепочки $k = 0.1$ в 2.5 меньше значения, при котором наступает полная синхронизация колебаний цепочки. К временным рядам всех трех систем Маккея–Гласса добавлен 10%-ный гауссовский белый шум (отношение сигнал/шум равно 20 dB).

На рис. 2 приведены результаты реконструкции второго элемента замкнутой цепочки диффузионно связанных уравнений Маккея–Гласса. Несмотря на присутствие шума, отчетливый минимум зависимости $N(\tau)$, построенной по временному ряду переменной $x_2(t)$ при шаге изменения τ , равном 1, наблюдается при $\tau = \tau_2 = 350$ (рис. 2, *a*). Зависимость $L(\varepsilon_2, k)$ демонстрирует минимум при $\varepsilon_2 = 10.0$ и $k = 0.09$. На рис. 2, *b* приведена восстановленная нелинейная функция f_2 . Аналогичным образом удается получить высокое качество восстановления первого и третьего элементов цепочки.

Описанный подход не имеет ограничений на число элементов в цепочке. Кроме того, метод может быть распространен на связанные системы с запаздыванием высокого порядка и с несколькими време-

нами задержки, а также на случай дополнительного запаздывания в связи между локальными элементами. Однако вычислительные затраты при этом существенно возрастают, так как требуется восстанавливать больше параметров. В случае синхронизации диффузионно связанных систем с запаздыванием, возникающей при сильной связи между системами, метод позволяет восстановить параметры локальных элементов, но коэффициенты связи определить не удастся.

Итак, нами предложен метод восстановления по временным рядам модельных уравнений цепочек связанных систем с запаздыванием, эффективный при высоких уровнях шума.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-02-00589.

Список литературы

- [1] Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [2] Voss H., Kurths J. // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [3] Zhou C., Lai C.-H. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. N 1. P. 320–323.
- [4] Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A. et al. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [5] Horbelt W., Timmer J., Voss H.U. // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513–521.
- [6] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 6. С. 73–78. [Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. // Tech. Phys. Lett. 2005. V. 31. N 3. P. 252–254].
- [7] Ortin S., Gutierrez J.M., Pesquera L., Vasquez H. // Physica A. 2005. V. 351. P. 133–141.
- [8] Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P. // Physica D. 2005. V. 203. P. 209–223.
- [9] Mensour B., Longtin A. // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. N 1–3. P. 59–70.
- [10] Koryukin I.V., Mandel P. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 026 201.
- [11] Kotani K., Takamasu K., Ashkenzy Y. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 051 923.
- [12] Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. P. 016 210.
- [13] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. N 3. P. 3067–3071.
- [14] Ikeda K., Matsumoto K. // Physica D. 1987. V. 29. P. 223–235.
- [15] Burić N., Todorović D. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 066 218.
- [16] Burić N., Vasović N. // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 31. N 2. P. 336–342.