РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2007, том 52, № 5, с. 1–11

РУБРИКА
РУБРИКА

УДК @@@

ДИАГНОСТИКА СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТНОГО АНАЛИЗА

© 2007 г. А. А. Короновский, В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров, А. Е. Храмов

Поступила в редакцию 25.07.2005 г.

Предложен метод, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании, который позволяет диагностировать наличие синхронизации колебаний автогенератора внешним воздействием с линейной модуляцией частоты и отличить эту ситуацию от случая просачивания внешнего сигнала в автоколебания, под которым понимается суммирование сигналов без изменения частоты автоколебаний. Эффективность метода демонстрируется на примере генератора Ван дер Поля и экспериментальных физиологических данных.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что взаимодействие между нелинейными колебательными системами различной природы, в том числе демонстрирующими хаотическое поведение, может привести к их синхронизации [1]. Особый интерес в последние годы вызывает исследование синхронизации в живых организмах, жизнедеятельность которых обусловлена взаимодействием большого числа сложных ритмических процессов [2–4]. Ярким примером такого взаимодействия между различными физиологическими ритмами является функционирование сердечно-сосудистой системы человека. Наиболее значимыми колебательными процессами, определяющими ее динамику, являются основной сердечный ритм, дыхание, а также процесс медленной регуляции кровяного давления и сердечного ритма с собственной частотой вблизи 0.1 Гц [5]. В результате взаимодействия эти ритмы проявляются в различных сигналах: электрокардиограммах (ЭКГ), кровяном давлении, потоке крови, вариабельности сердечного ритма (ВСР) [6].

Сравнительно недавно было обнаружено, что основные ритмы сердечно-сосудистой системы могут быть синхронизованы между собой [7–10]. Причем было установлено, что системы, задающие основной сердечный ритм и ритм медленной регуляции кровяного давления, можно рассматривать как автогенераторы под внешним воздействием, в качестве которого выступает дыхание [10, 11]. Такое заключение о характере взаимодействия ритмов сердечно-сосудистой системы становится особенно убедительным при сопоставлении экспериментальных данных при дыхании человека по заданному ритму с модельными данными, получаемыми при исследовании неавтономных автогенераторов. Однако при частотах дыхания, близких к 0.1 Гц, т.е. к собственной частоте ритма регуляции кровяного давления, становится сложным отличить синхронизацию этих двух процессов от всегда имеющего место эффекта присутствия респираторной компоненты в сигнале ВСР, используемом нами для анализа медленных колебаний давления крови. Действительно, вариабельность сердечного ритма человека является результатом сложного взаимодействия многих физиологических процессов [12], при близких частотах которых разделение их вклада в ВСР становится проблематичным.

В данной работе мы предлагаем метод, основанный на вейвлетном преобразовании, который позволяет диагностировать наличие синхронизации колебаний автогенератора внешним воздействием с линейной модуляцией частоты и отличить эту ситуацию от случая просачивания внешнего сигнала в автоколебания, под которым будем понимать суммирование сигналов без изменения частоты автоколебаний. Эффективность метода демонстрируется на численных примерах и поэкспериментальным физиологическим сигналам.

1. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Общность явлений, наблюдаемых в периодически возбуждаемых автогенераторах физиологической и физической природы, была продемонстрирована в работах [7, 9], в которых было показано, что качественно похожие особенности синхронизации наблюдаются и при воздействии дыхания на сердцебиение и процесс регуляции кровяного давления, и при воздействии периодической силы на генератор Ван дер Поля. Рассмотрим асимметричный генератор Ван дер Поля под

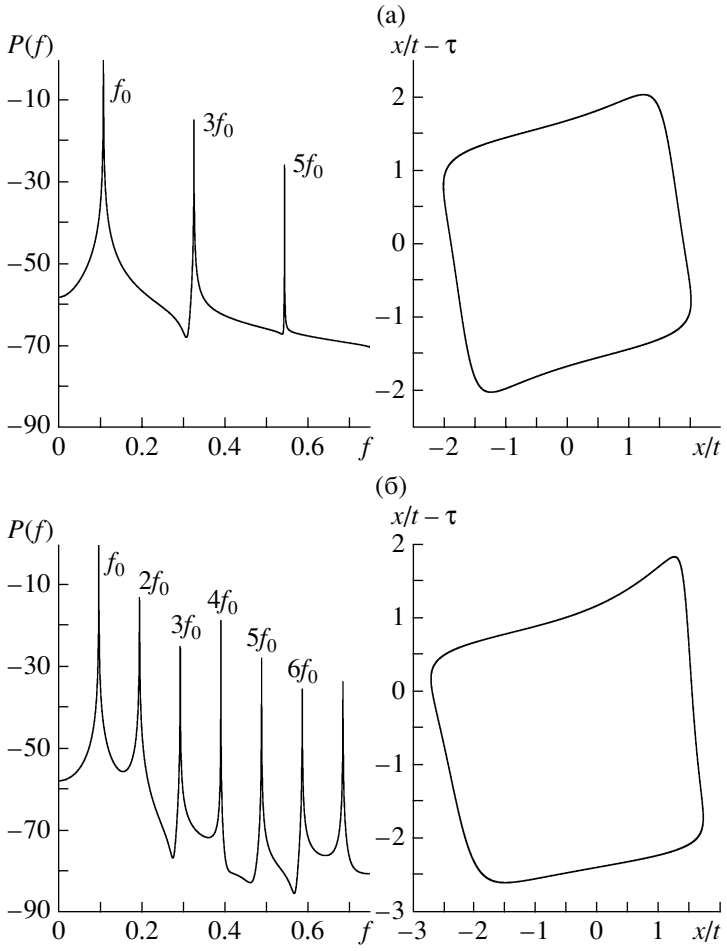

Рис. 1. Фурье-спектры мощности (слева) и фазовые портреты (справа) колебаний в симметричном (т.е. при $\alpha = 0$) (а) и асимметричном ($\alpha = 1$) (б) генераторах Ван дер Поля в автономном режиме.

внешним воздействием с линейной модуляцией частоты в качестве модели взаимодействия дыхания и процесса медленной регуляции кровяного давления.

Исследуемая модель асимметричного генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием определяется как

$$\ddot{x} - \mu(1 - \alpha x - x^2)x + \omega_0^2 x = K\sin(\omega_L t). \qquad (1)$$

Здесь $\mu = 1.0$ и $\omega_0 = 0.24\pi$, а ω_L – частота внешнего воздействия меняется линейным образом во времени по закону

$$\omega_L = 2\pi(0.03 + (0.2 - 0.03)t/T), \qquad (2)$$

где t – текущее время, $T = 1800$ – максимальное время расчета. Данные значения были выбраны таким образом, чтобы обеспечить сопоставление результатов численного моделирования с данными, полученными при анализе сигналов дыхания и вариабельности сердечного ритма человека (см. разд. 4).

Параметр $\alpha = 0$ соответствует классическому генератору Ван дер Поля, который характеризуется симметричным предельным циклом. Следствием симметричности фазового портрета колебаний является то, что в спектре мощности колебаний наблюдаются только нечетные $(2n + 1)f_0$ гармоники основной частоты f_0 ($n = 1, 2, \ldots$). Это иллюстрирует рис. 1а, на котором приведены спектр и фазовый портрет колебаний в симметричном генераторе Ван дер Поле в автономном режиме (при амплитуде внешнего сигнала $K = 0$). Видно, что в спектре мощности наблюдаются только нечетные гармоники основной частоты: $3f_0$, $5f_0$, $7f_0$ и т.д. Наличие таких гармоник является весьма неудобным для моделирования процессов взаимодействия основных ритмов сердечно-сосудистой системы, так как в них ярко проявляется динамика второй гармоники автоколебаний.

Поэтому предлагаем рассмотреть в качестве модели для анализа синхронизации физиологических процессов в сердечно-сосудистой системе модель модифицированного генератора Ван дер

Поля с квадратичной нелинейностью. В представленной работе будем рассматривать модель (1) при значении параметра квадратичной нелинейности $\alpha = 1$. Соответствующие характеристики автономной динамики для этого случая представлены на рис. 1б. Видно, что фазовый портрет сильно асимметричный, в спектре мощности присутствуют как четные, так и нечетные гармоники основной частоты f_0. Таким образом, введение асимметрии в модель позволяет более точно описать взаимодействие реальных систем.

Для рассмотрения и сравнения ситуации синхронизации колебаний внешним сигналом и эффекта просачивания внешнего сигнала в сигнал, снимаемый в эксперименте, помимо модели (1) будем исследовать суммарный сигнал, который формируется как

$$x_\Sigma(t) = x(t) + R\sin(\omega_L t), \tag{3}$$

где $x(t)$ – решение автономного асимметричного уравнения Ван дер Поля, R – амплитуда просачивающегося сигнала; ω_L – частота аддитивного синусоидального сигнала, определяемая соотношением (2).

2. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К АНАЛИЗУ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ. МЕРА СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

При изучении синхронизации хаотических осцилляторов различают различные типы синхронного поведения: полную и обобщенную синхронизацию, синхронизацию с запаздыванием и фазовую [1]. Наиболее часто рассматривают фазовую синхронизацию, для которой оказывается важным введение фазы хаотического сигнала (см. [1, 13–15]). Возникновение фазовой синхронизации означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы $\langle\dot{\phi}(t)\rangle$. В то же время, если спектральный состав сигнала сложный, не всегда удается охарактеризовать динамику системы с помощью одной фазы [16].

В работах [17, 18] предложен новый подход к анализу синхронизации колебаний, основанный на введении непрерывного множества фаз, которое определяется с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [19, 20] временного ряда $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^*_{s,t_0}(t)dt, \tag{4}$$

где $\psi_{s,t_0}(t)$ – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\psi_0(t)$:

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \tag{5}$$

Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\psi_{s,t_0}(t)$, t_0 – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени (“*” означает комплексное сопряжение). Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие “временной масштаб”, как правило, используется вместо понятия “частота”, традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета используется морлет-вейвлет $\psi_0(\eta) = (1/\sqrt[4]{\pi})\exp(j\omega_0\eta)\exp(-\eta^2/2)$ [21]. Выбор значения параметра вейвлета $\omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s = 1/f$ между временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье.

Вейвлетный спектр

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)|\exp[j\phi_s(t_0)] \tag{6}$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0. Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0.

Для визуализации трехмерных вейвлетных поверхностей $|W(s, t_0)|$ будем использовать их проекции на плоскость (s, t_0) [20]. Интенсивность окраски на проекциях поверхности вейвлетного преобразования пропорциональна абсолютной величине коэффициентов $|W(s, t_0)|$. На рис. 2 показаны вейвлетные спектры $|W(s, t_0)|$ автономного асимметричного генератора Ван дер Поля (рис. 2а) и внешнего гармонического сигнала с переменной частотой (рис. 2б). Из вейвлетного спектра колебаний автономного генератора видно, что в вейвлетном спектре наблюдается максимум на масштабе $s_0 = 1/f_0$, соответствующем основной частоте, и масштабе $s_0/2$, соответствующем второй гармонике $2f_0$ основной частоты (отмечены на рис. 2а). В вейвлетном спектре сигнала с переменной частотой наблюдается максимум, положение которого меняется с течением времени и который проявляется на масштабе $s_L(t) = 2\pi/\omega_L(t)$, где $\omega_L(t)$ задается линейным законом (2). Увеличение интенсивности временного масштаба с течением времени (и, соответственно, с ростом частоты) на рис. 2б определяется тем, что спектральные компоненты временного ряда с одинаковой интенсивностью, но различной частотой, выделяются вейвлетным преобразованием в виде максимумов с различной высотой и различной шириной Δs [20]. Поэтому с увеличением частоты возрастает ин-

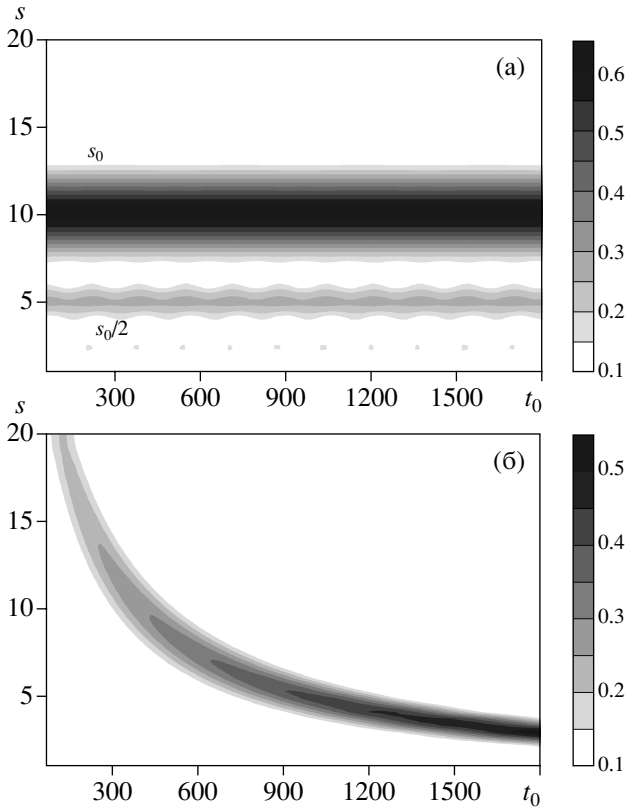

Рис. 2. Вейвлетные спектры $|W(s, t_0)|$ автономного асимметричного генератора Ван дер Поля (а) при $\alpha = 1.0$, $K = 0$ и внешнего гармонического сигнала с переменной частотой (б).

тенсивность соответствующего максимума на вейвлетной поверхности.

Полезно также ввести интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам

$$\langle E(s)\rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \qquad (7)$$

В то же время естественным образом оказывается определенной фаза $\phi_s(t) = \arg W(s, t)$ для каждого временного масштаба s. Иными словами, становится возможным охарактеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi_s(t)$.

Если существует некоторый диапазон временных масштабов $[s_1; s_2]$, такой, что для любого временного масштаба $s \in [s_1; s_2]$ выполняется условие захвата фаз

$$|\Delta\phi_s(t)| = |\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)| < \text{const} \qquad (8)$$

и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{snhr} = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s)\rangle\, ds > 0, \qquad (9)$$

то временные масштабы $s \in [s_1; s_2]$ являются синхронизованными, а автогенераторы находятся в режиме синхронизации временных масштабов [17, 18]. В соотношении (8) $\phi_{s1,2}(t)$ – непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам $s \in [s_1; s_2]$.

Использование подобного подхода позволяет не только эффективно анализировать поведение систем с плохо определенной фазой, когда не удается ввести непрерывную фазу хаотического сигнала, но и с единых позиций рассматривать явление хаотической синхронизации в целом: все известные ранее различные типы синхронного поведения хаотических систем являются частными случаями синхронизации временных масштабов (см. подробнее [18]).

Введение в рассмотрение непрерывного множества временных масштабов s с ассоциированными с ними фазами хаотического сигнала и выделение диапазона синхронных масштабов $\Delta s = s_2 - s_1$ позволяет ввести количественную характеристику меры хаотической синхронизации неавтономной системы, которая определяется как относительная доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы [17, 18]:

$$\gamma = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s)\rangle ds \Big/ \int_0^{\infty} \langle E(s)\rangle ds, \qquad (10)$$

где $\langle E(s)\rangle$ – интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (7). Значение величины $\gamma = 0$ свидетельствует об отсутствии режима хаотической синхронизации связанных подсистем. Величина $\gamma \neq 0$ означает, что в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов, означающий наличие синхронизированных масштабов, для которых выполняются условия (8) и (9). Значение $\gamma = 1$ показывает, что колебания в каждой из подсистем идентичны или сдвинуты относительно друг друга на некоторый интервал времени $\Delta\tau$. В случае синхронизации хаотических осцилляторов такой режим называется режимом полной или лаг-синхронизации [1]. Рост γ от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы s.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИММЕТРИЧНОГО ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ ПОД ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. Амплитудная динамика вейвлетных спектров неавтономного генератора и суммарного сигнала

Рассмотрим результаты анализа вейвлетных спектров мощности $|W(s, t)|$ сигнала $x(t)$, порождаемого генератором (1), синхронизуемого внешней силой с меняющейся частотой, и суммарного сигнала $x_\Sigma(t)$ (3) с синусоидальным сигналом с меняющейся по тому же закону (2) частотой.

На рис. 3 показаны вейвлетные спектры в координатах "временной сдвиг t_0 – масштаб вейвлетного преобразования s" двух различных типов сигналов, построенные в течении времени $T = 1800$; Там же приведена динамика масштаба $s_L = 2\pi/\omega_L$, (штриховая линия) соответствующего линейно меняющейся частоте (2).

Анализ вейвлетного спектра на рис. 3а, соответствующего генератору, синхронизируемому внешним сигналом с переменной частотой, показывает, что в этом случае наблюдается классическая картина захвата частоты генератора внешним сигналом, что выражается в появлении изломов в моменты времени t_s и t_{2s} (отмечены на рисунке стрелками), когда частота внешнего сигнала близка к частоте $\omega_L(t_s) \approx 2\pi f_0$ автономного генератора или ее второй гармонике $\omega_L(t_{2s}) \approx 4\pi f_0$ (отмечены на вейвлетном спектре). Данный излом отражает эффект затягивания частоты генератора внешнем сигналом и затем при большой расстройке $(\omega_L - 2\pi f_0)$ возвращение частоты колебаний генератора (а также ее гармоник) к собственной автономной частоте. При этом в области захвата частоты наблюдается рост амплитуды соответствующих коэффициентов вейвлетного спектра $|W(s, t_0)|$, который определяется известным эффектом увеличения амплитуды колебаний в клюве синхронизации.

Важно отметить, что наряду с изломом в спектре на основном масштабе s_0 наблюдается и излом на масштабе $s_0/2$. Также обратим внимание на тот факт, что на вейвлетной поверхности не наблюдается максимумов, соответствующих внешнему синхронизирующему сигналу, что связано с низкой интенсивностью гармоники.

Иная ситуация наблюдается при рассмотрении суммарного сигнала x_Σ, содержащего сигнал с изменяющейся частотой. Вейвлетный спектр мощности для этого случая показан на рис. 3б. Картина вейвлетного спектра принципиально отлична от спектра в случае синхронизации (см. рис. 3а).

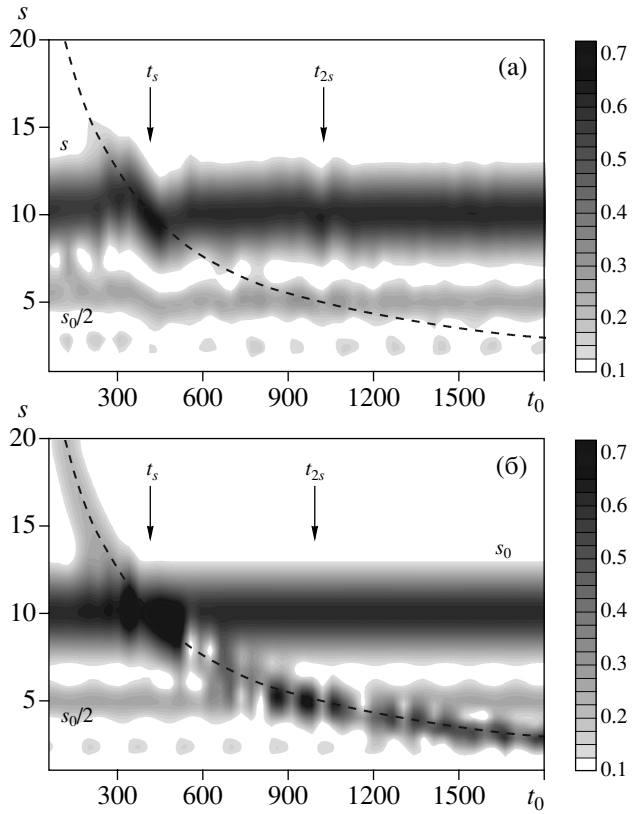

Рис. 3. Вейвлетные спектры мощности $|W(s, t_0)|$ (а) сигнала, порождаемого генератором (1), синхронизуемого внешней силой с меняющейся частотой (а), и суммарного сигнала $x_\Sigma(t)$ (3), содержащего сигнал с меняющейся частотой (б).

Во-первых, в спектре четко прослеживается как динамика генератора Ван дер Поля, так и динамика просачивающегося сигнала с переменной частотой (ср. с рис. 2), что не наблюдалось в случае синхронизации.

Во-вторых, здесь мы не наблюдаем характерной картины затягивания частоты генерации, которой на рис. 3а отвечали изломы на вейвлетной поверхности в моменты времени t_s и t_{2s}. Имеет место только некоторое искажение вейвлетной поверхности и возрастание амплитуды вейвлетных коэффициентов $|W|$ в моменты времени t_s и t_{2s}, которые определяются аддитивным сложением двух сигналов со сравнимым амплитудами и близкими частотами.

В-третьих, искажение поверхности в области основного масштаба s_0 не приводит к какому-либо изменению динамики на масштабе $s_0/2$, который соответствует второй гармонике сигнала $x(t)$ асимметричного генератора Ван дер Поля. Аналогично совпадение частот ω_L и $4\pi f_0$ также не приводит к появлению каких-либо изменений динамики основного масштаба в вейвлетном спектре.

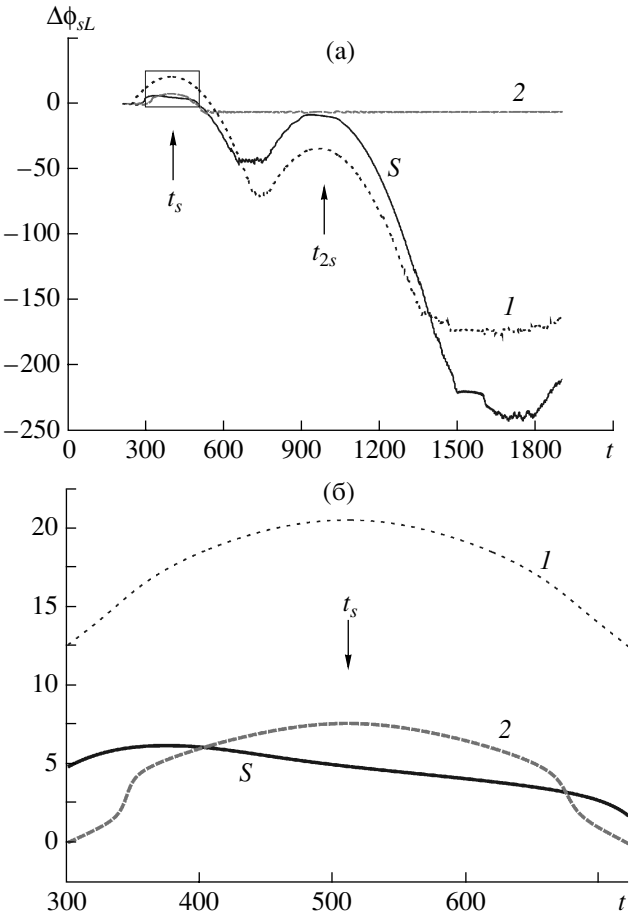

Рис. 4. Динамика разности фаз $\Delta\phi_{sL}(t)$ на временных масштабах $s_L = 2\pi/\omega_L$, соответствующих линейно растущей частоте ω_L сигналов $x(t)$ асимметричного генератора Ван дер Поля и внешнего сигнала $R\sin(\omega_L t)$. Случай суммарного сигнала (3) с $R = 0.2$ (*1*) и 1.0 (*2*); кривая *S* – случай синхронизации генератора Ван дер Поля (в формуле (1) $K = 0.2$). Рамкой выделен фрагмент, представленный на рис. 4б.

Таким образом, можно сделать важный вывод, что отличие между случаем, когда сигнал генератора, богатый гармониками основной частоты, синхронизуется внешним сигналом, и случаем простого просачивания сигнала, можно отслеживать по вейвлетному спектру мощности, сравнивая динамику масштабов, соответствующих основной частоте и ее гармоникам. В случае эффекта “просачивания” какие-либо изменения динамики масштаба, частота которого близка к частоте внешнего сигнала, не приводит к изменению динамики других характерных масштабов (ср. динамику масштабов s_0 и $s_0/2$ на рис. 3б). В случае синхронизации характерный излом в спектре мощности вейвлетного преобразования наблюдается на всех характерных масштабах (см. рис. 3а).

Б. Фазовая динамика сигнала неавтономного генератора и суммарного сигнала

Рассмотрим динамику фаз, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования (см. разд. 2), сигнала $x(t)$, порождаемого генератором (3), синхронизуемого внешней силой с меняющейся частотой, и суммарного сигнала $x_\Sigma(t)$ (3).

Вначале исследуем динамику разности фаз $\Delta\phi s_L(t)$ между рассматриваемым сигналом $x(t)$ (синхронизируемый асимметричный генератор Ван дер Поля (1)), или $x_\Sigma(t)$ (суммарный сигнал (3)), и внешним сигналом $R\sin(\omega_L t)$ с линейно меняющейся частотой. Разность фаз будет строиться вдоль временного масштаба $s_L(t)$, соответствующего частоте $\omega_L(t)$ (2) внешнего сигнала (т.е. вдоль штриховых линий на рис. 3). Построенные зависимости разности фаз $\Delta\phi_{sL}$ для различных случаев представлены на рис. 4.

Изучим случай просачивания внешнего сигнала с меняющейся частотой $\omega_L(t)$ в анализируемый сигнал, т.е. будем рассматривать суммарный сигнал $x_\Sigma(t)$ (3). Рассмотрим динамику фазы в окрестности момента времени $t = t_s$, когда имеет место близость частоты внешнего сигнала и основной частоты генератора Ван дер Поля: $\omega_L(t_s) \approx 2\pi f_0$. Поведение фазы основного масштаба $s_0 = 1/f_0$ колебаний генератора Ван дер Поля можно записать как $\phi_{s0}(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_1$. Фаза внешнего сигнала $\phi_{sL}(t) = \omega_L(t)t + \varphi_2$, где $\varphi_{1,2}$ – начальные фазы. Тогда, предполагая, что амплитуда внешнего просачивающегося сигнала существенно меньше амплитуды колебаний генератора Ван дер Поля, и учитывая, что частота $\omega_L(t) = 2\pi(a + bt)$ растет линейно во времени, зависимость разности фаз между двумя сигналами, составляющими суммарный сигнал $x_\Sigma(t)$ (3), запишем в виде

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{sL}(t) &= \phi_{s0}(t) - \phi_{sL}(t) = \\ &= 2\pi[(f_0 - a)t - bt^2] + \varphi_1 - \varphi_2.\end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда видно, что в случае просачивания внешнего сигнала с линейно изменяющейся частотой разность фаз меняется по параболическому закону, причем экстремум параболы приходится на момент времени $t = t_s$, когда частота внешнего сигнала равна автономной частоте генератора. При этом форма кривой $\Delta\phi_{sL}(t)$ оказывается симметричной относительно момента времени $t = t_s$. Аналогичная картина будет иметь место, если вместо основного масштаба $s_0 = 1/f_0$ рассмотреть динамику разности фаз в окрестности масштаба $s_0/2 = 1/(2f_0)$, соответствующего второй гармонике сигнала.

Описанная динамика разности фаз $\Delta\phi_{sL}(t)$ представлена на рис. 4: суммарный сигнал $x_\Sigma(t)$ (3) при $R = 0.2$ (кривая *1*) и $R = 1.0$ (кривая *2*) соответ-

ственно. Из анализа кривых *1* и *2* можно сделать следующие основные выводы.

Во-первых, зависимости разности фаз вблизи моментов времени t_s и t_{2s} (при $R = 0.2$) близки к параболическим (см. рис. 4а, стрелки).

Во-вторых, зависимости разности вблизи момента времени t_s, когда частоты автономного генератора и внешнего сигнала совпадают, оказываются симметричными относительно $t = t_s$. Это хорошо видно на увеличенном фрагменте (рис. 4б). Кривая *1* построена при малой амплитуде внешнего сигнала $R = 0.2$ (слабом просачивании внешнего сигнала) и имеет параболический вид. Кривая *2*, соответствующая случаю сильного просачивания ($R = 1.0$), также демонстрирует наличие экстремума в момент времени $t = t_s$, однако он менее выражен и имеет искаженную по сравнению с квадратичной зависимостью форму. Это определяется большим влиянием внешнего сигнала, который имеет значительную амплитуду, сравнимую с амплитудой сигнала генератора Ван дер Поля.

В-третьих, при большом просачивании сигнала (кривая *2*) на временах, существенно отличающихся от времени $t = t_s$, разность фаз постоянна и близка к нулю (см. рис. 4а). Последнее определяется тем, что при большой амплитуде просачивающегося сигнала фактически фиксируется разность фаз внешнего и суммарного сигналов.

Рассмотрим теперь случай синхронизации асимметричного генератора Ван дер Поля внешним сигналом с линейно растущей частотой (1). Соответствующая зависимость разности фаз $\Delta\phi_{sL}(t)$ представлена на рис. 4, кривая *S*.

Анализируя динамику разности фаз $\Delta\phi$ неавтономного генератора Ван дер Поля и внешнего сигнала методом медленно меняющихся амплитуд и предполагая, что внешний сигнал не приводит к существенному изменению амплитуды неавтономных колебаний, а влияет преимущественно на фазовые соотношения, можно показать, что величина $\Delta\phi$ подчиняется уравнению фазовой синхронизации (уравнению Адлера [22])

$$d(\Delta\phi)/dt + \kappa\sin\Delta\phi - (2\pi f_0 - \omega_L(t)) = 0, \qquad (12)$$

где κ – коэффициент, определяемый параметрами генератора. Из анализа уравнения фазовой синхронизации следует, что в области синхронизации, определяемой условием $(2\pi f_0 - \omega_L(t)) \le \kappa$, при изменении частоты внешнего сигнала разность фаз $\Delta\phi$ принимает значения $\pm\pi/2$ на границе "клюва" синхронизации и значение π в центре области синхронизации. Последнее означает, что в случае синхронизации генератора внешним сигналом с линейно меняющейся частотой мы должны фиксировать вблизи моментов времени $t = t_s$ и $t = t_{2s}$ (где имеет место равенство частот первой и второй гармоник автономных колебаний и внешнего сигнала) интервалы времени, в которых фаза меняется в диапазоне π.

Подобная динамика разности фаз хорошо видна на увеличенном фрагменте (рис. 4б, кривая *S*). Разность фаз $\Delta\phi_{sL}$ между сигналом асимметричного генератора Ван дер Поля и внешним сигналом с переменной частотой монотонно меняется на величину π, что свидетельствует о наличии синхронизации в данном случае.

Отметим, что аналогичная картина динамики фазы наблюдается в момент времени $t = t_{2s}$, когда имеет место близость частоты внешнего сигнала и частоты второй гармоники генератора Ван дер Поля: $\omega_L(t_{2s}) \approx 4\pi f_0$.

Таким образом, наличие на зависимостях разности фаз $\Delta\phi(t)$ в моменты времени t_s, когда частота внешнего сигнала близка к частоте автономных колебаний (или ее гармоник), участков монотонного изменения $\Delta\phi$ на величину π означает наличие синхронизации колебаний генератора. Эффект же просачивания сигнала (как отмечалось выше) характеризуется наличием в момент времени $t = t_s$ экстремума функции $\Delta\phi(t)$ с симметричной динамикой относительно момента времени t_s.

Следует отметить принципиальную важность для детектирования наличия синхронизации колебаний или просачивания применения сигнала с переменной частотой. Действительно, если внешний сигнал характеризуется постоянной частотой, то из соотношения (11) следует, что разность фаз $\Delta\phi_{sL}(t)$ остается постоянной во времени. Аналогичная ситуация наблюдалась бы и в случае "истинной" синхронизации. Поэтому было бы зафиксировано наличие фазовой синхронизации в обоих случаях, хотя в первом случае происходило бы сравнение фаз одного и того же сигнала.

Важным элементом методики анализа синхронизации с помощью вейвлетного преобразования является анализ динамики разности фаз между колебаниями на различных временных масштабах *s*. Рассмотрим поведение разности фаз $\Delta\phi_s(t)$, определяемой на временных масштабах $s(t) = s_L(t) + \Delta s$, где Δs – отстройка временного масштаба *s* относительно базового масштаба $s_L(t)$, соответствующего линейно меняющейся частоте $\omega_L(t)$.

Полученные результаты анализа разности фаз на различных временных масштабах представлены на рис. 5а вблизи временного интервала $t \approx t_s$, когда выполняется равенство $\omega_0 \approx \omega_L$. Видно, что при небольших отстройках $\Delta s \in (-1, 2)$ динамика разности фаз в целом аналогична случаю точной настройки на базовый временной масштаб $s_L(t)$. При больших величинах Δs временной интервал,

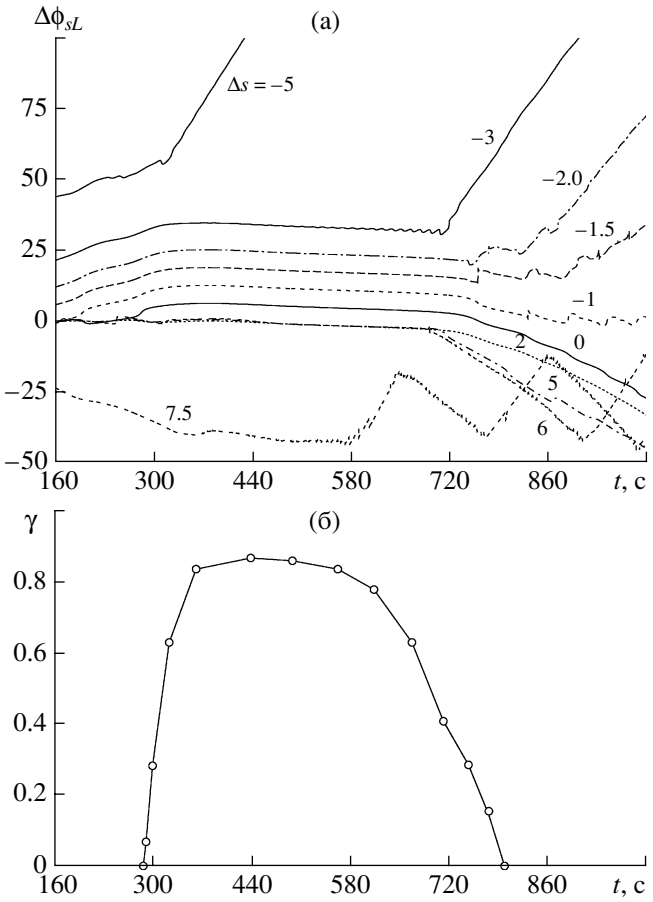

Рис. 5. а – Динамика разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ на временных масштабах $s_L(t) + \Delta s$, соответствующих отстройке от линейно растущей частоты ω_L сигналов $x(t)$ асимметричного генератора Ван дер Поля и внешнего сигнала $R\sin(\omega_L t)$, цифры на кривых – значения отстройки Δs. б – Мера синхронизации γ (10), определяющая долю энергии в вейвлетном спектре мощности, приходящейся на синхронизованные масштабы.

когда наблюдается синхронная динамика на рассматриваемых масштабах, уменьшается, и начиная с некоторых отстроек Δs временных интервалов синхронной динамики вообще не наблюдается.

Интегральной характеристикой синхронного поведения различных временных масштабов служит мера синхронизации γ (10), описанная в разд. 2. На рис. 5б показана зависимость меры синхронизации γ от времени. Видно, что в с увеличением времени при $t \gtrsim 300$ система быстро переходит в режим синхронизации временных масштабов, причем доля энергии в вейвлетном спектре, приходящаяся на синхронизованные временные масштабы, составляет более 80%. Далее с течением времени величина $\gamma(t)$ уменьшается, и при $t > 800$ величина γ становится равной нулю, что соответствует отсутствию синхронизации колебаний.

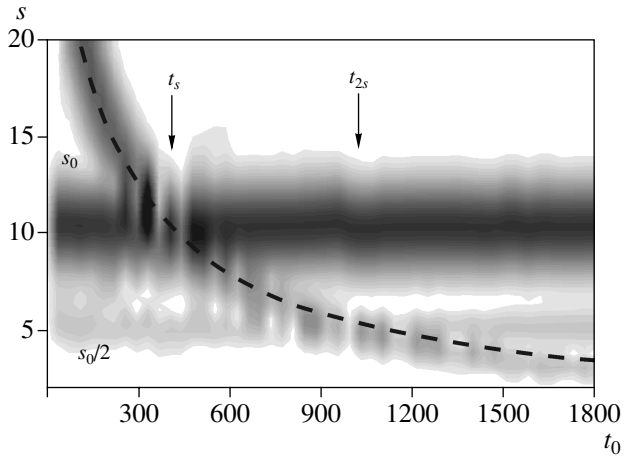

Рис. 6. Вейвлетный спектр мощности $|W(s, t_0)|$ сигнала, представляющего собой суперпозицию сигнала генератора (1), синхронизируемого внешней силой с меняющейся частотой и амплитудой $K = 0.125$, и внешнего сигнала (3) с амплитудой $R = 1$.

В. Динамика неавтономной системы при одновременном наличии просачивания и синхронизации

Рассмотрим ситуацию, когда в отклике неавтономной автоколебательной системы наблюдается одновременное наличие просачивающегося сигнала и синхронизации автогенератора. На рис. 6а показан вид амплитудного спектра $|W(s, t_0)|$ вейвлетного преобразования сигнала, представляющего собой суперпозицию сигнала генератора (1), синхронизируемого внешней силой с меняющейся частотой и амплитудой $K = 0.125$, и внешнего сигнала (3) с амплитудой $R = 1$ (ср. рис. 6а и рис. 3). Из амплитудного спектра нельзя определенно сделать вывод: имеет ли место просачивание внешнего сигнала в анализируемый ряд или синхронизация колебаний автогенератора, поскольку в спектре присутствуют признаки и того и другого явления. Поэтому для изучения данного вопроса необходимо рассмотрение разности фаз между внешним сигналом с линейно меняющейся частотой и сигналом отклика генератора на внешнее воздействие.

На рис. 7б представлена динамика разности фаз для амплитуды просачивающегося сигнала, равной $R = 1$, и различных амплитудах синхронизирующего сигнала K. При малых K ситуация качественно соответствует случаю просачивания без синхронизации, рассмотренного в предыдущих разделах. При увеличении амплитуды K синхронизирующего сигнала в системе наблюдается установление режима синхронизации в некоторой области частот. Соответственно, изменение разности фаз внутри клюва синхронизации принимает вид наклонной полки, границы которой соответствуют потере синхронизации. За преде-

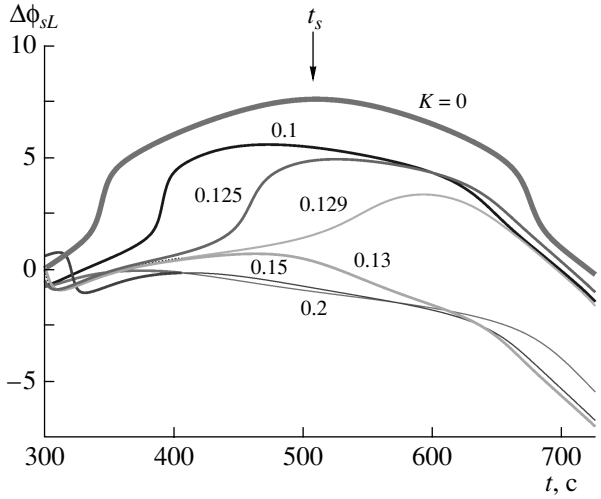

Рис. 7. Динамика разности фаз $\Delta\phi_{sL}(t)$ на временном масштабе $s_L(t)$ (соответствующем линейно растущей частоте ω_L) сигнала, представляющего собой суперпозицию сигнала генератора (1), синхронизируемого внешней силой с меняющейся частотой и различными амплитудами K (цифры на кривых), и внешнего сигнала (3) с амплитудой $R = 1$.

лами области синхронизации наблюдается примерно постоянная разность фаз при больших расстройках (больших временах t) (на рис. 7 не показано, см. рис. 4а, кривая *2*).

Таким образом, при большом просачивании и существенной величине амплитуды внешнего синхронизирующего сигнала наблюдается уменьшение величины изменения разности фаз между внешним сигналом и сигналом генератора Ван дер Поля в клюве синхронизации.

4. Результаты исследования синхронизации дыхания и ритма медленной регуляции кровяного давления

Проанализируем физиологические временные ряды, порождаемые сердечно-сосудистой и дыхательной системами человека. Мы исследовали семь здоровых мужчин в возрасте от 20 до 34 лет, добровольно участвовавших в эксперименте. Все они имели средний уровень физической активности. Электрокардиограммы (ЭКГ) и дыхание записывались одновременно в положении сидя. Все сигналы снимались с частотой 250 Гц при 16-разрядном разрешении, а затем обрабатывались на компьютере.

Проводился эксперимент, в котором каждый испытуемый дышал по заданному ритму с переменной частотой f_b от 0.05 до 0.3 Гц. Темп дыхания задавался импульсным звуковым сигналом с длительностью 0.5 с. В момент появления звукового сигнала испытуемый делал вдох. Никаких других требований на характер дыхания мы не на-

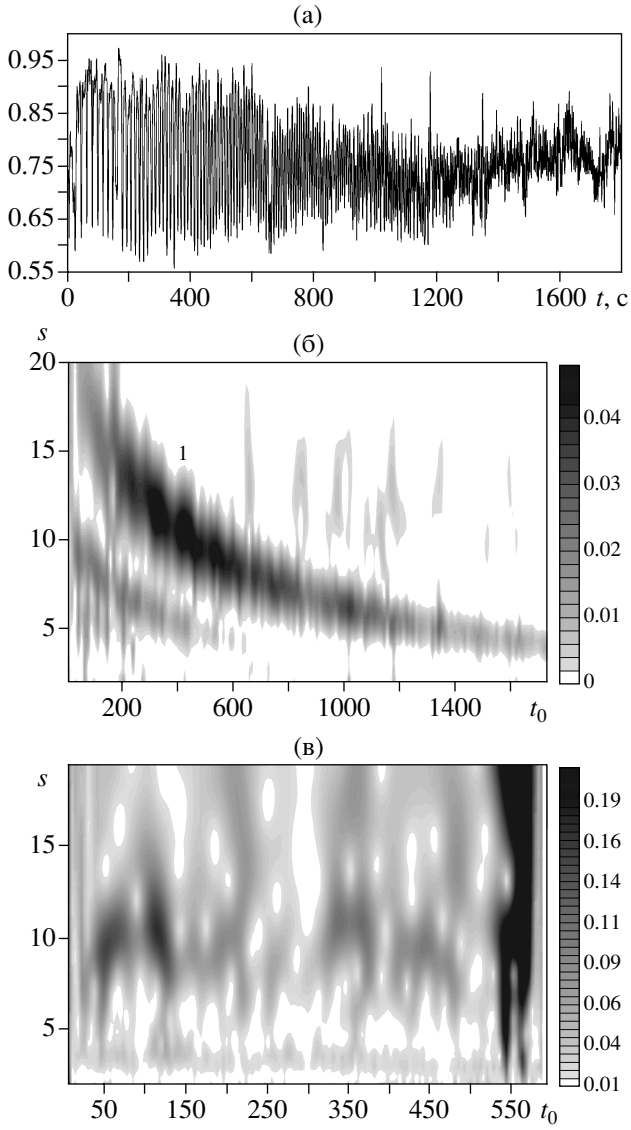

Рис. 8. Временной ряд R–R-интервалов: а – при дыхании с линейно растущей частотой, б – вейвлетные спектры мощности с переменной частотой дыхания, в – при свободном дыхании того же испытуемого.

кладывали. Испытуемый сам выбирал такую продолжительность вдоха и выдоха и глубину дыхания, какие ему были удобны. Длительность записей с линейно нарастающей частотой дыхания составляла 30 мин. Перед началом записи каждого эксперимента с заданным ритмом испытуемому давалось 3–5 мин на привыкание к требуемому ритму дыхания.

Выделяя из ЭКГ последовательность R–R-интервалов, т.е. ряд временных интервалов T_i между двумя последовательными R-пиками, мы получаем информацию о вариабельности сердечного ритма. На рис. 8а показан анализируемый временной ряд R–R-интервалов, полученный для дыхания с линейно растущей частотой. Отметим,

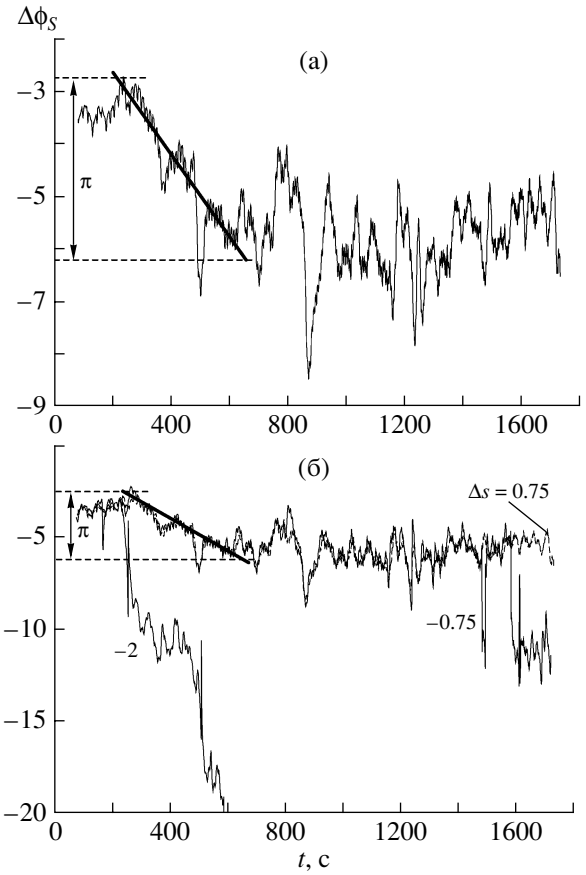

Рис. 9. Динамика разности фаз $\Delta\phi_s(t)$ на линейно изменяющемся временном масштабе $s_b(t) = 1/f_b(t)$ (а) и на временных масштабах $s_b(t) + \Delta s$ (б) рядов *R–R*-интервалов и внешнего дыхания с линейно растущей частотой. Цифры на кривых – значения отстройки Δs.

что временной интервал T_i между отдельными отсчетами в ряде *R–R*-интервалов не постоянен, поэтому была разработана методика осуществления непрерывного вейвлетного преобразования временного ряда с неэквидистантными временными отсчетами. На рис. 8б, в показаны вейвлетные спектры $|W(s, t_0)|$, построенные по ряду *R–R*-интервалов для дыхания с линейно растущей частотой и при свободном дыхании того же испытуемого.

Вейвлетный спектр $|W(s, t_0)|$ временного ряда *R–R*-интервалов при дыхании с линейно меняющейся частотой (см. рис. 8б) демонстрирует высокоамплитудный сигнал, соответствующий переменной частоте дыхания (обозначен на рис. 8б цифрой *1*). Кроме того, на вдвое большей частоте наблюдается вторая гармоника сигнала дыхания. Мощность ритма с частотой 0.1 Гц (мэйеровской волны) достаточно мала и на рисунке не выражена. Тем не менее сравнение вейвлетного спектра *R–R*-интервалов при линейно изменяющейся частоте дыхания и вейвлетных спектров генератора Ван дер Поля дает возможность провести аналогию между реальной и модельной системами. Вид вейвлетного спектра реальной системы можно интерпретировать так, что в реальной системе наблюдается значительное просачивание сигнала дыхания в сигнал отклика без взаимодействия. Амплитуда ритма дыхания значительно выше, чем амплитуда мэйеровской волны. Из других исследований (см., например, [10]) известно, что при частотах дыхания, близких к частоте мэйеровской волны, между этими двумя ритмами наблюдается синхронизация (200…600) с. Однако по данному вейвлетному спектру нельзя судить однозначно о наличии синхронизации, хотя косвенным признаком синхронизации может служить увеличение амплитуды вариабельности сердечного ритма вблизи частоты мэйеровской волны.

На рис. 9а представлены зависимости разности фаз между сигналом дыхания и временным масштабом, соответствующим этому сигналу дыхания, в ряде *R–R*-интервалов. Видно, что для временного масштаба $s = s_b(t) = 1/f_b(t)$ (f_b – линейно изменяющаяся частота дыхания) в диапазоне 200…600 с фаза в среднем изменяется почти по линейному закону (отмечен на рис. 9 жирной прямой линией), что свидетельствует о режиме синхронизации в этом диапазоне частот. За пределами синхронизации разность фаз колеблется вблизи постоянного значения. Из этого факта можно сделать вывод, что в диапазоне 200…600 с динамика дыхания, проявляющегося в сигнале *R–R*-интервалов, влияет на внутренний ритм мэйеровской волны, в то время как за пределами этого диапазона в сигнале *R–R*-интервалов наблюдается просто ритм дыхания, во всяком случае его взаимодействие с другими ритмами не прослеживается.

Аналогичное поведение разности фаз наблюдается и для соседних временных масштабов. На рис. 9б показаны динамика разности фаз на ряде временных масштабов $s = s_b(t) + \Delta s$. Видно, что при малой отстройке $\Delta s = \pm 0.75$ динамика разности фаз качественно подобна динамике фаз на масштабе $s = s_b$. Следовательно, мы можем немного ошибиться при определении масштабов наблюдения, и это не приведет к качественной перестройке общей картины. При значительном удалении временного масштаба наблюдения от временного масштаба дыхания s_b амплитуда соответствующего ритма падает и фаза уже не может быть уверенно определена (например, зависимость, соответствующая $\Delta s = -2$, на рис. 8б), вследствие чего разность фаз перестает быть постоянной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проводя исследования при изменении частоты внешнего сигнала, подаваемого

на автоколебательную систему, можно отличить ситуации, при которых воздействие на систему приводит к синхронизации, от ситуаций, при которых такое воздействие не приводит к синхронизации (и, может быть, вообще обходит динамику системы, не влияя на нее). Кроме того, даже в том случае, когда существует просачивание, синхронизация также может быть замечена. В отличие от предлагаемого метода, основанного на воздействии на систему сигнала с меняющейся частотой, методика измерения разности фаз на постоянной частоте не дает ответа на вопрос о том, является отклик в системе результатом активного взаимодействия ритмов или это – просачивание сигнала воздействия в измеренный сигнал без влияния на внутреннюю динамику системы. Использование вейвлетного преобразования для выделения фазы сигнала имеет широкие возможности и позволяет анализировать динамику фазы сигнала при изменении его частоты. Отметим высокую эффективность выделения фазы с помощью непрерывного вейвлетного преобразования из экспериментальных физиологических данных, которые характеризуются высоким уровнем зашумленности.

Предлагаемый метод также может быть использован в других экспериментах на физиологических системах для диагностики синхронизации в тех случаях, когда условия позволяют изменять частоту воздействия на систему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда гражданский исследований и развития (CRDF, грант REC-006), Российского фонда фундаментальных исследований проект № 05-02-16273), а также ФНП “Династия”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synhronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. *Glass L., Mackey M.C.* From clocks to chaos: the rhythms of life. Princeton: Princeton University Press, 1988.
3. *Glass L.* // Nature. 2001. V. 410. P. 277.
4. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization, applications to living systems. Ser. A. V. 42. Singapore: World Scientific, 2002.
5. *Malpas S.* // Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol. 2002. V. 282. P. H6.
6. *Stefanovska A., Hoçiç M.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. 2000. V. 139. P. 270.
7. *Schäfer C., Rosenblum M.G., Abel H.-H., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 857.
8. *Braçiç-Lotriç M., Stefanovska A.* // Physica A. 2001. V. 283. P. 451.
9. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 036212.
10. *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I. et al.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 041913.
11. *Rzeczinski S., Janson N.B., Balanov A.G., McClintock P.V.E.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 051909.
12. *Bassingthwaighte J.B., Liebovitch L.S., West B.J.* Fractal Physiology, N.Y.: Oxford University Press, 1994.
13. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1804.
14. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 2. С. 133.
15. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. P. 2291.
16. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // РЭ. 2004. Т. 49. С. 123.
17. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. С. 391.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14. P. 603.
19. Wavelets in Physics / Ed. J.C. Van den Berg. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
20. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
21. *Grossman A., Morlet J.* // J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 273.
22. *Adler R.* // Proc. IRE. 1949. V. 34. P. 351.