

ДИАГНОСТИКА СЛАБОЙ СВЯЗАННОСТИ МЕЖДУ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО КОРОТКИМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ: МЕТОД И ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2006 г. Д. А. Смирнов

Поступила в редакцию 19.12.2005 г.

Развит метод определения характера взаимодействия между автоколебательными системами по наблюдаемым сигналам (временным рядам), основанный на эмпирическом моделировании их фазовой динамики, для случая коротких временных рядов и значительного уровня шумов. Для этого введены поправки к известным оценкам, устраняющие их систематическую погрешность, и получены формулы для доверительных интервалов. Эффективность метода продемонстрирована в численных экспериментах. Представлены его приложения в нейрофизиологии и климатологии: по записям внутричерепных электроэнцефалограмм пациента с височной эпилепсией обнаружено усиление воздействия очага патологии на другие структуры мозга перед припадком; выявлено наличие воздействия процесса Эль-Ниньо – Южное колебание на Северо-Атлантическое колебание по записям климатических индексов (атмосферного давления и температуры поверхности океана).

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость анализа архитектуры связей (их наличия, интенсивности, “направленности” в ансамблях колебательных систем возникает в различных областях науки и практики: радиофизике [1], климатологии [2], кардиологии [3–5], нейрофизиологии и медицинской диагностике [6, 7]. Такую информацию часто приходится извлекать только из экспериментально наблюдаемых сигналов. Она имеет познавательную ценность; например, выявление причинно-следственных связей между глобальными климатическими процессами важно для понимания “механизмов”, управляющих этими процессами, и причин сильных вариаций климата на планете. Уже сейчас можно говорить и о ее прикладной значимости, например, для локализации очага эпилептической активности путем анализа взаимодействия между различными областями головного мозга по записям электро- и магнитоэнцефалограмм [6–8].

Существенная нестационарность процессов (типичная для объектов биологической природы) и невозможность накопления больших объемов данных (для медленных процессов в геофизике) требуют оценки характеристик взаимодействия на коротком интервале наблюдения. Задача осложняется при наличии шумов, особенно если связь слабая. В данной работе развивается метод оценки связанности между двумя автоколебательными системами по относительно коротким временным рядам (не более 30–50 характерных периодов колебаний).

Для выявления достаточно сильных связей вполне применимы “линейные методы”: взаимная корреляционная функция, функция когерентности, кроссвейвлетные спектры. Но для анализа нелинейных автоколебательных систем существуют более “чувствительные” к слабой связи нелинейные методы. Одним из них является метод, основанный на эмпирическом моделировании *фазовой динамики* исследуемых осцилляторов [9]. Он позволяет не только выявить наличие связанности, но и получить оценки силы воздействия систем друг на друга и индекс “направленности” связи (см. разд. 1).

Метод эффективен при анализе достаточно длинных временных рядов – не менее 1000 характерных периодов при умеренном уровне шума [10]. Однако оценки, полученные по рядам длиной несколько десятков периодов, могут не только демонстрировать сильные флуктуации (растет риск случайной ошибки при выводе о характере связанности), но и оказаться смещенными (вести к систематическим ошибкам), как показано в разд. 1. В данной работе проведен детальный анализ статистических свойств этих оценок, введены поправки, устраняющие их систематические ошибки, и получены формулы для доверительных интервалов, обеспечивающие малый процент случайных ошибочных выводов (разд. 2). Формулы для новых оценок выведены аналитически для случая линейных несвязанных процессов, и численно продемонстрирована их применимость для “умеренно-нелинейных” слабо связанных систем. В разд. 3 и 4 представлены примеры их приложений для решения задач нейрофизиологии и климатологии.

1. ОЦЕНКИ СВЯЗАННОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА МОДЕЛИРОВАНИИ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Основная идея метод – оценить, насколько сильно зависит будущая эволюция фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Для этого по исходным временным рядам $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_{N_x})\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_{N_x})\}$ от двух систем (где $t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки, N_x – длина ряда) рассчитываются временные ряды фаз колебаний $\{\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_{N_x})\}$ и $\{\varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_{N_x})\}$. На основе последних строится эмпирическая математическая модель [9], по коэффициентам которой рассчитываются оценки характеристик связанности.

А. Расчет фазы

Классический способ определения фазы сигнала $X(t)$ состоит в получении комплексного аналитического сигнала $Z(t) = X(t) + jY(t)$, где Y – сопряженный по Гильберту сигнал [11]. Фаза $\varphi(t)$ определяется как аргумент $Z(t)$, т.е. угол поворота радиуса-вектора на комплексной плоскости ($\text{Re}Z$, $\text{Im}Z$). Далее будем говорить только о “развернутой” фазе $\varphi(t)$, которая увеличивается на 2π за каждый полный оборот радиуса-вектора. Определение фазы через преобразование Гильберта имеет ясный физический смысл только для сигналов с ярко выраженным основным ритмом. Если же $X(t)$ – широкополосный сигнал, то используется полосовая фильтрация, чтобы выделить определенный ритм, и описанный подход применяется к фильтрованному сигналу. Однако выбор полосы фильтрации нужно обосновывать с физической точки зрения. В любом случае значения фазы вблизи начала и конца временного ряда оказываются искажены (краевой эффект) и следует их отбрасывать примерно для 10 характерных периодов с каждого “конца” [12].

При анализе сравнительно коротких рядов имеет преимущества вариант построения аналитического сигнала [13], который эквивалентен полосовой фильтрации с последующим преобразованием Гильберта, но менее подверженный краевым эффектам. Это – комплексное вейвлет-преобразование

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t') \psi^*((t-t')/s) dt', \quad (1)$$

где в качестве комплексной вейвлет-функции используется вейвлет Морле $\psi(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(-j\omega_0\eta) \times \exp(-\eta^2/2s^2)$; звездочка означает комплексное сопряжение; s – фиксированный временной масштаб. Фаза вновь определяется как аргумент Z .

Фактически здесь имеет место полосовая фильтрация сигнала X с центральной частотой $f \approx \frac{\omega_0}{2\pi s}$, где ширина полосы определяется параметром ω_0 . Так, при $\omega_0 = 6$ она равна примерно 1/4 от центральной частоты $f \approx 1/s$, а краевые эффекты проявляются на интервалах длиной $\sqrt{2}s$ [13, 14].

Б. Характеристики связанности

Форму математической модели для описания фазовой динамики выбирают из следующих соображений. Для многих ситуаций фазовая динамика осцилляторов, имеющих ярко выраженный основной ритм, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [15]

$$d\varphi_{1,2}/dt = \omega_{1,2} + G_{1,2}(\varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}) + \xi_{1,2}(t), \quad (2)$$

где ω_k – параметры, определяющие угловые частоты колебаний; $\xi_k(t)$ – независимые гауссовские белые шумы с нулевым средним и автоковариационными функциями $\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle = 2D_k \delta(t-t')$. При работе с дискретными временными рядами удобно рассматривать разностную форму уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(t+\tau) - \varphi_{1,2}(t) = \\ = F(\varphi_{1,2}(t), \varphi_{2,1}(t), \vec{a}_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где τ – конечный временной интервал; $\varepsilon_k(t)$ – шумы с нулевым средним; F – тригонометрический многочлен:

$$\begin{aligned} F(\varphi_1, \varphi_2, \vec{a}_k) = \frac{\alpha_0^{(k)}}{\sqrt{2}} + \sum_{m,n} (\alpha_{m,n}^{(k)} \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + \\ + \beta_{m,n}^{(k)} \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2)), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

$\vec{a}_k \equiv \{a_{k,j}\} \equiv (\alpha_0^{(k)}, \{\alpha_{m,n}^{(k)}\}, \{\beta_{m,n}^{(k)}\})$ – векторы коэффициентов. Если бы “истинные” уравнения фазовой динамики в форме (2) или (3) были известны априори, “силу” воздействия второй системы на первую c_1 можно было бы определить крутизной зависимости $F(\varphi_1, \varphi_2, \vec{a}_1)$ от φ_2 и аналогично – первой на вторую c_2 :

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F(\varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \vec{a}_{1,2}) / \partial \varphi_{2,1})^2 d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Можно показать, что характеристики $c_{1,2}^2$ выражаются через коэффициенты многочленов (4):

$$c_k^2 = \sum_j n_j^2 a_{k,j}^2, \quad (5)$$

где n_j – значение n в тригонометрическом одночлене, соответствующем коэффициенту $a_{k,j}$. Норми-

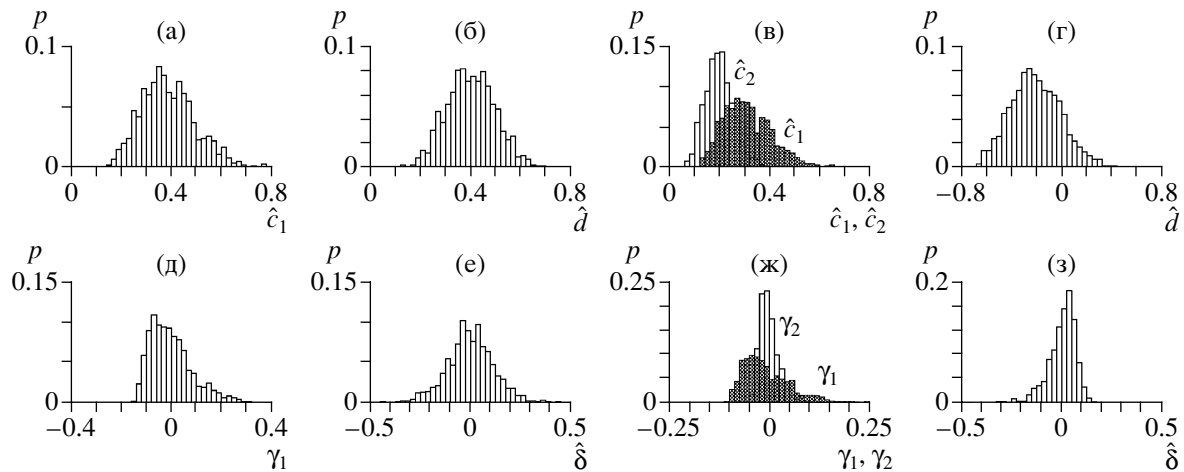


Рис. 1. Гистограммы оценок связанности, полученные по ансамблю временных реализаций системы (7) для $D_1 = D_2 = 0.2$ (а, б, д, е) и для $D_1 = 0.2, D_2 = 0.05$ (в, г, ж, з).

рованный индекс направленности связи определяется выражением $d = (c_2 - c_1)/(c_2 + c_1)$ и принимает значения на отрезке $[-1 \dots 1]$. Величины $d = 1$ и $d = -1$ означают однонаправленную связь (только влияние $1 \rightarrow 2$ или $2 \rightarrow 1$ соответственно), $d = 0$ – симметричную связь. В других случаях знак d показывает “преимущественное направление” связи.

В. Оценки характеристик связанности

На практике имеется временной ряд, а уравнения фазовой динамики неизвестны. В результате задача состоит в получении оценок для характеристик связанности c_1, c_2 и d по временному ряду. Для этого по рассчитанным временным реализациям фаз сигналов строят эмпирическую модель (3), (4). Интервал τ принимают равным характерному периоду колебаний. Оценки коэффициентов \hat{a}_k получают методом наименьших квадратов (МНК), т.е. из условий

$$\sum_{i=1}^{N-\tau/\Delta t} (\Delta\varphi_{1,2}(t_i) - F(\varphi_{1,2}(t_i), \varphi_{2,1}(t_i), \hat{a}_{1,2}))^2 \rightarrow \min. \tag{6}$$

Оценки интенсивности воздействия осцилляторов друг на друга получают путем подстановки \hat{a}_k в выражения (5) вместо истинных значений \check{a}_k .

Описанная методика не применима для режима фазовой синхронизации, потому что тогда фазы двух осцилляторов не могут выступать в ряду “независимых” переменных при построении модели. Для этого режима значение коэффициента фазовой когерентности $\rho \equiv \langle \exp(j(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))) \rangle$

(угловые скобки означают усреднение по времени) [7] равно единице. Затрудняется реализация методики уже при значениях ρ , больших 0.6 [1].

Г. Свойства оценок связанности

Оценки \hat{a}_k при некоторых общих условиях состоятельны [16], т. е. При очень большом объеме данных ($N \rightarrow \infty$) вероятность их сколь угодно мало отличия от истинных значений стремится к нулю. Тогда оценки $\hat{c}_{1,2}$ и \hat{d} также практически равны истинным значениям $c_{1,2}$ и d , что позволяет сделать правильный вывод о связанности осцилляторов [9]. Но если ряд короткий (а заранее не известно, можно ли считать его достаточно длинным), то возникают следующие вопросы: являются ли $\hat{c}_{1,2}$ и \hat{d} несмещенными, как оценить статистическую значимость отличия их значений от нуля?

Для иллюстрации важности сказанного рассмотрим простой показательный пример, когда осцилляторы не связаны и линейны, т.е. рассмотрим систему (2) с $G_{1,2} = 0$. Интегрируя аналитически уравнения (2) на интервале τ получим

$$\varphi_k(t + \tau) - \varphi_k(t) = \omega_k \tau + \varepsilon_k(t), \tag{7}$$

где $\varepsilon_k(t)$ – независимые гауссовские случайные процессы с дисперсиями $D_k \tau$. Здесь $c_1 = c_2 = d = 0$, а оценки $\hat{c}_{1,2}$ и \hat{d} вводят в заблуждение (рис. 1а–1е).

Представленные на рис. 1 распределения получены в результате численных экспериментов, которые здесь и ниже проводили следующим образом. Генерировали ансамбль из 1000 временных рядов длиной $N = 1000$ с интервалом выборки $\Delta t = 0.2\pi$. При использованных значениях $\omega_1 = \omega_2 = 1$ – это 10 точек на характерном периоде. Для получения

каждого ряда уравнения (2) численно интегрировали методом Эйлера с шагом $h = 0.01\pi$. Каждое из начальных условий $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ выбирали случайно из отрезка $[0..2\pi]$ (использовали равномерное распределение). По каждому ряду строили модель (3), (4) с $\tau = 2\pi$ и многочленами третьего порядка, содержащими слагаемые с $m = 0, \dots, 3$, $n = 0; n = 0; n = 0, \dots, 3, m = 0; m, n = \pm 1$. Такая структура достаточно компактна и в то же время позволяет описать нетривиальные нелинейности, поскольку содержит несколько гармоник [9]. Рассчитывали значения оценок и по набору из 1000 значений получали гистограммы, находили средние значения и дисперсии, число верных и ошибочных выводов о наличии связи.

Так, в случае идентичных подсистем ($D_1 = D_2$) величина \hat{c}_1 всегда положительная и принимает довольно большие значения (рис. 1а). Она является смещенной оценкой для $c_1 = 0$. Оценка \hat{d} не смещена, но имеет большой разброс значений: часто встречаются значения вплоть до ± 0.4 (рис. 1б). Таким образом, по отдельной реализации вполне вероятно получить ложное указание на наличие взаимодействия между системами. Ситуация еще более усложняется при неидентичности осцилляторов, что иллюстрирует рис. 1в, 1г для $D_1 > D_2$. Оценки $\hat{c}_{1,2}$ смещены, причем смещение \hat{c}_1 больше (рис. 1в). Указанное обстоятельство приводит к тому, что величина \hat{d} систематически меньше нуля (рис. 1г). Такие значения d указывают на наличие преимущественного влияния $2 \rightarrow 1$, хотя в действительности связи между системами нет. Различные смещения \hat{c}_1 и \hat{c}_2 получаются и в случае осцилляторов с разными частотами колебаний (при $\tau > \Delta t$). Рассмотрим подробнее причины указанных ошибок.

Поскольку $\hat{c}_{1,2}$ и \hat{d} являются функциями оценок \hat{a}_k , то их вероятностные свойства можем определить, зная свойства \hat{a}_k . Последние зависят от свойств шумов ϵ_k . Пусть оценки \hat{a}_k несмещенные (см. Приложение). Тогда, как известно из теории вероятностей, для каждой оценки $\hat{a}_{k,j}$ имеет место соотношение $M[\hat{a}_{k,j}^2] = a_{k,j}^2 + \sigma_{k,j}^2$, где знак M – математическое ожидание, а $\sigma_{k,j}^2$ – дисперсия оценки $\hat{a}_{k,j}$. Таким образом, $\hat{a}_{k,j}^2$ есть смещенная оценка $a_{k,j}^2$, и ее смещение равно $\sigma_{k,j}^2$. Отсюда и из (5) следует

$$M[\hat{c}_k^2] = \sum_j n_j^2 M[\hat{a}_{k,j}^2] = c_k^2 + \sum_j n_j^2 \sigma_{k,j}^2. \quad (8)$$

Таким образом, \hat{c}_k^2 – смешанная оценка c_k^2 , несмотря на то, что оценки $\hat{a}_{k,j}$ не смещены. Смещение $c_k^2 = \sum_j n_j^2 \sigma_{k,j}^2$. Оно больше, чем больше дисперсия шума ϵ_k и короче ряд, поскольку именно так зависят от этих факторов дисперсии оценок коэффициентов $\sigma_{k,j}^2$ (Приложение). Поэтому для коротких рядов \hat{c}_k^2 систематически больше c_k^2 . Это объясняет результаты, приведенные на рис. 1а.

Значения $\sigma_{k,j}^2$ растут с увеличением D_k , поэтому при $D_1 > D_2$ и прочих равных условиях смещение \hat{c}_1 больше, чем смещение \hat{c}_2 . Это объясняет результаты, представленные на рис. 1в. Значения $\sigma_{k,j}^2$ растут и с увеличением ω_k (Приложение), что объясняет упомянутые выше различные смещения \hat{c}_1 и \hat{c}_2 для несвязанных систем с различными угловыми частотами.

2 . ОЦЕНКИ СВЯЗАННОСТИ ДЛЯ КОРОТКИХ РЯДОВ

А. Вывод формул

Используем как основу оценки \hat{c}_k^2 , но устраним их смещение и оценим доверительные интервалы для величин c_k^2 . Как видно из (8), несмещенной оценкой c_k^2 является величина

$$\gamma_k = \hat{c}_k^2 - \sum_j n_j \hat{\sigma}_{k,j}^2, \quad (9)$$

где $\hat{\sigma}_{k,j}^2$ – несмещенные оценки величин $\sigma_{k,j}^2$. В общем случае аналитические выражения для $\hat{\sigma}_{k,j}^2$ получить не удается. Но это можем сделать при упрощающих предположениях о свойствах процессов $\epsilon_k(t)$: нормальности и независимости друг от друга и от $\varphi_{1,2}(t)$. Полученные оценки $\hat{\sigma}_{k,j}^2$ зависят сложным образом от τ и $\hat{a}_{k,1}$ (см. ф-лу (П.3) в Приложении).

Величины γ_k позволяют судить о наличии воздействия одной системы на другую. Для характеристики направления связи удобно использовать не нормированную величину d , что приводит к трудностям анализа свойств оценок, а величину $\delta = c_2^2 - c_1^2$, несмещенной оценкой которой является $\hat{\delta} = \gamma_2 - \gamma_1$.

Как оценить достоверность полученных по отдельной реализации оценок γ_k и $\hat{\delta}$? Дисперсия величины γ_k (9) при рассматриваемых длинах ряда ($N \approx 10^3$ и около 10 точек на характерном перио-

де) примерно равна дисперсии величины \hat{c}_k^2 (Приложение) и выражается через ковариации $\hat{a}_{k,j}$:

$$\sigma_{\gamma_k}^2 \approx \sum_{i,j} n_i^2 n_j^2 \text{cov}(\hat{a}_{k,i}^2, \hat{a}_{k,j}^2). \quad (10)$$

Поскольку истинные значения ковариаций не известны, то приходится их оценивать. В итоге сложность получения “хорошей” оценки $\hat{\sigma}_{\gamma_k}^2$ для $\sigma_{\gamma_k}^2$ заключается в следующем: чтобы редко делать ошибочные выводы о характере связи, нельзя часто получать заниженные оценки $\sigma_{\gamma_k}^2$, а чтобы различать наличие взаимодействия, нельзя завышать ее оценки. (Формула для такой оценки (П.4) была получена полуэмпирическим путем.)

Величина γ_k имеет при используемых многочленах F невысокого порядка асимметричное распределение, поэтому в качестве доверительного интервала для c_k^2 уместно “асимметричное” выражение $[\gamma_k - R_1 \hat{\sigma}_{\gamma_k}, \gamma_k + R_2 \hat{\sigma}_{\gamma_k}]$. Константы R_1 и R_2 подобраны в работе эмпирически в численных экспериментах с системой (7), чтобы обеспечить нужную доверительную вероятность. Например, для многочленов F третьего порядка 95%-ный интервал соответствует $R_1 = 1.6, R_2 = 1.8$. Вывод о наличии воздействия на k -й осциллятор можно сделать с вероятностью ошибки 0.025, если

$$\gamma_k - R_1 \hat{\sigma}_{\gamma_k} > 0. \quad (11)$$

Для вывода о преимущественном направлении взаимодействия нужно оценить дисперсию оценки $\hat{\delta}$. Ее несмещенная оценка есть $\hat{\sigma}_{\delta}^2 = \hat{\sigma}_{\gamma_1}^2 + \hat{\sigma}_{\gamma_2}^2$.

Поскольку распределение $\hat{\delta}$, как правило, более симметрично, то доверительный интервал для δ целесообразно искать в “симметричном” виде $\hat{\delta} \pm R \hat{\sigma}_{\delta}$. Эксперименты показывают, что величина $R = 1.6$ соответствует 95%-ному интервалу. Если полученные значения оценок обеспечивают выполнение неравенств

$$\gamma_2 - R_1 \hat{\sigma}_{\gamma_2} > 0 \text{ и } \hat{\delta} - R \hat{\sigma}_{\delta} > 0, \quad (12)$$

то с вероятностью ошибки 0.025 можно утверждать, что имеется преимущественное воздействие $1 \rightarrow 2$. И наоборот, если

$$\gamma_1 - R_1 \hat{\sigma}_{\gamma_1} > 0 \text{ и } \hat{\delta} + R \hat{\sigma}_{\delta} < 0, \quad (13)$$

то с такой же вероятностью ошибки делаем вывод, что сильнее воздействие $2 \rightarrow 1$. Если же ни одно из соотношений (12), (13) не выполняется, то

вывод о направленности связи с требуемой надежностью сделать нельзя.

Б. Применение новых оценок в численном эксперименте

Рассмотрим сначала результаты использования предложенных новых оценок γ_k и $\hat{\delta}$ в приведенном выше примере. Отсутствие систематической ошибки при использовании оценок γ_k и $\hat{\delta}$ для всех ситуаций иллюстрирует рис. 1д–1в. В соответствии с ожидаемыми результатами частота ошибочных выводов о наличии воздействия $1 \rightarrow 2$ по (11) составила 0.025. Частоты ошибочных выводов о преимущественном направлении связи вида (12) и (13) также равны примерно 0.025, а суммарная частота ложного выявления направленности связи равна их сумме – 0.05. Таким образом, здесь новые оценки не имеют смещений, а процент случайных ошибок правильно контролируется. Но это не удивительно, так как все формулы для новых оценок получены в п. 2 А при условиях, справедливых именно для системы (2) с $G_{1,2} \equiv 0$.

При помощи численного эксперимента убедимся в том, что новые оценки применимы и для функций $G_{1,2}$ в (2), которые принимают значения не нулевые, но умеренные. В качестве объекта, генерирующего ряды, возьмем систему (2) с $G_1(\varphi_1, \varphi_2) = 0.03 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), G_2(\varphi_2, \varphi_1) = 0.05 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \omega_1 = 1.1, \omega_2 = 0.9, D_1 = D_2 = D$. Предположения, при которых были выведены выражения для новых оценок, (умеренно) нарушаются из-за нелинейности функций $G_{1,2}$.

На рис. 2а представлены графики зависимостей средних по ансамблю значений $\langle \hat{c}_k^2 \rangle$ и $\langle \gamma_k \rangle$ от уровня шума $\sqrt{2D}$ в диапазоне 0...0.63. Истинные значения c_k^2 не известны, но вместо них сплошными линиями показаны “почти истинные” значения, полученные при расчете по очень длинному ряду ($N = 2 \times 10^5$). Результаты расчетов показывают, что оценки \hat{c}_k^2 смещены тем сильнее, чем сильнее шум – \hat{c}_k^2 в 20 раз превышают c_k^2 при $\sqrt{2D} = 0.6$. Оценки γ_k практически не смещены при любом уровне шума.

На рис. 2б показано число p верных и ошибочных выводов о направлении связи, сделанных при использовании оценок \hat{a} и $\hat{\delta}$. При большом шуме $\sqrt{2D} = 0.6$ ошибочные выводы по знаку величины \hat{a} сделаны более чем в половине случаев. Для того же уровня шума число ошибочных выводов, сделанных путем проверки справедливости выражений (12) и (13), равно 20 (в пределах ожидаемой вероятности ошибки 0.025), число

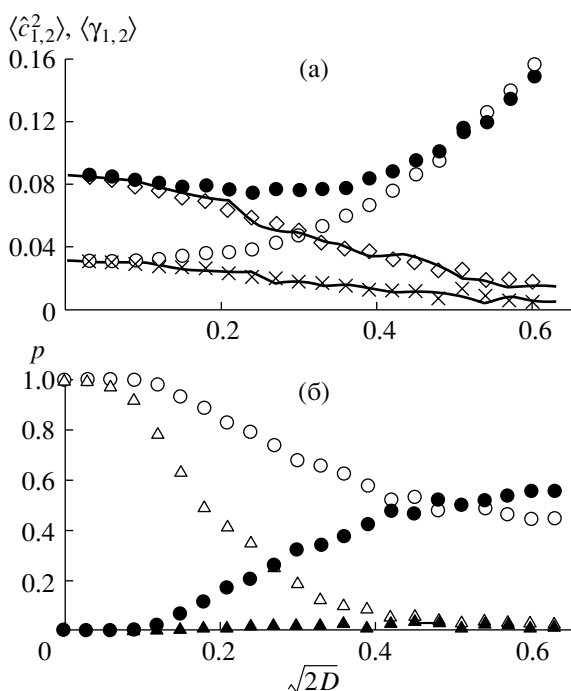


Рис. 2. Свойства оценок, полученных по реализациям системы (2) с нелинейными функциями $G_{1,2}$: а – средние по ансамблю значения \hat{c}_1^2 (светлые кружочки), \hat{c}_2^2 (черные кружочки), γ_1 (крестики), γ_2 (ромбики) и почти истинные значения $c_{1,2}^2$, полученные как по длинному ряду (сплошные линии); б – частота верных и ошибочных выводов о направлении связи по оценке \hat{d} (светлые и черные кружочки) и по оценке $\hat{\delta}$ (светлые и черные треугольники).

верных выводов – 24, в остальных ситуациях сделаны осторожные выводы: нельзя уверенно утверждать что-либо о направлении связи. Другими словами, при $\sqrt{2D} = 0.6$ ряд длиной $N = 1000$ точек является слишком коротким для достоверного определения направления связи.

При уменьшении уровня шума уменьшается число ошибочных выводов и растет число верных выводов при использовании как \hat{d} , так и $\hat{\delta}$. Но даже для довольно малых шумов $0.1 \leq \sqrt{2D} \leq 0.2$ число ошибок при использовании \hat{d} все еще велико: 10...20%. При использовании $\hat{\delta}$ частота ошибки всегда не более 0.025. Использование $\hat{\delta}$ с доверительным интервалом – это “осторожная” стратегия, поэтому и число верных выводов о направлении связи по $\hat{\delta}$ часто меньше, чем по знаку \hat{d} , так как для многих реализаций сделан вывод о невозможности надежного определения направления связи.

При очень малом шуме ($\sqrt{2D} \leq 0.03$) оба подхода дают верный вывод о направлении связи в 100% случаев, а доверительный интервал, соответствующий оценке $\hat{\delta}$ является узким, что показывает надежность вывод для каждого отдельно го ряда.

При достаточно низком уровне шума ряд длиной 1000 точек становится уже достаточно длинным для надежного определения направления связи. Сделано более 95% верных выводов по $\hat{\delta}$ при $\sqrt{2D} \leq 0.06$. Другими словами, ряд с $N = 1000$ стал “достаточно длинным”, когда величина D уменьшилась примерно в 100 раз по сравнению с $\sqrt{2D} = 0.6$. Отсюда можно заключить, что при фиксированном $\sqrt{2D} = 0.6$ ряд станет “достаточно длинным”, если увеличить N в 100 раз. Сказанное проясняет смысл терминов “длинный” и “короткий” ряды с точки зрения определения направленности связи. Конкретное значение N , разделяющее длинные и короткие ряды, зависит от уровня шумов и разности $c_2^2 - c_1^2$. Дополнительные “нелинейные” примеры представлены в [8].

Новые оценки применимы для относительно коротких рядов, но желательно длиной не менее 50–100 характерных периодов. Дополнительные численные эксперименты показывают, что применимость оценок (контролируемая вероятность ошибочных выводов) для выявления слабой связи сохраняется даже для рядов длиной 20 периодов, если использовать только такие ряды, для которых значение коэффициента фазовой когерентности ρ не превышает 0.4. Последнее условие исключает опасные случаи “почти синхронных” сигналов.

3. ПРИМЕР ИЗ НЕЙРОФИЗИОЛОГИИ

А. Постановка задачи и экспериментальные данные

Важной задачей эпилептологии является локализация очага патологии (эпилептического фокуса) в головном мозге. Во многих ситуациях это очень не простая задача, так как патологические свойства, вызывающие эпилептический припадок, может иметь даже такая область мозга, в которой не видно повреждения тканей. Ее пытаются обнаруживать по характеру динамики электроэнцефалограмм (ЭЭГ) [6, 7]. По распространенной гипотезе перед эпилептическим припадком усиливается воздействие очага патологии на другие области мозга, что и вызывает их патологическую синхронизацию. Можно ожидать, что оценки связанности при расчете по многоканальным записям ЭЭГ в относительно коротком скользящем окне могут выявить изменения характера взаимо-

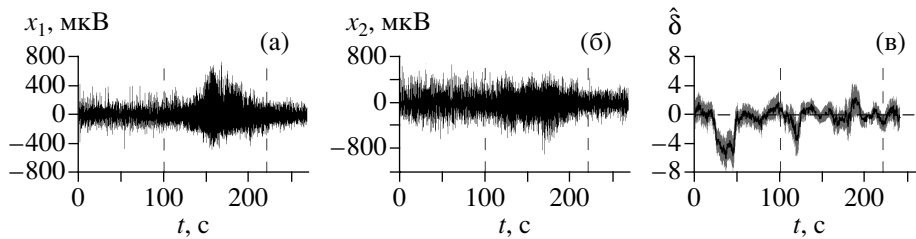


Рис. 3. Анализ внутричерепных записей ЭЭГ: а – запись с гиппокампа; б – запись с височной доли коры; в – индекс направленности связи.

действия между областями мозга перед припадком и помочь локализовать эпилептический фокус.

Здесь рассмотрена первая попытка применения предложенных оценок связанности с этой целью. Записи внутричерепных эпилептически ЭЭГ пациента с височной эпилепсией были предоставлены научным центром Западной больницы Торонто, Канада (доктором Р. Веннбергом). На рис. 3 представлена двухканальная запись ЭЭГ (с левой височной доли коры головного мозга и с левого гиппокампа), сделанная с частотой выборки 250 Гц и содержащая эпилептический припадок. Известно, что очаг патологии находится в левой височной доле коры. Вертикальными штриховыми линиями показаны начало и конец припадка. Длина записи около 4.5 мин.

Б. Результаты и обсуждение

Спектральный анализ широкополосных сигналов ЭЭГ показывает, что имеются максимумы в спектре на частотах около 2...3 Гц перед припадком и после него и на частоте 7 Гц во время припадка. Мы проводили анализ с соответствующими значениями $\tau = 0.04$ с ($100\Delta t$) и $\tau = 0.14$ с ($33\Delta t$) в модели (3). Для расчета фазы использовали как полосовую фильтрацию и преобразование Гильберта, так и вейвлет-преобразование (1) с $\omega_0 = 2$ со схожими результатами. На рис. 3 показаны результаты для второго подхода. Для каждого из сигналов использовали временной масштаб s , соответствующий положению пика в скалограмме (оценке спектра мощности), полученной по всей записи при $\omega_0 = 2$. Это составило $s = 0.44$ с для гиппокампа и $s = 0.62$ с для коры.

Индекс направленности вычисляли в скользящем временном окне шириной от 4 с ($N = 1000$ точек) до 40 с со схожими результатами. Хорошо видно изменение направления связи, например, для $N = 6000$, что представлено на рис. 3в, где показаны значения индекса направленности $\hat{\delta}$ с 95%-ным доверительным интервалом (серый шлейф). За некоторое время (80 с) до начала припадка выявляется длительный интервал значимого преимущественного воздействия коры над гип-

покампа. Это хорошо согласуется с клинической информацией и указывает на возможность успешного использования оценок связанности для локализации эпилептического фокуса. Но достоверный вывод сделать пока нельзя, так как требуется исследование на большом ансамбле ЭЭГ, что является предметом текущих исследований (пока из записей четырех эпилептических припадков у одного пациента результаты, аналогичные представленным на рис. 3, наблюдали в трех случаях, в четвертом – отсутствовало значимое направление связи перед припадком).

4. ПРИМЕР ИЗ КЛИМАТОЛОГИИ

А. Постановка задачи и экспериментальные данные

Процессы Эль-Ниньо – Южное колебание (ЭНЮК) и Северо-Атлантическое колебание (САК) представляют собой ведущие моды межгодовой климатической изменчивости для Земли в целом и для Северного полушария [17, 18]. Выявление механизмов, формирующих этих процессы, – проблема большого фундаментального и практического значения. Особый интерес вызывает вопрос о наличии и характере взаимного влияния ЭНЮК и САК. Для ответа на него линейные методы анализа (например, взаимные корреляционные функции) применяли к временным рядам различных индексов: для температуры поверхности океана (ТПО) и давления на уровне моря. Временные ряды с надежными данными являются сравнительно короткими – с 1950-го по 2004-й гг. включительно (660 среднемесячных значений). При этом процессы весьма сложны, так что выводы о наличии их связанности не удавалось сделать с достоверностью. В данной работе для анализа процессов ЭНЮК и САК в период 1950–2004 гг. использовали следующие климатические индексы:

1) индекс САК, определяемый первой модой разложения поля высоты изобарической поверхности 500 гПа в средней тропосфере северного полушария на основе анализа “вращающихся главных компонент” (см. <http://www.ncer.noaa.gov> [19] и рис. 4а–4в);

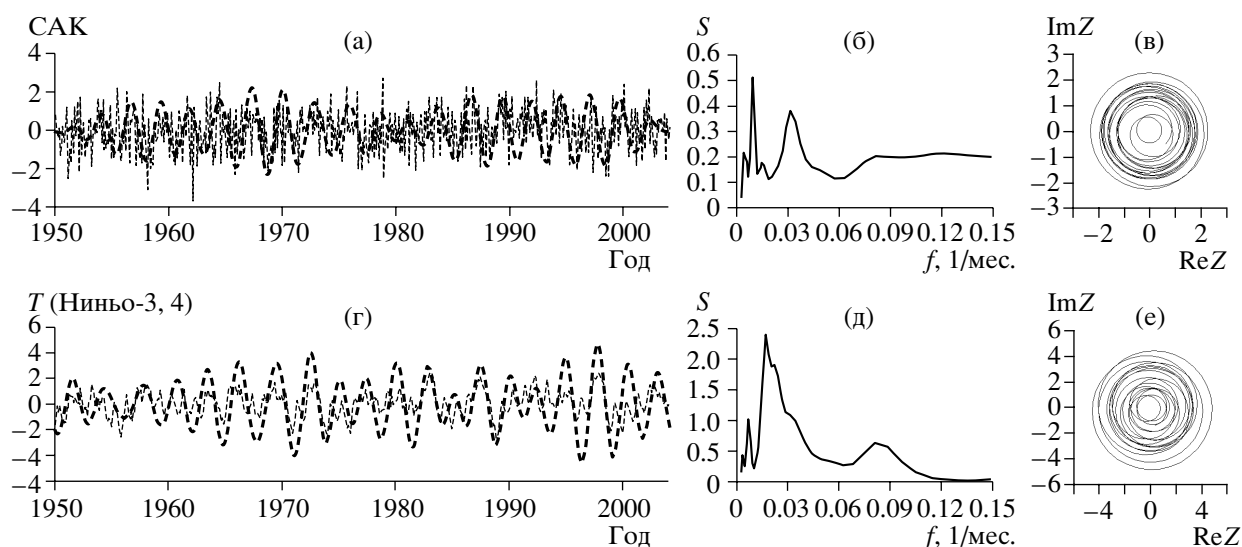


Рис. 4. Климатические индексы и их индивидуальные характеристики: а – индекс САК, серым цветом показан исходный ряд, штриховыми линиями – вещественная часть преобразования (1) с временным масштабом $s = 32$ месяца; б – глобальный вейвлет-спектр индекса САК, S – мощность сигнала; в – траектория на комплексной плоскости для масштаба компоненты индекса САК с $s = 32$; г–е – аналогичные характеристики для индекса $T(\text{Ниньо-3,4})$.

2) индекс Эль-Ниньо $T(\text{Ниньо-3,4})$, характеризующий ТПО в экваториальной области Тихого океана (5° с.ш.– 5° ю.ш., 170° в.д.– 120° в.д.) (см. <http://www.ncer.noaa.gov> (рис. 4г–4е)).

Для типичных временных масштабов, представляющих интерес (не менее двух лет), максимальное число характерных периодов в этих рядах равно 27.

Б. Результаты и обсуждение

На рис. 4 приведены результаты расчета индивидуальных характеристик индекса САК и $T(\text{Ниньо-3,4})$. На рис. 4б представлена скалограмма индекса САК, полученная при помощи вейвлета Морле при $\omega_0 = 6$. Эта сглаженная оценка спектра мощности имеет пики, соответствующие цикличности с периодами около 32 месяцев, 108 месяцев и т.д. Можно предположить, что этим пикам соответствуют колебательные процессы, для которых адекватно определяем фаза. Для индекса $T(\text{Ниньо-3,4})$ скалограмма имеет пики, соответствующие масштабам 12 месяцев, 60 месяцев и др. (рис. 4д).

Фазы вводили при помощи вейвлет-преобразования (1) при использовании временных масштабов s , соответствующих различным пикам в спектрах, и $\omega_0 = 6$ (вариация ω_0 в интервале 4...8 практически не влияет на результаты). Оценивали взаимодействие между всеми “ритмами” попарно. Содержательные выводы о наличии связи получены для ритма с $s = 32$ месяца в обоих сигналах. На рис. 4а и 4г штриховыми линиями показаны временные реализации вещественной части вейв-

лет-коэффициента, соответствующего $s = 32$ месяца. На рис. 4в и 4е показаны траектории на комплексной плоскости: имеет место вращение радиуса-вектора вокруг начала координат, так что фазы хорошо определены.

Для учета того, что взаимодействие может происходить с запаздыванием [20], модели строили в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(t + \tau) - \varphi_{1,2}(t) = \\ = F(\varphi_{1,2}(t), \varphi_{2,1}(t + \Delta), \vec{a}_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(t), \end{aligned} \quad (14)$$

где Δ – дополнительный параметр модели, отрицательная величина которого означает запаздывающую связь. Рассчитывали $\gamma_{1,2}(\Delta)$ при вариации Δ в пределах от большого по модулю отрицательного числа до $\Delta = \tau$. Значения $\Delta > \tau$ не имеют физического смысла, так как означают влияние будущих значений на текущие. Коэффициент ρ также рассчитывали в зависимости от Δ : $\rho(\Delta) = |\langle \exp(j(\varphi_1(t) - \varphi_2(t + \Delta))) \rangle|$. Принимали во внимание только значения $\gamma_{1,2}(\Delta)$, соответствовавшие $\rho(\Delta) < 0.4$.

Результаты построения моделей (14) с $\tau = 32$ месяца для выделенных ритмов с $s = 32$ месяца представлены на рис. 5а, 5б. Коэффициент ρ не превышает 0.4 для сдвигов $\Delta \geq -30$ (рис. 5в). Только их и следует принимать во внимание. Оценка силы воздействия ЭНЮК на САК *поточечно* значима для интервала $-30 < \Delta < 0$ и принимает максимальное значение при $\Delta = -24$ месяца (рис. 5а). При помощи дополнительных рассуждений [21] отсюда можно сделать и общий вывод о наличии

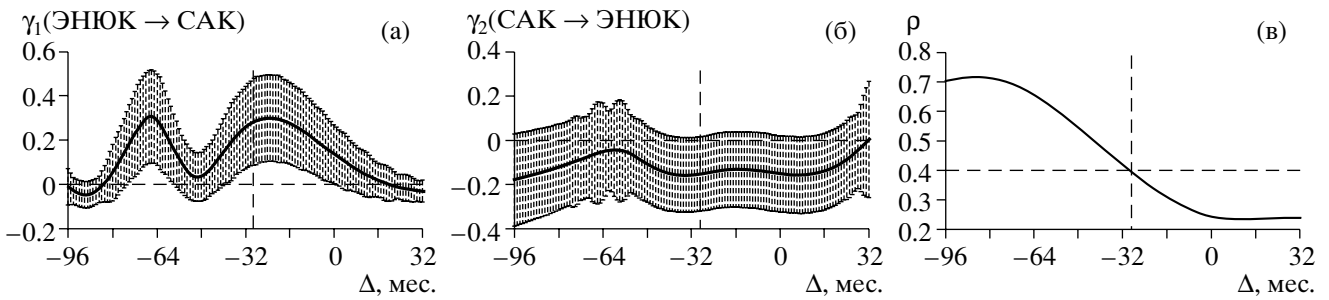


Рис. 5. Анализ связанности между САК и ЭНЮК для компонент с $s = 32$ месяца: а, б – оценки силы влияния процессов друг на друга (пунктирными линиями показаны поточечные 95%-ные доверительные интервалы); в – коэффициент фазовой когерентности.

влияния ЭНЮК на САК с доверительной вероятностью 0.95. При этом наиболее вероятно наличие запаздывания около 24 месяцев, но это не столь достоверный вывод. Признаки обратного влияния САК на ЭНЮК по результатам моделирования фазовой динамики не обнаружены (рис. 5б).

Таким образом, на основе проведенного анализа выявлено влияние процесса ЭНЮК на САК с высокой доверительной вероятностью, не доступной при использовании традиционных линейных методов. Результаты применения и другого нелинейного метода к этой задаче рассмотрены в работе [21].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены новые оценки величины и направления связи между двумя автоколебательными системами для случая коротких временных рядов. Новые оценки не смещены и снабжены доверительными интервалами. Это строго обосновано в предположении об очень слабой фазовой нелинейности систем и очень слабой связи между ними, но в численном эксперименте применимость оценок показана и при умеренном нарушении этих условий.

Методика применима для исследования автоколебательных систем любой природы. В частности, такие оценки необходимы при анализе нестационарных сигналов (в биологии и медицине) и дефиците экспериментальных данных (например, в климатологии). На примерах анализа реальных процессов из этих областей при помощи предложенных оценок получена информация о взаимодействии между структурами головного мозга по записям ЭЭГ и между климатическими процессами по рядам климатических индексов.

Автор признателен Безручко Б.П., Мохову И.И., Бодрову М.Б., Веннбергу Р., Пересу Веласкесу Х.-Л. за сотрудничество и полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы “Фундаментальные исследования и

высшее образование – ВРНЕ (грант REC-006), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-02-16305) и Фонда содействия отечественной науке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим аналитические выражения для дисперсий и ковариаций оценок $\hat{a}_{k,j}$ в случае системы несвязанных линейных осцилляторов – системы (2) с $G_{1,2} \equiv 0$. Уравнения (2) приводим к виду (7). При этом значения $\epsilon_k(t_i)$ не зависят от фаз $\Phi_{1,2}(t_i)$ для любого t_i ; значения $\epsilon_1(t_i)$ и $\epsilon_2(t_i)$ не зависят друг от друга; процесс $\epsilon_k(t_i) = \int_{t_i}^{t_i+\tau} \xi_k(t) dt, i = 1, 2, \dots$, представляет собой последовательность случайных величин, одинаково распределенных по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\epsilon_k}^2 = 2D_k\tau$. Автоковариационная функция $\epsilon_k(t_i)$ имеет вид

$$M[\epsilon_k(t_i)\epsilon_k(t_j)] = \int_{t_i}^{t_i+\tau} \int_{t_j}^{t_j+\tau} 2D_k\delta(t-t') dt dt' = \begin{cases} \sigma_{\epsilon_k}^2(1 - |t_i - t_j|/\tau), & |t_i - t_j| \leq \tau, \\ 0, & |t_i - t_j| > \tau. \end{cases} \quad (П.1)$$

Оценки $\hat{a}_{k,j}$ получают при помощи МНК. Перепишем условие (6) в виде

$$\| \mathbf{A}_k \vec{\hat{a}}_k - \vec{\hat{b}}_k \|^2 \rightarrow \min, \quad (П.2)$$

где \mathbf{A}_k – матрица с элементами $A_{i,j}^{(k)} = g_j^{(k)}(\Phi^1(t_i), \Phi^2(t_i))$; функция $g_j^{(k)}(\Phi^1(t_i), \Phi^2(t_i))$ – одночлен в $F(\Phi_1, \Phi_2, \vec{\hat{a}}_k)$ (см. ф-лу (3)), соответствующий коэффициенту $a_{k,j}$; $\vec{\hat{b}}_k$ – вектор с компонентами $b_{k,i} = \Phi_k(t_i + \tau) - \Phi_k(t_i)$; $\| \cdot \|$ – евклидова норма. Решение задачи (П.2) сводится к решению нормальных уравне-

ний и определяется формулой $\hat{a}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \vec{b}_k$ [16]. Предположим, что случайную матрицу $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$ можно считать постоянной, т.е. $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k = M[\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k] = \text{const}$. Справедливость этого предположения зависит от длины ряда N и частоты выборки. Численные эксперименты показывают, что оно выполняется достаточно хорошо (с погрешностью не более 5%) при рассматриваемых длинах ряда $N \approx 50 \dots 100$ характерных периодов и частотах выборки $10 \dots 20$ точек на периоде.

Из сделанных предположений и теории МНК следует, что оценки \hat{a}_k являются несмещенными и распределены по многомерному нормальному закону. Матрица ковариаций \hat{a}_k имеет вид

$$M[\hat{a}_k \hat{a}_k^T] = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)^{-1} M[\mathbf{A}_k^T \vec{\epsilon}_k \vec{\epsilon}_k^T \mathbf{A}_k] (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k)^{-1},$$

где $\vec{\epsilon}_k$ – вектор-столбец с компонентами $\epsilon_k(t_1), \dots, \epsilon_k(t_N)$. Элементы на диагонали матрицы $M[\hat{a}_k \hat{a}_k^T]$ – это дисперсия оценок $\hat{a}_{k,j}$, а остальные ее элементы – ковариации оценок $\hat{a}_{k,i}$ и $\hat{a}_{k,j}$. Найдем их значения. Заметим сначала, что при сделанных предположениях значения $\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i), i = 1, \dots, N$, практически равномерно распределены в квадрате $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. На таком множестве тригонометрические многочлены $g_j^{(k)}$ взаимно ортогональны. Отсюда получаем (в пределах принятой точности рассуждений), что матрица $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$ диагональна:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k = (N/2) \mathbf{I},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Последовательные значения $\epsilon_k(t_i)$ коррелированы. Используя выкладки, аналогичные формуле (П.1), и нормальность распределения ξ_k , а также взяв некоторые определенные интегралы, получим, что оценки различных коэффициентов $\hat{a}_{k,i}$ не коррелированы, а их дисперсии равны (при $i > 1$)

$$\sigma_{1,i}^2 = (2\sigma_{\epsilon_1}^2/N) \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\tau/\Delta t - 1} (1 - j/N)(1 - j\Delta t/\tau) \times \right. \\ \left. \times \cos((m_i \omega_1 + n_i \omega_2) j \Delta t) \exp(-j(m_i^2 \sigma_{\epsilon_1}^2 + n_i^2 \sigma_{\epsilon_2}^2)/2\tau) \right).$$

Для того чтобы получить выражения для оценок $\sigma_{1,i}^2$, надо заменить неизвестные величины $\sigma_{\epsilon_k}^2$ и ω_k их оценками:

$$\hat{\sigma}_{\epsilon_k}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\varphi_k(t_i + \tau) - \varphi_k(t_i) - \right. \\ \left. - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\varphi_k(t_j + \tau) - \varphi_k(t_j)) \right)^2$$

и $\hat{a}_{k,1}/\tau$ соответственно. Учитывая также, что $\tau \ll N$, получим оценку

$$\sigma_{1,i}^2 = (2\sigma_{\epsilon_1}^2/N) \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\tau/\Delta t - 1} (1 - j\Delta t/\tau) \times \right. \\ \left. \times \cos((m_i \hat{a}_{1,1} + n_i \hat{a}_{2,1}) j \Delta t/\tau) \times \right. \\ \left. \times \exp(-j(m_i^2 \hat{\sigma}_{\epsilon_1}^2 + n_i^2 \hat{\sigma}_{\epsilon_2}^2)/2\tau) \right). \quad (\text{П.3})$$

Вывод формулы для $\hat{\sigma}_{2,i}^2$ аналогичен представленному выше. Через полученные оценки дисперсий $\hat{\sigma}_{k,i}^2$ выразим оценки дисперсий $\hat{\sigma}_{\gamma_k}^2$ и другие. Дисперсия $\sigma_{\gamma_k}^2$ выражается через дисперсии и ковариации оценок $\hat{a}_{k,j}$ по формуле (10). Из некоррелированности нормально распределенных оценок $\hat{a}_{k,i}$ и $\hat{a}_{k,j}$ при $i \neq j$ следует независимость оценок $\hat{a}_{k,i}^2$ и $\hat{a}_{k,j}^2$. Тогда, полагая в (10) $\text{cov}(\hat{a}_{k,i}^2, \hat{a}_{k,j}^2) = 0$ при $i \neq j$, получим

$$\sigma_{\gamma_k}^2 = \sum_j n_j^4 \sigma_{\hat{a}_{k,j}^2}^2.$$

Используя нормальность $\hat{a}_{k,j}$, получим выражение для дисперсии $\hat{a}_{k,j}^2$:

$$\sigma_{\hat{a}_{k,j}^2}^2 = 2\sigma_{k,j}^4 + 4a_{k,j}^2 \sigma_{k,j}^2.$$

Несмещенной оценкой для $\sigma_{\hat{a}_{k,j}^2}^2$ является оценка $2\hat{\sigma}_{k,j}^4 + 4(\hat{a}_{k,j}^2 - \hat{\sigma}_{k,j}^2) \hat{\sigma}_{k,j}^2$. Но она часто принимает значения, близкие к нулю и даже меньше нуля. А это ведет к ложному выводу о значимости по-

лученных значений $\hat{a}_{k,j}^2$. Поэтому лучше использовать завышенную оценку

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{k,j}^2}^2 = \begin{cases} 2\hat{\sigma}_{k,j}^4 + 4(\hat{a}_{k,j}^2 - \hat{\sigma}_{k,j}^2)/\hat{\sigma}_{k,j}^2, \\ \hat{a}_{k,j}^2 - \hat{\sigma}_{k,j}^2 \geq 0, \\ 2\hat{\sigma}_{k,j}^4, \quad \hat{a}_{k,j}^2 - \hat{\sigma}_{k,j}^2 < 0. \end{cases}$$

Теперь в качестве оценки для $\sigma_{\gamma_k}^2$ возьмем величину

$$\hat{\sigma}_{\gamma_k}^2 = \begin{cases} \sum_j n_j^4 \hat{\sigma}_{\hat{a}_{k,j}^2}^2, & \gamma_k > 5 \sum_j n_j^4 \hat{\sigma}_{\hat{a}_{k,j}^2}^2, \\ (1/2) \sum_j n_j^4 \hat{\sigma}_{\hat{a}_{k,j}^2}^2, & \gamma_k \leq 5 \sum_j n_j^4 \hat{\sigma}_{\hat{a}_{k,j}^2}^2. \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

Этот выбор связан со следующими соображениями. При больших значениях c_k хорошей оценкой является первая строка (П.4). При $c_k \approx 0$ первая строка дает оценку, в среднем в два раза большую истинного значения (как показывают результаты наших численных экспериментов), поэтому первую строку нужно разделить на два. Приведенная комбинация является приемлемым компромиссом для всех случаев. При помощи полученной дисперсии найдем полуэмпирические формулы для доверительных интервалов при оценивании $c_{1,2}^2$ и δ (см. п. 2 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // *Chaos*. 2003. V. 13. № 1. P. 179.
2. *Jevrejeva S., Moore J., Grinsted A.* // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108. № D21. P. 4677.
3. *Janson N.B., Balanov A.G., Anishchenko V.S., McClintock P.V.E.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. № 9. P. 86.
4. *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A. et al.* // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. № 4. P> 041909.
5. *Прохоров М.Д., Бодров М.Б., Пономаренко В.И. и др.* // *Биофизика*. 2005. Т. 50. № 5. С. 914.
6. *Arnhold J., Lehnertz K., Grassberger P., Elger C.E.* // *Physica D*. 1999. V. 134. № 4. P. 419.
7. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* // *Physica D*. 2000. V. 144. № 3–4. P. 358.
8. *Smirnov D.A., Bodrov M.B., Perez Velazquez J.L. et al.* // *Chaos*. 2005. V. 15. № 2. P. 024102.
9. *Rosenblum M.G., Pilovsky A.S.* // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 64. № 4. P. 045202.
10. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // *Phys. Rev. E*. 2003. V. 68. № 4. P. 046209.
11. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Курст Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление.* М.: Техносфера, 2003.
12. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. et al.* // *Neuro-informatics* / Ed. by Moss F., Gielen S. N.Y.: Elsevier Science, 2000. P. 279.
13. *Lachaux J.P., Rodriguez E., Le Van Quyen M. et al.* // *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2000. V. 10. № 10. P. 2429.
14. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // *Int. J. Bifurcations and Chaos*. 2000. V. 10. № 10. P. 2291.
15. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1974.
17. *Hurrell J.W., van Loon H.* // *Climatic. Change*. 1997. V. 36. № 3–4. P. 301.
18. *Мохов И.И., Елусеев А.В., Хворостьянов Д.В.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2000. Т. 36. № 6. С. 741.
19. *Barnston A.G., Livezey R.E.* // *Monthly Weather Review*. 1987 V. 115. № 6. P. 1083.
20. *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // *Phys. Rev. E*. 2004. V. 70. № 4. P. 046213.
21. *Smirnov D.A., Mokhov I.I.* // *Int. Symp. "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics": Plenary Talks and Workshops. St. Petersburg – Nizhny Novgorod, Russia, 2–9 August, 2005.* P. 46.