

09

## Интервальные оценки связанности между системами с переключениями

© Д.А. Смирнов, М.Б. Бодров, Б.П. Безручко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 11 апреля 2006 г.

По наблюдаемым временным рядам определяются наличие и характер взаимодействия между двумя системами, динамика которых состоит в резкой смене движений вблизи различных состояний равновесия (в различных областях фазового пространства). Предложены интервальные оценки связанности на основе известных точечных оценок, использующих анализ интервалов между близкими по времени переключениями. Предложены также новые интервальные оценки, основанные на анализе условных вероятностей переключений. Эффективность обоих подходов продемонстрирована в численных экспериментах.

PACS: 05.45.xt

**1. Введение.** Анализ взаимодействия между колебательными системами по данным наблюдений — задача, возникающая во многих областях исследований и практики, например в медицинской и технической диагностике [1–3]. В рамках математической статистики и нелинейной динамики развит целый ряд различных методов характеристики связанности [4,5]. Каждый метод имеет свою область применимости и условия превосходства, поскольку в его основе лежат те или иные предположения о свойствах исследуемых систем. В работе предлагаются методики, направленные на анализ систем, в которых происходят нерегулярные „переключения“ между „состояниями“. Такие свойства имеет достаточно широкий класс объектов в природе и технике: сменяются движения на дне различных потенциальных ям в стохастически возбуждаемых мультистабильных осцилляторах [6], происходят колебания около различных неустойчивых положений равновесия в системе Лоренца [7] или цепи Чуа [8] и т.п. Поскольку переключения легко выявляются при наличии шумов и высокой размерности взаимодействующих систем, то

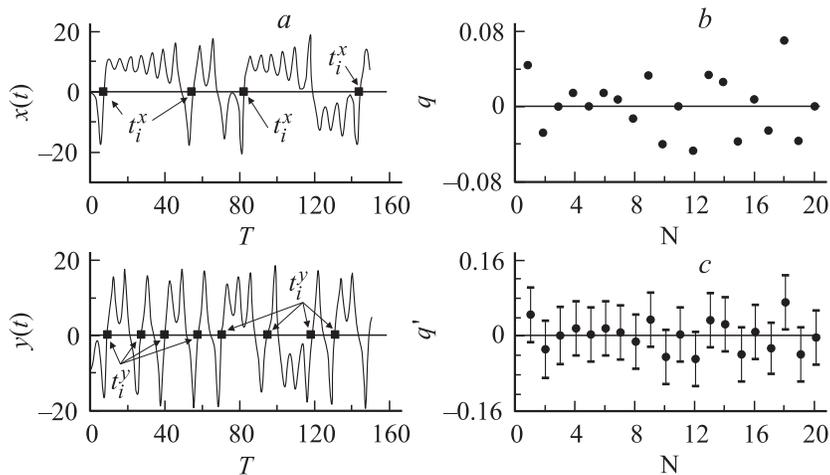
методики, основанные на их анализе, обещают быть работоспособными в этих условиях.

Для анализа взаимодействия между системами с переключениями уместны оценки „синхронизации событий“ [9], характеризующие предшествование события в одной системе событию в другой, где под событиями в нашем случае следует понимать переключения. В работе [9] были предложены *точечные* оценки синхронизации событий (числовые величины без оценок погрешности). Однако в случае сравнительно короткого временного ряда они не позволяют сделать надежный вывод о наличии и характере связанности, так как велика вероятность случайной ошибки. Поэтому при анализе коротких рядов важно оценивать статистическую значимость результатов, т. е. снабдить точечные оценки доверительными интервалами. На получение *интервальных* оценок и направлена данная работа.

А именно, мы предлагаем два вида интервальных оценок связанности. Во-первых, мы получаем доверительные интервалы для упомянутых оценок синхронизации событий. Во-вторых, развиваем новые оценки, основанные на анализе условных вероятностей переключений. Можно ожидать, что переход от первого подхода ко второму должен дать более чувствительные индикаторы связанности, аналогично переходу от коэффициента фазовой когерентности [10] к моделированию фазовой динамики [11,12]. Для проверки этой гипотезы в работе проведено сопоставление обоих подходов.

## 2. Методы.

2.1. *Точечные оценки синхронизации событий* [9]. Пусть  $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}$  и  $\{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$  — наблюдаемые временные ряды от систем  $X$  и  $Y$ . Пусть имеется  $m_x$  событий (для определенности будем здесь и далее понимать под „событием“ переключение „снизу вверх“, рис. 1, *a*) в ряде  $x(t)$  и  $m_y$  — в ряде  $y(t)$ . Обозначим моменты времени, в которые они происходят, через  $t_i^x$  ( $i = 1, \dots, m_x$ ) и  $t_j^y$  ( $j = 1, \dots, m_y$ ) соответственно. Подсчитаем число таких пар переключений в  $X$  и  $Y$ , когда в  $X$  переключение произошло чуть раньше (обозначим это  $X \rightarrow Y$ ):  $0 < t_i^y - t_j^x \leq \tau$ , где  $\tau$  — небольшая константа, которую определим ниже. Обозначим это число пар „почти синхронных“ переключений через  $c^\tau(Y|X)$ . Можно предположить, что в этих случаях переключение в  $X$  привело к переключению в  $Y$ . Аналогично определим  $c^\tau(X|Y)$ . В качестве характеристики связи между  $X$  и  $Y$  была



**Рис. 1.** *a* — временные реализации систем с переключениями между состояниями (несвязанные системы Лоренца),  $t^{x,y}$  — времена переключений с нижнего в верхнее состояние; *b* — точечные оценки  $q$ , сделанные по различным временным реализациям тех же систем; *c* — интервальные оценки  $q'$  (одно значение из 20 ошибочно отлично от нуля),  $N$  — номер эксперимента.

предложена нормированная величина [9]

$$q = \{c^\tau(Y|X) - c^\tau(X|Y)\} / \sqrt{m_x m_y}.$$

Константу  $\tau$  принимают равной половине минимального интервала между последовательными переключениями в одной из двух систем:  $\tau = (1/2)\min_{i,j}\{t_{i+1}^x - t_i^x, t_{j+1}^y - t_j^y\}$ . Индекс  $q$  меняется в пределах от  $-1$  (все события в  $y(t)$  предшествуют событиям в  $x(t)$ ) до  $+1$  (обратная ситуация). Признаком наличия связи может служить отличие  $q$  от нуля, а знак  $q$  может показывать преимущественное „направление“ связи. Это недостаточный признак связности, но во многих случаях он успешно работает на практике.

**2.2. Интервальные оценки синхронизации событий.** Из-за случайных флуктуаций точечная оценка  $q$  оказывается отличной от нуля даже в случае несвязанных осцилляторов. При этом в случае сравнительно коротких временных рядов (менее 400 переключений) она с большой

вероятностью может принимать большие значения (рис. 1, *b*). В таких случаях будут сделаны ошибочные выводы о характере связи.

Чтобы избежать этого, нужно оценивать статистическую значимость отличия получаемых значений  $q$  от нуля, например, с помощью доверительного интервала. Получим выражение для него.

Обозначим число пар ближайших по времени переключений в наблюдаемых рядах через  $m = \min(m_x, m_y)$ . Из этих  $m$  пар имеется  $c^\tau(Y|X)$  таких, что  $X \rightarrow Y$  (событие А),  $c^\tau(X|Y)$  — таких, что  $Y \rightarrow X$  (событие Б), и остальные — такие, что переключения строго синхронны или разделены интервалом, большим  $\tau$  (событие В). Для любой пары наблюдается одно из этих трех событий. Обозначим их вероятности  $p_{X \rightarrow Y}$ ,  $p_{Y \rightarrow X}$  и  $p_0$ ,  $p_{X \rightarrow Y} + p_{Y \rightarrow X} + p_0 = 1$ . В качестве характеристики связи будем использовать величину  $q' = p_{X \rightarrow Y} - p_{Y \rightarrow X}$  (смысл аналогичен описанной характеристике  $q$ ). Нетрудно получить ее оценку  $q' = (c^\tau(Y|X) - c^\tau(X|Y))/m$ .

В случае нерегулярного режима „взаимные расположения“ переключений для каждой пары близких по времени переключений в двух системах (предшествование переключения в системе  $X$  или  $Y$  для каждой пары) можно трактовать как последовательность независимых испытаний, в результате каждого из которых реализуется событие А, Б или В (схема Бернули). Согласно теореме Муавра–Лапласа  $c^\tau(Y|X)/m$  как оценка вероятности  $p_{X \rightarrow Y}$  асимптотически распределена по нормальному закону со средним  $p_{X \rightarrow Y}$  и дисперсией  $p_{X \rightarrow Y}(1 - p_{X \rightarrow Y})/m$ . Все аналогично для величины  $c^\tau(X|Y)/m$  как оценки  $p_{Y \rightarrow X}$ . Ковариация оценок  $c^\tau(Y|X)/m$  и  $c^\tau(X|Y)/m$  отрицательна и равна  $-p_{X \rightarrow Y}p_{Y \rightarrow X}/m$ . Отсюда,  $q'$  распределена нормально со средним  $p_{X \rightarrow Y} - p_{Y \rightarrow X}$  и дисперсией  $p_{X \rightarrow Y}(1 - p_{X \rightarrow Y})/m + p_{Y \rightarrow X}(1 - p_{Y \rightarrow X})/m + 2p_{X \rightarrow Y}p_{Y \rightarrow X}/m$ . 95%-ный доверительный интервал для величины  $q'$  можно оценить как

$$\hat{q}' \pm 2\sqrt{[c^\tau(Y|X)(1 - c^\tau(Y|X)) + c^\tau(X|Y)(1 - c^\tau(X|Y)) + 2c^\tau(Y|X)c^\tau(X|Y)]/m}.$$

Теперь вывод о наличии, например, преимущественного влияния  $X$  на  $Y$  будет сделан при условии

$$\hat{q}' > 2\sqrt{[c^\tau(Y|X)(1 - c^\tau(Y|X)) + c^\tau(X|Y)(1 - c^\tau(X|Y)) + 2c^\tau(Y|X)c^\tau(X|Y)]/m}$$

с вероятностью ошибки не более 0.05 (рис. 1, *c*).

2.3. *Интервальные оценки, основанные на анализе условных вероятностей.* Мы предлагаем для выявления связанности процессов использовать также и более тонкую идею. Она состоит в том, что условная вероятность переключения в „ведомой“ системе в тот момент, когда она попала в „опасную“ область,<sup>1</sup> должна сильно зависеть от текущего состояния „ведущей“ системы даже в случае достаточно слабой связи. Формализуя эту идею, мы получили новые характеристики связанности.

Пусть состояния системы  $X$ , между которыми происходят переключения, характеризуются условиями  $x(t) > 0$  и  $x(t) < 0$  (верхнее и нижнее состояние). Обозначим  $t_i^X$  — моменты времени, когда система  $X$  попала в „опасную“ область в нижнем состоянии (обозначим эту область  $\Omega$ ). Вероятность того, что система переключится в верхнее состояние  $-x(t_i^X + \tau_1) > 0$ , где  $\tau_1$  равно, например, трети среднего времени пребывания в одном из состояний, должна существенно зависеть от текущего состояния системы  $Y$ , если есть воздействие  $Y$  на  $X$ . Интенсивность воздействия системы  $Y$  на систему  $X$  можно определить как разность „безусловной“ вероятности<sup>2</sup> переключения системы  $X$  из опасной области и условной вероятности ее переключения при условии, что  $y(t_i^X) > 0$ . Обозначим эту характеристику  $\gamma_{Y \rightarrow X}$ :

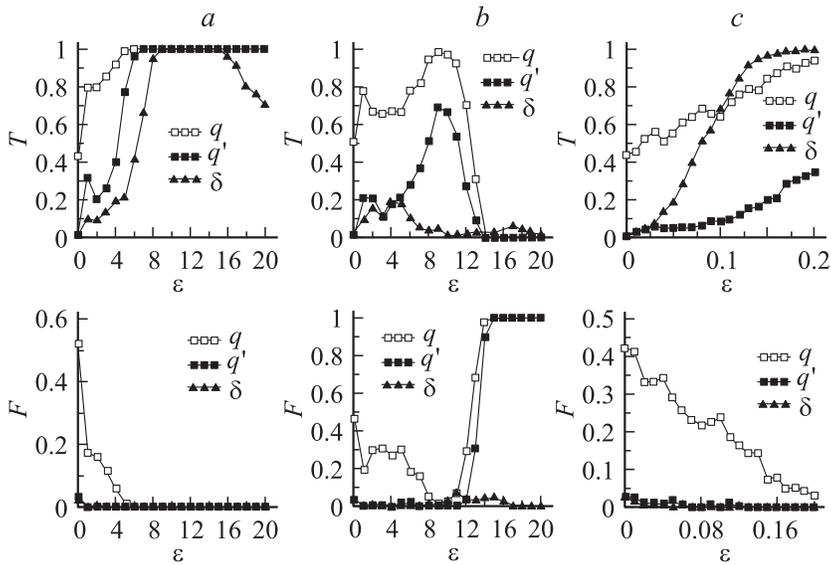
$$\begin{aligned} \gamma_{Y \rightarrow X} = & P\{x(t_i^X + \tau_1) > 0 | x(t_i^X) \in \Omega, y(t_i^X) > 0\} \\ & - P\{x(t_i^X + \tau_1) > 0 | x(t_i^X) \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Все аналогично для характеристики  $\gamma_{X \rightarrow Y}$ . Оценки безусловных и условных вероятностей и их доверительных интервалов можно получить аналогично п. 2.2 с несколько более громоздкими выкладками и итоговыми формулами. Для характеристики направленности связи, согласно этому подходу, будем использовать величину  $\delta = \gamma_{X \rightarrow Y} - \gamma_{Y \rightarrow X}$  с доверительным интервалом  $\delta \pm 2\sigma_\delta$ .

**3. Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим системы с детерминированной динамикой на „крыльях“ аттрактора (системы

<sup>1</sup> Под „опасной“ понимается такая область, откуда система в течение ближайшего будущего переключится в новое состояние или останется в прежнем, с вероятностью „50 на 50“.

<sup>2</sup> Термин „безусловная“ означает, что не учитывается текущее состояние второй системы.



**Рис. 2.** Доля правильных ( $T$ ) и ошибочных ( $F$ ) выводов о направлении воздействия оценок  $q$ ,  $q'$  и  $\delta$  для:  $a$  — связанных систем Лоренца (1) при  $R_1 = 39$ ,  $R_2 = 35$ ,  $b$  — при  $R_1 = 35$ ,  $R_2 = 39$ ;  $c$  — бистабильных связанных осцилляторов (2) при  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 0.8$ .

Лоренца). Модельные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,2} &= 10(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}), \\
 \dot{y}_{1,2} &= R_{1,2}x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}, \\
 \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2}y_{1,2} - \frac{8}{3}z_{1,2},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где величины  $\varepsilon_{1,2}$  характеризуют связь. В численных расчетах параметр  $\varepsilon_1 = 0$ .

Анализировался ансамбль из 500 временных рядов одинаковой длины, каждый из которых содержал 300–400 переключений. По каждому отдельному ряду рассчитывались все три оценки связанности и делались выводы о наличии воздействия систем друг на друга. Для всех оценок подсчитывались вероятности (точнее говоря, частоты) правильных

(True) и ошибочных (False) выводов о направлении связи. На рис. 2, *a* они показаны в зависимости от коэффициента  $\varepsilon = \varepsilon_2$  для  $R_1 = 39$ ,  $R_2 = 35$ . Наиболее чувствительными к слабой связи оказываются точечные оценки  $q$ : уровень в 80% правильных выводов достигается при  $\varepsilon \approx 2$ . Но они оказываются самыми ненадежными, так как при слабых связях дают частые ошибки: при  $\varepsilon = 1$  доля ошибочных выводов составляет 17.4%. Интервальные оценки  $q'$  обеспечивают вероятность ошибки не более 0.05 при любых  $\varepsilon$ . Платой является некоторое снижение чувствительности 80% правильных выводов наблюдается, начиная только с  $\varepsilon \approx 5$ . Еще менее чувствительна здесь оценка  $\delta$  (тоже обеспечивающая вероятность ошибок не более 0.05): 80% правильных выводов при  $\varepsilon \approx 7.5$ . Еще раз подчеркнем важность использования интервальных оценок: для несвязанных осцилляторов ( $\varepsilon = 0$ ) частоты ошибок для  $q$ ,  $q'$  и  $\delta$  равны 0.952, 0.048 и 0.050 соответственно.

Схожая ситуация наблюдается при изменении направленности взаимодействия (рис. 2, *b*) между теми же системами. Отметим трудность определения направленности очень сильной связи (в режиме, близком к синхронному). Так, при  $\varepsilon > 12$  число правильных выводов с помощью оценок  $q$  и  $q'$  становится равным нулю, а число ошибок — 100%. Оценка  $\delta$  тоже не дает правильных выводов при  $\varepsilon > 12$ , но, что интересно, не дает и ошибок: вероятность ошибки остается не более 0.07.

В качестве другого примера рассмотрим передемпфированные стохастические осцилляторы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - x^3 + \sqrt{2D} \xi_1 + \varepsilon_1(y - x), \\ \dot{y} &= \beta y - y^3 + \sqrt{2D} \xi_2 + \varepsilon_2(x - y), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{1,2}$  — коэффициенты, характеризующие связь,  $\xi_{1,2}$  — статистически независимые некоррелированные источники шума с интенсивностью  $D$ . Величины  $\alpha$ ,  $\beta$  характеризуют собственные частоты индуцированных шумом переключений. Эти системы не имеют детерминированной динамики на дне потенциальной ямы. Переключения между состояниями равновесия происходят за счет „динамического“ шума, присутствующего в системах. В аналогичных численных экспериментах мы принимали  $\varepsilon_1 = 0$ , интенсивность шума  $\sqrt{2D} = 0.4$ . Временные ряды содержали порядка 200–300 переключений.

Как и в предыдущем случае, наиболее чувствительна к слабой связи оценка  $q$ , которая дает и много ошибок: вероятность ошибок в случае несвязанных осцилляторов составляет 0.86, 0.044 и 0.05 для  $q$ ,  $q'$  и  $\delta$  соответственно (рис. 2, *c*). Из двух интервальных оценок более чувствительным оказывается метод анализа условных вероятностей — оценка  $\delta$  это проявляется только при  $\varepsilon > 0.1$ ): 80% правильных выводов достигается при  $\varepsilon \approx 0.12$  для  $\delta$ , а для  $q'$  имеет место лишь 35.4% при  $\varepsilon = 0.2$ . При обратном направлении связи результаты очень схожи с рис. 2, *a* (не показаны).

**4. Заключение.** В работе предложены интервальные оценки связности между системами с переключениями в случае сравнительно коротких временных рядов: модифицирован известный подход, основанный на анализе синхронизации событий, и предложен новый метод, основанный на анализе условных вероятностей переключений. Оба подхода позволяют контролировать статистическую значимость получаемых выводов. В численных экспериментах обнаружено, что в зависимости от ситуации более чувствительным к слабой связи может оказаться как один, так и другой подход. Таким образом, на практике целесообразно применять оба метода для получения более полной информации о взаимодействии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-02-16305) и программы „Basic Research and Higher Education“ (грант Y2-P-06-02 для молодых кандидатов наук).

## Список литературы

- [1] *Arnhold J., Lehnertz K., Grassberger P. et al. // Physica. D. 1999. V. 134. P. 419–430.*
- [2] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. N 10. P. 2291–2305.*
- [3] *Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.*
- [4] *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T. et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041903.*
- [5] *Smirnov D.A., Andrzejak R.G. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 036207.*
- [6] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. 368 с.*

- [7] *Anishchenko V.S., Silchenko A.N., Khovanov I.A.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 316–322.
- [8] *Сюсань У.* // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 8. С. 55–65.
- [9] *Quian Quiroga R., Kreuz T., Grassberger P.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 041904.
- [10] *Mormann F., Lehnertz K., David P.* et al. // Physica D. 2000. V. 144. P. 358–369.
- [11] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 045202.
- [12] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 046209.