

# ГЛОБАЛЬНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ В ПРИЛОЖЕНИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРАВЛЕНИЯ СВЯЗИ

В.И. Пономаренко<sup>1</sup>, Д.А. Смирнов<sup>1</sup>, М.Б. Бодров<sup>2</sup>, Б.П. Безручко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет

Предлагается методика использования глобальной реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений по временным рядам для определения направленности взаимодействия между подсистемами. Методика применяется в радиофизическом эксперименте на примере системы из двух нелинейных автогенераторов. Сопоставлены два подхода к определению направления взаимодействия: по коэффициентам модельных уравнений и по изменению качества модели при учете в ней взаимодействия.

## Введение

На современном этапе развития нелинейной динамики и использования ее методов наблюдается повышение внимания исследователей к моделированию ансамблей связанных объектов. В частности, актуальна задача определения направления взаимодействия между двумя объектами. Она имеет непосредственные приложения в физиологии (например, при изучении взаимодействия между дыхательной и сердечно-сосудистой системами человека [1,2]). В нашей работе предлагается и экспериментально апробируется на электронной системе вариант решения подобной задачи с помощью глобальной реконструкции уравнений по экспериментальным временным рядам. *Глобальная реконструкция*, при которой модельные уравнения записываются с помощью одной формулы, справедливой во всем фазовом пространстве, является одним из наиболее популярных подходов к эмпирическому моделированию (см. обзоры [3,4]).

Успешные результаты достигнуты при глобальном моделировании многих сложных реальных процессов (нелинейных электрических цепей [5,6], лазеров [7], волоконных оптических резонаторов [8], химических [9] и биологических [10] систем) с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако успех реконструкции отнюдь не гарантирован и более вероятен при априорном знании структуры модели, адекватной объекту моделирования. Работоспособная методика определения направления взаимодействия, основанная на использовании глобальной реконструкции по временным реализациям фаз наблюдаемых сигналов, была предложена в работе [11]. Она позволяет определять наличие слабой связи, но не применима для режима фазовой синхронизации. Мы предлагаем использовать глобальное моделирование непосредственно по наблюдаемым временными рядам. Для определения факта взаимодействия, его "силы" и направления мы реконструируем модели, в структуру которых заложены предположительные варианты связи, и используем в качестве критерия некоторый показатель качества моделей. Этот подход не претендует на выявление

очень слабой связи, но имеет самостоятельное значение, поскольку позволяет определить не только направление, но и характер связи, причем он работоспособен и для режимов фазовой синхронизации.

В разделе 1 излагаются основные этапы процедуры глобальной реконструкции и возможности ее применения для анализа связанных систем. В разделе 2 описана экспериментальная система, служащая объектом моделирования, и представлены результаты применения предлагаемого подхода. Выводы представлены в заключительном разделе. Некоторые сведения об экспериментальной системе вынесены в приложения А и В.

## 1. Процедура глобальной реконструкции и связанные системы

**1.1. Общая процедура.** Рассмотрим постановку и схему решения задачи построения модельных дифференциальных уравнений по временным рядам. Пусть имеется временной ряд - набор значений наблюдаемых величин, характеризующих данную систему и измеренных через равные промежутки времени. Обозначим его  $\{\mathbf{v}(t_i)\}_{i=1}^N$ , где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d)$  - вектор наблюдаемых величин. Если  $d = 1$ , то ряд называют скалярным, в этом случае будем обозначать наблюдаемую просто  $v$ ,  $t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t$ ,  $\Delta t$  - интервал выборки,  $N$  - длина ряда. Требуется построить модель, которая воспроизводила бы интересующие нас черты наблюдаемого процесса, в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_D(t))$  - вектор состояния модели,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_P)$  - вектор ее параметров, а наблюдаемые  $\mathbf{v}$  связаны функционально с вектором  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{f}$  - некоторая гладкая функция.

Наиболее распространенная схема решения этой задачи требует в общем случае:

- 1) задать структуру модели - количество уравнений  $D$ , вид функции  $\mathbf{F}$ , связь динамических переменных  $\mathbf{x}$  с наблюдаемыми  $\mathbf{v}$  (часто эта связь

достаточно проста - каждая наблюдаемая является одной из переменных модели);

2) получить по исходному временному ряду  $\{\mathbf{v}(t_i)\}_{i=1}^N$  ряды  $\{\mathbf{x}(t_i)\}_{i=1}^{N_0}$  и  $\{dx(t_i)/dt\}_{i=1}^{N_0}$ , где  $N_0$  - длина тренировочных (т.е. тех, по которым строится модель) временных рядов;

3) рассчитать значения параметров модели  $\mathbf{c}$ ;

4) сопоставить поведение модели с наблюдаемым процессом.

Возможность и сложность решения всей задачи во многом определяется наличием априорной информации об объекте моделирования; чем больше известно, тем лучше. Успех наиболее вероятен при использовании адекватных объекту структуры модельных уравнений (размерности модели и вида функций  $F$  и  $f$ ) и способа получения рядов динамических переменных по исходным экспериментальным данным. Источником информации о структуре могут быть физические соображения, вытекающие из фундаментальных законов природы ("первых принципов"), или более частные априорные сведения о системе. Если априорной информации нет, используют универсальные подходы, но это редко приводит к успеху. Поэтому, чтобы не усложнять стоящую перед нами задачу, мы сосредоточимся только на иллюстрации принципиальной возможности использования метода реконструкции для определения вида связи. Мы используем структуру уравнений, заведомо адекватно описывающих изолированные подсистемы<sup>1</sup>. А эксперимент организуем так, чтобы в качестве одной из наблюдаемых величин взять ту, которая непосредственно является одной из переменных модели. Так что шаги 1 и 2 описанной выше схемы оказываются, в значительной степени, успешно пройденными.

Если все  $D$  переменных в эксперименте из-

мерить трудно, и мы имеем случай  $d < D$  (что обычно и бывает; так, очень распространен случай скалярного временного ряда  $d = 1$ ), то необходимо по измеренному ряду получить каким-либо образом ряды недостающих переменных. Для этого, например, можно преобразовать уравнения (1) к эквивалентному виду<sup>2</sup>

$$d^D x / dt^D = F(x, dx/dt, \dots, d^{D-1}x/dt^{D-1}, \mathbf{c}), \quad (2)$$

где  $x$  - одна из переменных модели (1),  $F$  - некоторая новая функция, а в качестве координат вектора состояния модели (2) выступают последовательные производные величины  $x$ . Если наблюдаемая  $v$  соответствует переменной  $x$ , то остальные переменные можно получить по наблюдаемой реализации путем численного дифференцирования. Именно эта ситуация встречается в нашем экспериментальном примере (см. раздел 2), где мы с целью снижения влияния шумов при дифференцировании будем пользоваться следующим подходом (сглаживанием). Для нахождения значений  $x, dx/dt, \dots, d^D x / dt^D$  в момент времени  $t_i$  на временной реализации  $v(t)$  выделяется окно шириной  $m$  точек с центром в точке  $t_i$ , и  $v(t)$  аппроксимируется в этом окне с помощью сглаживающего полинома  $P(t - t_i) = a_0 + a_1(t - t_i) + \dots + a_L(t - t_i)^L$  порядка  $L \geq D$ . Искомые величины рассчитываются как  $x(t_i) = P(0)$ ,  $dx(t_i)/dt = dP/dt|_{t=t_i}, \dots, d^D x(t_i)/dt^D = d^D P/dt^D|_{t=t_i}$ . Параметры схемы численного дифференцирования  $m$  и  $L$  должны подбираться оптимальным для моделирования образом.

Задача определения параметров (шаг 3 схемы) решается чаще всего методом наименьших квадратов,<sup>3</sup> т.е. значения коэффициентов с минимизируют величину погрешности аппроксимации  $\varepsilon$ . Для модели (2) это условие суть

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} [d^D x(t_i) / dt^D - F(x(t_i), dx(t_i)/dt, \dots, d^{D-1}x(t_i)/dt^{D-1}, \mathbf{c})]^2 = \min \quad (3)$$

На последнем этапе (шаг 4) полученные уравнения численно интегрируются, сравниваются фазовые портреты объекта и модели, рассчитывается дальность прогноза с заданной точностью (скажем, ошибка прогноза не более 5 %) [14]. Могут сопоставляться с объектом и другие свойства модели, но для нас здесь будет достаточно упомянутых критериев.

<sup>1</sup> Для рассматриваемых далее электрических цепей это достигается использованием уравнений Кирхгофа.

<sup>2</sup> В общем случае любую систему уравнений (1) с достаточно гладкой правой частью можно привести к виду (2), но, возможно, ценой увеличения размерности: порядок получаемого дифференциального уравнения лежит в пределах от  $D$  до  $2D + 1$  [12]. Мы записали выражение (2) для частного случая, когда размерность не увеличилась, этого достаточно для рассматриваемых в данной работе экспериментальных примеров.

<sup>3</sup> В [13] рассмотрена возможность использования метода максимального правдоподобия для задачи реконструкции. Это целесообразно только при больших уровнях шума и очень малом числе неизвестных параметров.

**1.2. Варианты моделирования связанных систем.** Описанная процедура легко обобщается на случай моделирования двух (и более) объектов по временным рядам, полученным от каждого из них. Пусть имеется два временных ряда  $\{\mathbf{v}(t_i)\}_{i=1}^N$ ,  $\{\mathbf{v}'(t_i)\}_{i=1}^N$  от двух подсистем (штрихом здесь и далее отмечены величины, относящиеся ко

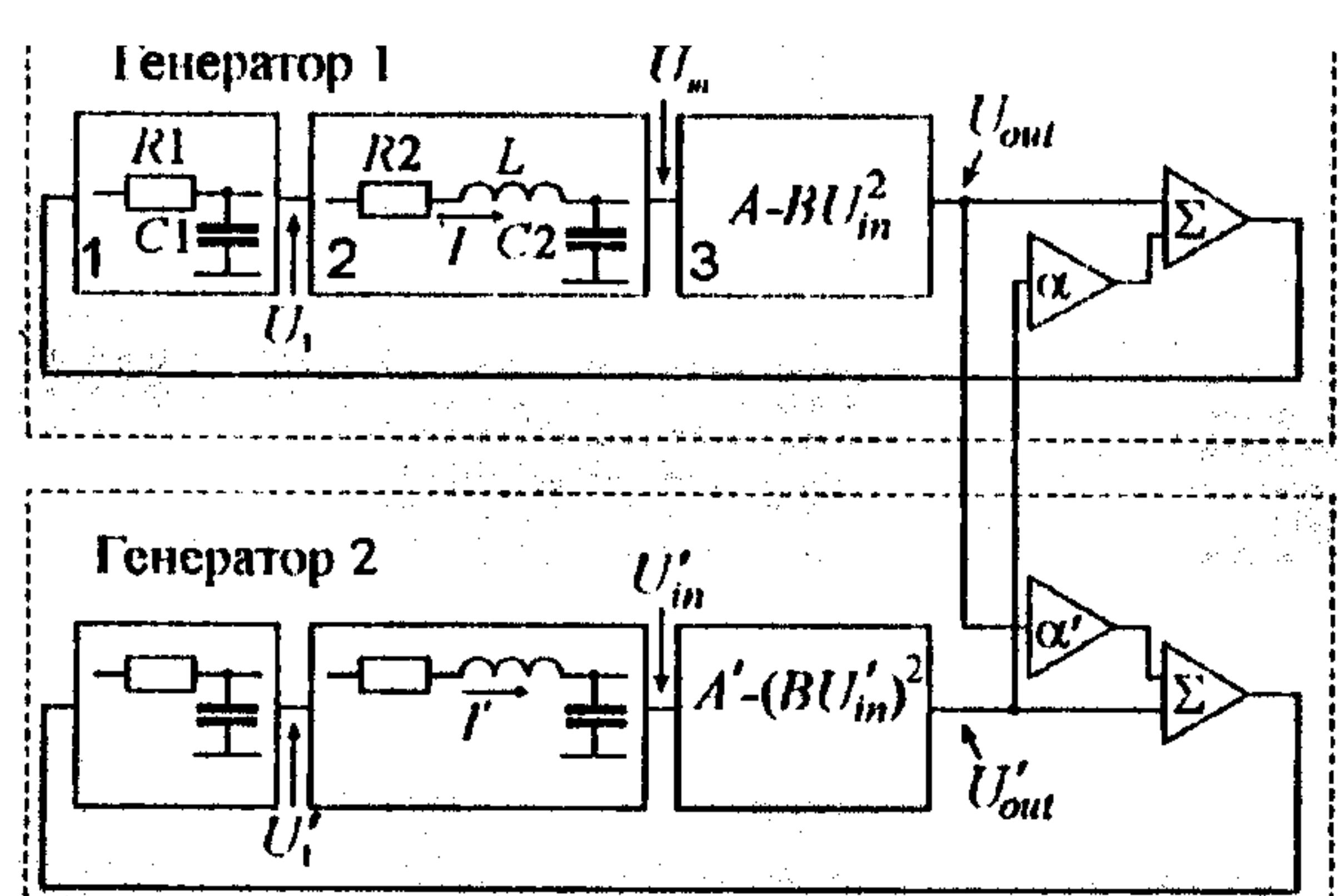


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки ( $R_1 = 1 \text{ к}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 0.022 \text{ мкФ}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ ,  $L = 6 \text{ мГн}$ ,  $B = 0.2 \text{ V}^{-1}$ ). Параметры генератора 2 такие же (с погрешностью не более 10 %).  $A$  и  $A'$  - параметры нелинейности генератора 1 и генератора 2, соответственно.  $\Sigma$  - суммирующие усилители,  $\alpha$  и  $\alpha'$  - коэффициенты связи

второй подсистеме). Поставим задачу - построить адекватную модель всей системы, и выяснить направление и характер связи между подсистемами. Будем строить модель вышеописанным способом в виде:

$$\begin{aligned} dx/dt &= F(x, c) + G(x, x', c), \\ dx'/dt &= F'(x', c') + G'(x', x, c'), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции  $G$  и  $G'$  описывают взаимодействие (связь) подсистем.

Если о механизме взаимодействия ничего неизвестно и правдоподобные гипотезы строить трудно, то функции связи можно искать в виде  $G_k(x, x') = P_{1,k}(x)x'_1 + P_{2,k}(x)x'_2 + P_{3,k}(x)x'_3 + P_{4,k}(x)x'^2_1 + \dots$ , где  $k = 1, \dots, D$ ,  $P_{i,k}$  - некоторые функции, например, полиномы (аналогично для  $G'_k$ ). В процессе моделирования полезно выбрасывать из исходной общей структуры модели лишние слагаемые, которые вносят в нее только искажения (см., например, [14]). В итоге, получив наилучшую модель, следует изучить структуру полученных функций: остались ли слагаемые с переменными второй подсистемы в уравнениях для первой подсистемы, и наоборот, какие именно из этих слагаемых остались. Основываясь на этой информации, можно попытаться сделать выводы о механизмах связи, реализующихся в исследуемой системе, в частности, о направлении взаимодействия. Вопросов, связанных с выбрасыванием лишних слагаемых в данной работе мы коснемся кратко. Более подробно они будут изложены в другой публикации.

Подробно здесь будет проиллюстрирована только относительно простая ситуация, которая, тем не менее, часто может встретиться на практике.

Это случай, когда известно (из априорных соображений), какие способы взаимодействия вероятны. При этом структуру модели можно выбирать не в общем виде (с полиномами от многих переменных и т.п.), а в виде, соответствующем предположительному механизму связи. Строя модели со структурами, соответствующими различным видам связи, нужно выбрать из них наилучшую. Если эта модель "хорошо" описывает объект, то в исследуемой ситуации реализовался соответствующий ей вид связи. Например, можно представить случай, когда при известном возможном виде связи требуется выбрать одну из гипотез: нет связи, связь односторонняя, связь двунаправленная. Тогда в результате моделирования мы получим вывод о направлении связи. О силе взаимодействия можно будет судить по коэффициентам полученной модели.

## 2. Пример применения методики

**2.1. Описание экспериментальной системы (объекта моделирования).** В эксперименте была исследована система двух автогенераторов с хаотическим поведением (рис. 1), подобных описанному в [15] с возможностью двунаправленной, односторонней и пулевой связи. Автогенераторы построены по одинаковой схеме и содержат RC-фильтр низких частот первого порядка (элемент 1 на рис. 1), RLC-фильтр (колебательный контур 2) и нелинейный элемент 3, замкнутые в кольцо. Для осуществления взаимодействия в схемы генераторов введены суммирующие усилители  $\Sigma$ . Усилители с регулируемыми коэффициентами усиления  $\alpha$  и  $\alpha'$  служат для регулировки "силы" взаимодействия.

Нелинейный элемент с квадратичной передаточной характеристикой вида  $U_{out} = A - B \cdot U_{in}^2$  включает в себя электронный умножитель (для проведения операции возведения в квадрат) и суммирующий усилитель, добавляющий с нужным знаком параметр  $A$  к выходному сигналу умножителя. Здесь  $U_{out}$  - напряжение на выходе нелинейного элемента (в вольтах),  $U_{in}$  - напряжение на входе нелинейного элемента,  $B = 0.2 \text{ V}^{-1}$  - размерный коэффициент, определяемый параметрами используемого электронного умножителя. Параметр  $A$  использовался в качестве управляющего. В качестве наблюдаемых величин выступали  $U_{in}$  и  $U'_{in}$ , которые измерялись при помощи 12-битного аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки 1 МГц (что составляет около 100 отсчетов на характеристическом периоде колебаний) и записывались в память компьютера.

При вариации параметра  $A$  в каждом из генераторов наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Были исследованы случаи несвязанных генераторов  $\alpha = \alpha' = 0$  и одностороннего воздействия генератора 2 на генератор 1 ( $\alpha \neq 0, \alpha' = 0$ ).

Таблица

Значения параметров и типы динамических режимов  
для рассматриваемых экспериментов

№ № эксп.	Параметры				Режим
	$A, V$	$A', V$	$\alpha$	$\alpha'$	
1	4.8	3.8	0	0	Цикл периода 1
2	4.8	3.8	0.05	0	1-й генератор, 2-й генератор - 1-цикл
3	4.8	3.8	0.9	0	1-й генератор - 2-цикл, 2-й генератор - 1-цикл
4	4.8	5.8	0.1	0	Хаос в обоих генераторах
5	4.8	5.8	0	0	1-й генератор - 1-цикл, 2-й генератор - хаос
6	8.8	7.4	0	0	Хаос в обоих генераторах
7	8.8	7.4	0.1	0	Хаос в обоих генераторах

В таблицу сведены параметры для семи исследованных типичных случаев<sup>4</sup>. В графе режим указан вид динамического режима, идентифицированный путем восстановления фазовых орбит системы по наблюдаемым рядам.

**2.2. Определение направления связи по временным рядам.** Из законов Кирхгофа (как показано в приложениях), можно получить модель системы генераторов в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для того чтобы не затенять главного - выяснения характера связи, мы сначала упростим задачу, опираясь при эмпирическом моделировании на эту информацию (ситуация 1), а затем покажем, как обойтись без нее (ситуация 2).

**Ситуация 1.** Будем считать, что вид связи нам известен - он дается уравнениями (B2), а неизвестны только значения параметров  $\alpha$  и  $\alpha'$ , т.е. неизвестно направление и сила взаимодействия. Будем придерживаться следующей методики исследования. Зафиксируем некоторые значения  $t$ ,  $L$ ,  $N$  (воспользуемся типичными "хорошими" значениями  $t$  и  $L$ :  $t = 82$ ,  $L = 7$ ,  $N = 5000$ , см. приложение Б) и будем для каждого из семи приведенных в таблице экспериментов строить модели трех видов: *модель без связи*

$$\begin{aligned} d^3x/dt^3 &= c_1 d^2x/dt^2 + c_2 dx/dt + c_3 - c_4 x + c_5 x^2, \\ d^3x'/dt^3 &= c'_1 d^2x'/dt^2 + c'_2 dx'/dt + c'_3 + c'_4 x' + c'_5 x'^2, \end{aligned} \quad (5)$$

*модель с односторонней связью* (второй действует на первый  $2 \rightarrow 1$ ),

$$\begin{aligned} d^3x/dt^3 &= c_1 d^2x/dt^2 + c_2 dx/dt + c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + \\ &+ c_6 x' + c_7 x'^2, \\ d^3x'/dt^3 &= c'_1 d^2x'/dt^2 + c'_2 dx'/dt + c'_3 + c'_4 x' + c'_5 x'^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где за возможное влияние второго генератора на первый отвечают коэффициенты  $c_6$  и  $c_7$ ,

*модель с двунаправленной связью*

$$\begin{aligned} d^3x/dt^3 &= c_1 d^2x/dt^2 + c_2 dx/dt + c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + \\ &+ c_6 x' - c_7 x'^2, \\ d^3x'/dt^3 &= c'_1 d^2x'/dt^2 + c'_2 dx'/dt + c'_3 + c'_4 x' + \\ &+ c'_5 x'^2 - c'_6 x + c'_7 x^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где за возможное влияние первого генератора на второй отвечают коэффициенты  $c'_6$  и  $c'_7$ .

Будем следить, насколько улучшает результаты моделирования учет связи, т.е. насколько лучше сходство фазовых портретов, меньшая погрешность аппроксимации  $\varepsilon$  и большая дальность прогноза при использовании структуры модели (6) вместо (5) и (7) вместо (6). *Если улучшение есть, то взаимодействие имеет место в реальной системе, и его учет существен*. Можно сделать также вывод о его направлении:

- если модель (7) лучше, чем (5) и (6), то связь двунаправленная;
- если модель (6) лучше, чем (5), и не хуже, чем (7), то взаимодействие вида  $2 \rightarrow 1$ ;
- если модель (5) не хуже, чем (6) и (7), то связи нет.

В рассматриваемой в качестве примера экспериментальной системе реализована только односторонняя связь, поэтому мы ожидаем, что во всех семи случаях модель (7) не будет иметь преимуществ.

Из моделей (6) и (7), построенных по временным рядам, можно определить величины, соответствующие параметрам связи:  $\alpha = c_7/c_5$ ,  $\alpha' = c'_7/c'_5$  (см. приложение В). При определении направления связи по коэффициентам моделей (7) оно будет идентифицировано как  $2 \rightarrow 1$ , если  $|\alpha/\alpha'| > 1$ , и наоборот. Мы сравним также, какой из способов определения направления связи надежнее - по качеству разных моделей или по коэффициентам моделей (7).

<sup>4</sup> В данной работе, как видно из таблицы, мы представляем результаты только для варианта односторонней связи. Для двунаправленной связи методика исследования полностью аналогична.



Рис. 2: Проекции фазовых орбит: а - экспериментальная (эксперимент 3), б - модель (6), в - модель (7). Единицы измерения - произвольные

Результаты проиллюстрируем на примере эксперимента 3 (режим фазовой синхронизации). На рис. 2 представлены фазовые орбиты моделей и объекта для этого случая. Здесь только учет связи позволяет адекватно описать поведение объекта. Аналогичное сравнение было проведено для всех экспериментов. В экспериментах 1, 5 и 6 связь не проявляется, орбиты модели (5) выглядят так же, как экспериментальные; нигде не видно преимущества моделей (6) и (7) над моделью (5). Таким образом, из анализа фазовых портретов можно грубо заключить, что в экспериментах 1, 5, 6 связи нет. В экспериментах 2, 3, 4, 7 идентифицируется связь  $2 \rightarrow 1$ . Это соответствует ожидаемым результатам, но анализ довольно субъективен и выводы делаются не очень уверенно (особенно в экспериментах 1, 2, 4). Рассмотрим количественные показатели.

На рис. 3 приведены погрешности аппроксимации  $\epsilon$  уравнений каждого из двух генераторов без учета связи (кружки) и с учетом связи (ромбиками).

ки). Как видно, для генератора 1 в экспериментах 2-4, 7 учет связи приводит к существенному уменьшению  $\epsilon$  (ромбики расположены ниже кружков), в эксперименте 1 - к очень слабому; для генератора 2 в экспериментах 1, 3, 4 - к очень слабому, в остальных - вовсе не дает уменьшения. Так что в экспериментах 2-4, 7 взаимодействие вида  $2 \rightarrow 1$ , в 1, 5, 6 взаимодействия нет. Это подтверждает и уточняет выводы, сделанные ранее по виду фазовых орбит. Точно такие же выводы следуют и из анализа дальности прогноза моделей с учетом и без учета связи (рис. 4). (На рис. 4а отсутствуют точки для экспериментов 1 и 5, на рис. 4б - для экспериментов 1-3. Это периодические режимы и достигаемые дальности прогноза для них около 30000 отсчетов, что неудобно показывать в данном масштабе. В этих случаях результаты таковы: для первого генератора введение связи в модель не увеличивает дальность прогноза, а для второго даже снижает ее.)

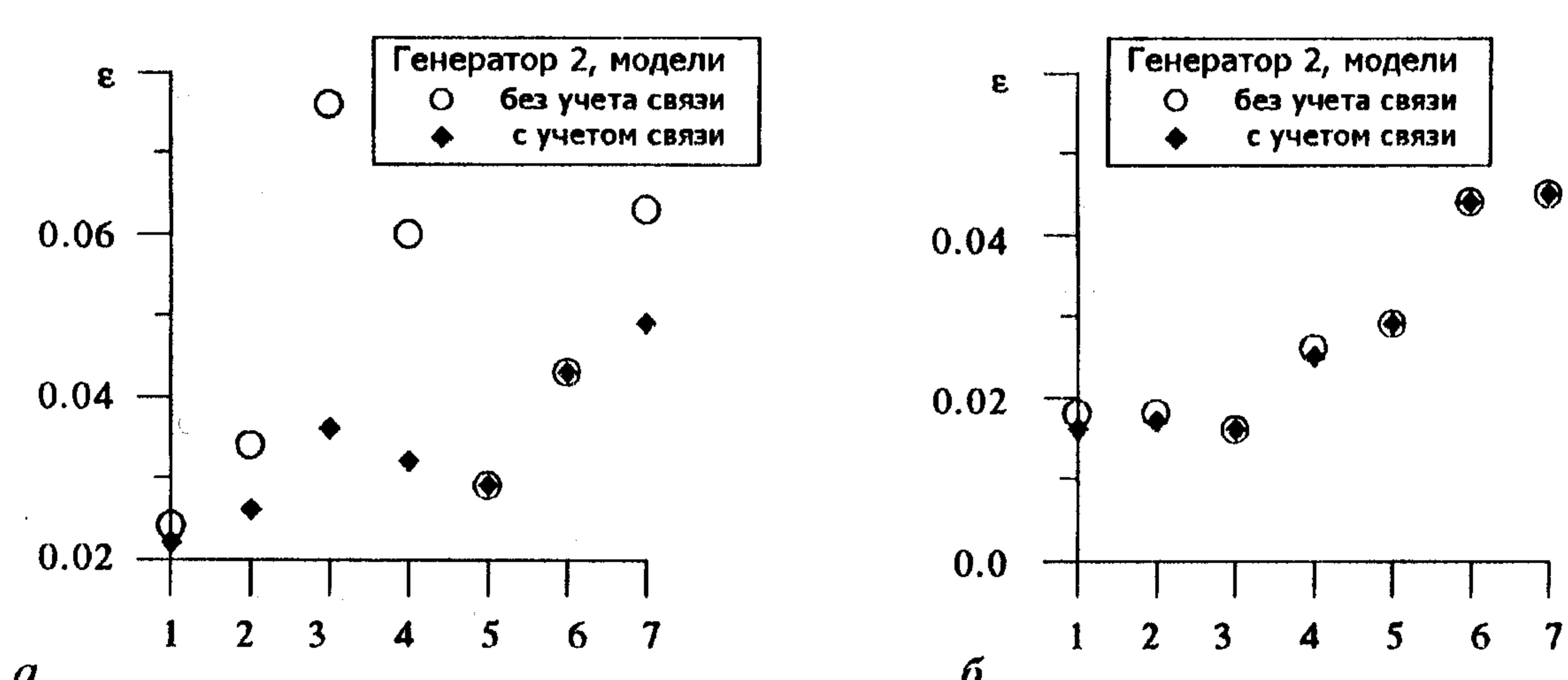


Рис. 3: Погрешности аппроксимации уравнений первого (а) и второго (б) генераторов в зависимости от номера эксперимента (см. табл.)

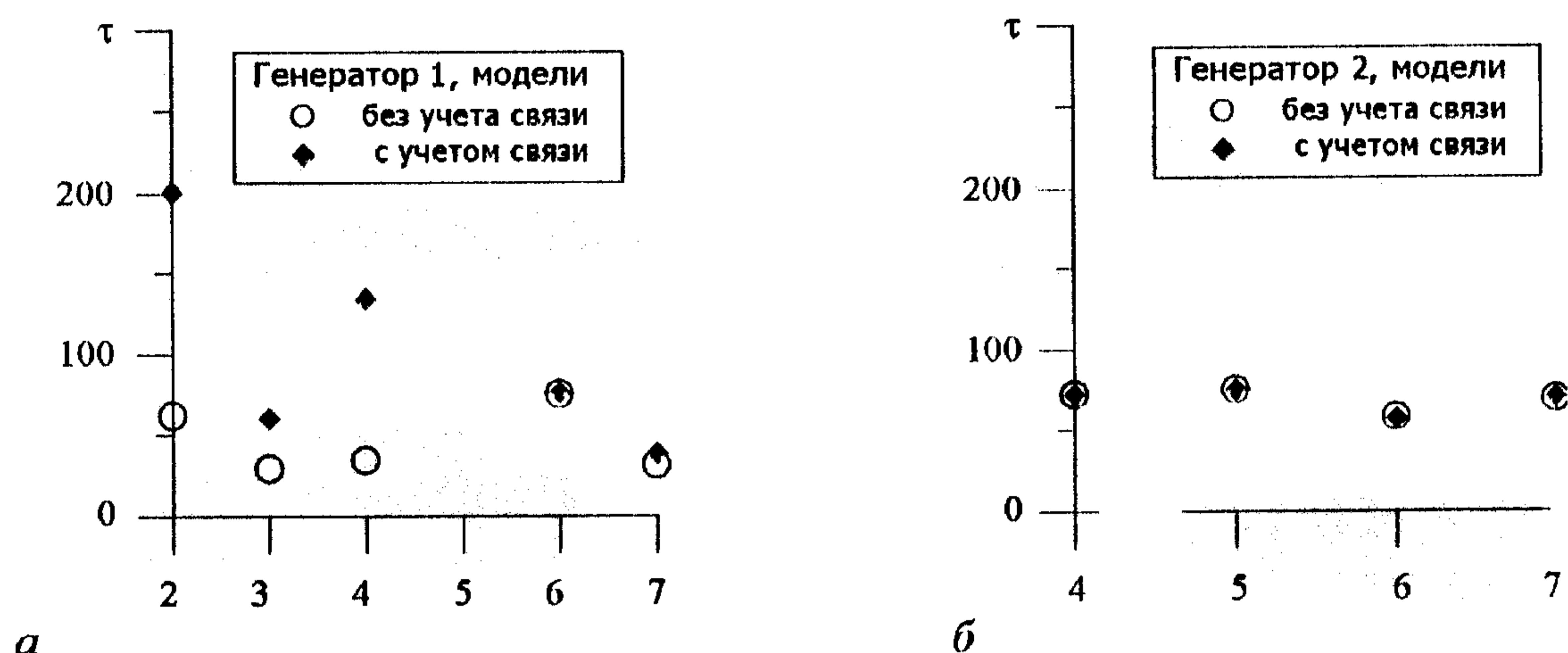


Рис. 4. Дальности прогноза первого (а) и второго (б) генераторов в единицах числа отсчетов в зависимости от номера эксперимента

Интенсивность взаимодействия может быть определена еще и из анализа коэффициентов моделей (7). На рис. 5а представлены восстановленные по временным рядам параметры связи. Такой анализ позволяет оценить интенсивность взаимодействия и различить между собой количественно ситуации 2-4, 7 (т.е. определить, в каком из этих случаев связь сильнее). На рис. 5б квадратами показано направление связи, определенное по коэффициентам. Этот подход дает несколько заниженное значение величины  $\alpha$  и завышенное для  $\alpha'$ , т.е. является менее надежным. Он верно показывает направление взаимодействия только в случаях достаточно сильной связи (эксперименты 3 и 7). Так, согласно его результатам, для случаев слабой связи оказывается, что практически всегда

имеется и обратное влияние первого генератора на второй, но это не соответствует реальной ситуации и не проявляется в поведении моделей. По всей вероятности, причина меньшей эффективности этого подхода состоит в том, что структура моделей (5), (6) и (7) не в точности соответствует динамике объекта (см. п. 3.2.Б). Определение направления связи по качеству моделей (рис. 5б, треугольники) проводится надежно во всех случаях.

**Ситуация 2.** Можно ли обойтись без полной информации о виде уравнения отдельного осциллятора? Да, можно. Предположим, нам не известно, что вид связи может быть довольно точно описан с помощью двух слагаемых - постоянного и квадратичного (B2). Тогда можно строить модель

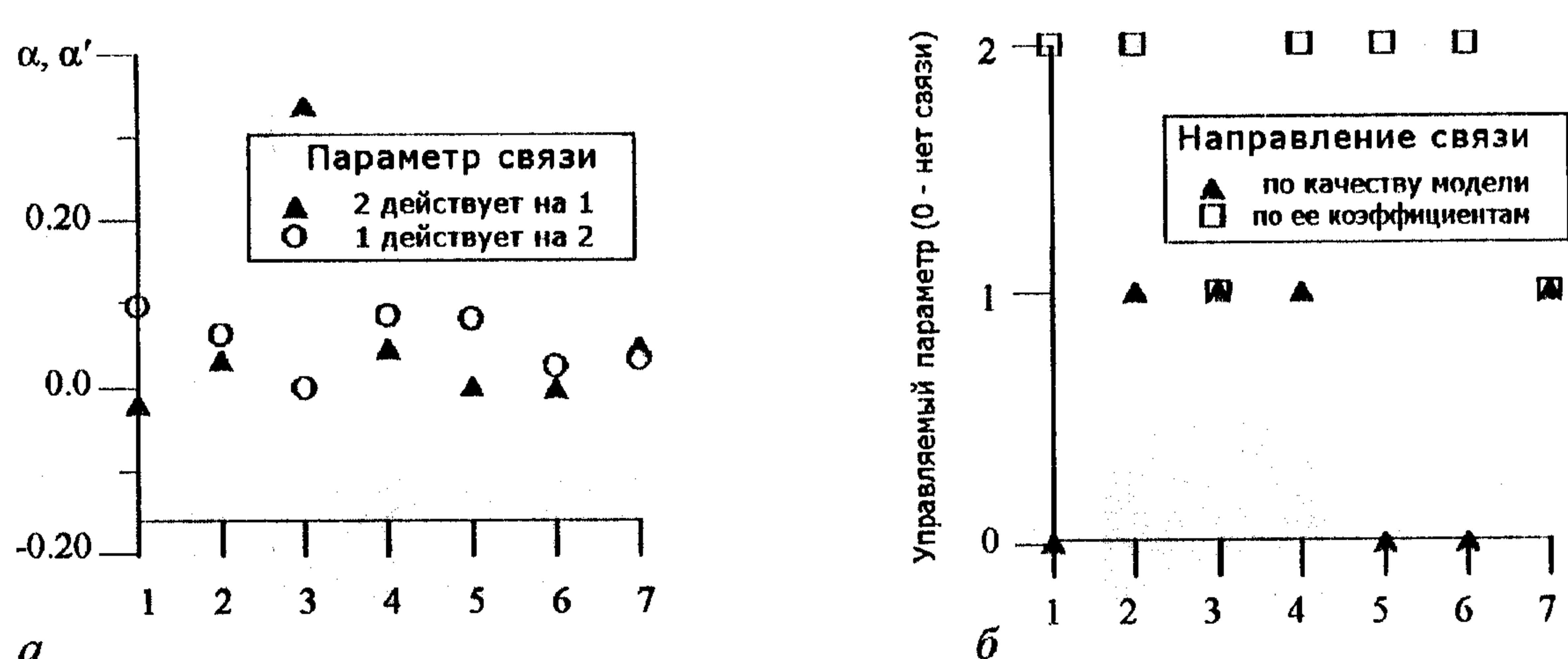


Рис. 5. а) Параметры связи в эмпирических моделях. б) Направление связи, определенное по работоспособности моделей (5), (6) и (7) и по коэффициентам модели (7)

с функциями общего вида в правой части:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = P \left( x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, x', \frac{dx'}{dt}, \frac{d^2x'}{dt^2} \right), \quad (8)$$

$$\frac{d^3x'}{dt^3} = P' \left( x', \frac{dx'}{dt}, \frac{d^2x'}{dt^2}, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \right),$$

где  $x = U_{in}$ ,  $x' = U'_{in}$ ,  $P, P'$  - полиномы от шести переменных. Как уже было сказано в разделе 1.2, в процессе моделирования нужно исключать лишние слагаемые [13]. В итоге можно прийти к оптимальной структуре модели и, может быть, даже догадаться по ней, как реализуется связь в экспериментальной системе.

Мы провели такие исследования. Для эксперимента 3 (режим фазовой синхронизации) мы строили модель (8) с полиномами 2-го порядка по 10 последовательным участкам экспериментального временного ряда длиной  $N = 5000$  точек каждый. При переходе от одного участка к другому меняются значения коэффициентов модели, но те коэффициенты, которые стоят при "цужных" слагаемых меняются мало (такие коэффициенты называют "надежными"). Лишние слагаемые можно выявить по сильно изменяющимся коэффициентам. В качестве меры надежности коэффициента использовалось отношение его среднего (по всем участкам ряда) значения к его стандартному отклонению [13]. Из модели следует исключать слагаемые, соответствующие наименее надежным коэффициентам, пока такое исключение будет приводить к улучшению ее качества. Исходные полиномы модели (8) содержат 28 слагаемых каждый, и такая громоздкая модель имеет расходящиеся траектории. В полиномах легко выявляется много лишних слагаемых: 14 в первом полиноме и 17 во втором (для них мера надежности  $\sim 0.1 - 5.0$ , тогда как для остальных  $\sim 10 - 40$ ). После исключения выявленных лишних слагаемых модель вполне адекватно описывает наблюдаемый процесс (ее атTRACTOR примерно такой же как приведенный на рис. 2в). Однако в итоговой модели остаются слагаемые, не имеющие аналогов в теоретической модели (B2), это  $x \cdot dx/dt$ ,  $x' \cdot d^2x/dt^2$  и несколько дру-

гих. Возможно, их наличие связано со свойствами системы, неучтанными в теоретической модели (нелинейность индуктивности и т.д.), а возможно с тем, что использованная процедура поиска линий слагаемых недостаточно "изощренная", чтобы распознать их все. Можно попытаться использовать более тонкие способы формирования структуры модели (избавления от лишних слагаемых), например, аналогичные [17,18]. Но в данной работе мы ограничимся приведенными результатами, которые уже показывают принципиальную возможность оптимизации структуры модели и использования ее для выяснения характера связи. В любом случае, исключение слагаемых типа  $x \cdot dx/dt$  и  $x' \cdot d^2x/dt^2$  из модели не сильно меняет ее свойства, так что вполне можно пользоваться для описания системы и структурой модели (B2), как это было сделано в п. 2.1.

## Выводы

Для определения направления и величины связи между исследуемыми системами возможно использование методики глобальной реконструкции по временным рядам, если преодолеть обычные для реализации процедуры реконструкции технические сложности. Например, когда имеется достаточно подробная информация о механизме функционирования каждой из подсистем. Направление связи может быть определено по качеству моделей, а в случае сильной связи и по их коэффициентам.

В отличие от известной методики [11] предлагаемый подход пригоден и в том случае, когда системы находятся в режиме фазовой синхронизации (см. эксперимент 3, рис. 2). Кроме того, он может использоваться для выяснения не только направления и величины связи, но и всего ее характера, т.е. того механизма, посредством которого осуществляется взаимодействие между подсистемами. Для этого нужно перебирать различные варианты введения связи в модель (4) и отыскать тот, который обеспечивает наилучшее описание, или проводить процедуры оптимизации исходной общей структуры модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17578) и Министерства образования РФ (грант № Е02-3.5-523), а также гранта Президента РФ для молодых российских ученых № МК-1067.2004.2 (Д.А. Смирнов).

## Приложения

### А. Теоретическая модель отдельного генератора

Из "первых принципов" - законов Кирхгофа - можно получить априори следующую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, моделирующих отдельный

генератор:

$$\begin{aligned} C_1 dU_1/dt &= (U_{out} - U_1)/R_1, \\ C_2 dU_{in}/dt &= I, \\ L dI/dt &= U_1 - U_{in} - R_2 I. \end{aligned} \quad (A1)$$

Все переменные, входящие в модель, показаны на рис. 1. Поскольку в эксперименте измеряется значение только одной величины  $U_{in}$ , то и модель (A1) желательно переписать в терминах этой переменной, например, через  $U_{in}$  и ее производные. Проводя алгебраические преобразования, можно привести уравнения (A1) к эквивалентному виду:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{R_2}{L} \right) \frac{d^2x}{dt^2} - \quad (A2)$$

$$\frac{1}{LC_2} \left( 1 + \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{A - x - Bx^2}{R_1 C_1}$$

где через  $x$  обозначена величина  $U_{in}$

### Б. Моделирование отдельного генератора по временным рядам

Продемонстрируем, что модель вида (A2) действительно достаточно точно описывает генератор<sup>5</sup>. Для этого будем реконструировать, по временной реализации величины  $U_{in}$  отдельного генератора, уравнения в виде, соответствующем (A2):

$$\frac{d^3x}{dt^3} = c_1 \frac{d^2x}{dt^2} + c_2 \frac{dx}{dt} + c_3 + c_4 x + c_5 x^2. \quad (B1)$$

В качестве реализаций отдельных генераторов использовались временные ряды генератора 1 в экспериментах 1, 5 и 6 (см.табл.), и генератора 2 - во всех. Для построения модели было подобрано удовлетворительное значение длины тренировочного ряда  $N = 5000$ , которое использовалось во всех случаях. Для каждого случая отдельно подбирались параметры схемы дифференцирования  $m$  и  $L$ , от которых существенно зависит качество моделей. Если обобщить результаты всех экспериментов, то в типичном случае хорошую модель удается получить примерно при  $m = 82$ ,  $L = 7$ .

Во всех упомянутых случаях были получены адекватные модели, достаточно хорошо количественно и качественно воспроизводящие как периодические, так и хаотические временные ряды. Для иллюстрации приведем только один пример - моделирование по хаотическому ряду генератора 2 ( $A' = 5.8V$ , эксперимент 4). Уже при  $m = 25$ ,  $L = 3$

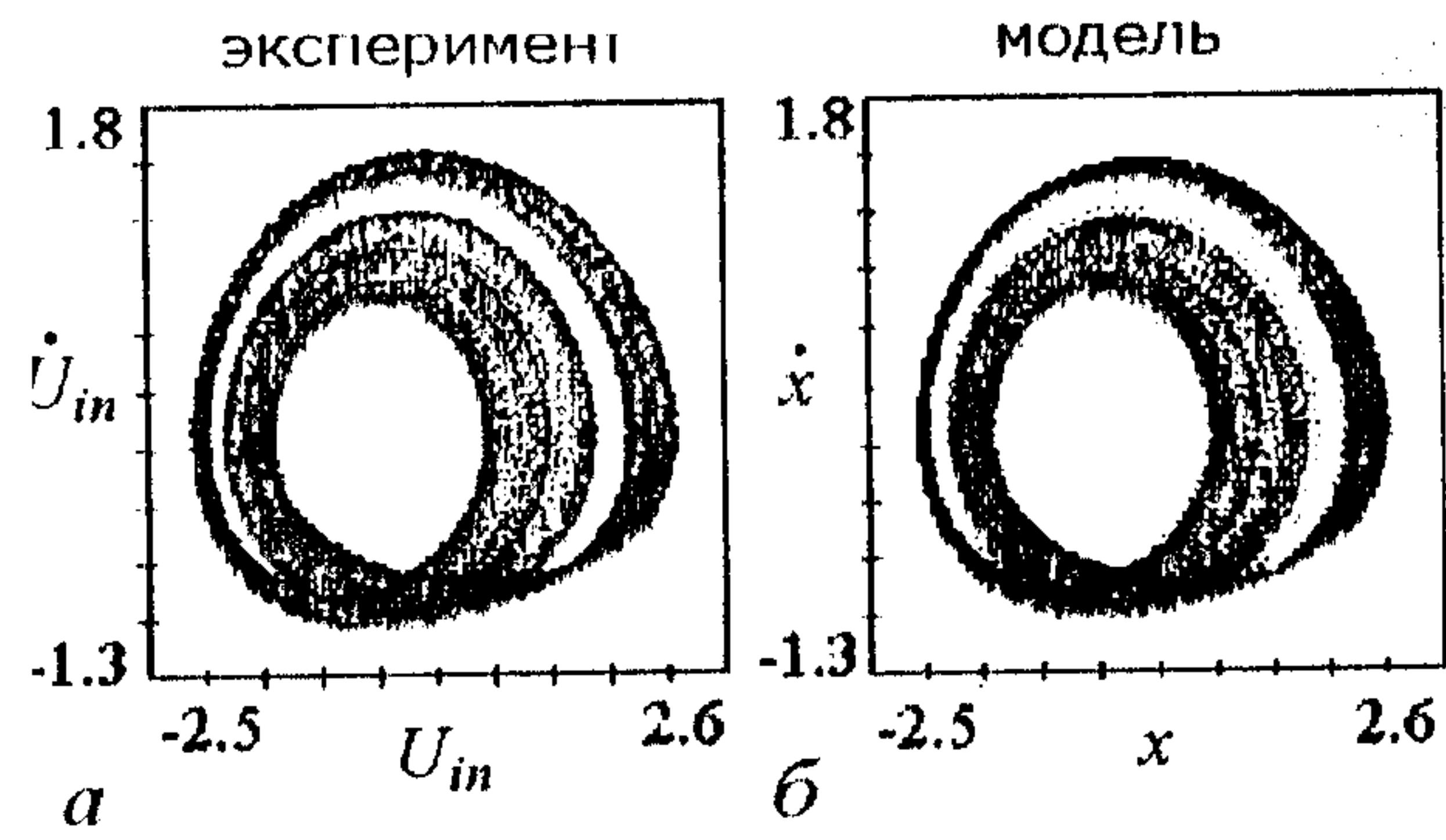


Рис. 6. Проекции экспериментальных и модельных фазовых орбит для изолированных генераторов (генератор 2, эксперимент 4). Единицы измерения - произвольные

получена модель, очень точно воспроизводящая структуру аттрактора (рис. 6). Но она дает прогноз только на  $0.25T$  вперед (где  $T$  - характерный период колебаний). Наибольшая дальность прогноза была достигнута при  $m = 90$ ,  $L = 9$ , но оказалась равной только  $1.0T$ , что неудивительно для хаотического режима из-за его чувствительности к начальным условиям

### В. Теоретическая модель системы из двух генераторов

Модель системы генераторов, полученная из законов Кирхгофа, имеет вид

$$C_1 dU_1/dt = (U_{out} - U_1 - \alpha U'_{out})/R_1,$$

$$C_2 dU_{in}/dt = I,$$

$$L dI/dt = U_1 - U_{in} - R_2 I,$$

$$C'_1 dU'_1/dt = (U'_{out} - U'_1 - \alpha' U_{out})/R'_1,$$

$$C'_2 dU'_{in}/dt = I',$$

$$L' dI'/dt = U'_1 - U'_{in} - R'_2 I',$$

где по сравнению с (A1) добавились слагаемые  $\alpha U'_{out}$  и  $\alpha' U_{out}$ , отражающие связь между генераторами. Ее также удобно переписать в виде, содержащем только переменные  $U_{in}$ ,  $U'_{in}$  и их производные:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{R_2}{L} \right) \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{LC_2} \left( 1 + \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{A - x - Bx^2}{R_1 C_1} + \frac{\alpha (A' - x'^2)}{R_1 C_1}$$

$$\frac{d^3x'}{dt^3} = - \left( \frac{1}{R'_1 C'_1} + \frac{R'_2}{L'} \right) \frac{d^2x'}{dt^2} - \frac{1}{L'C'_2} \left( 1 + \frac{R'_2 C'_2}{R'_1 C'_1} \right) \frac{dx'}{dt} + \frac{A' - x' - B'x'^2}{R'_1 C'_1} + \frac{\alpha' (A - x^2)}{R'_1 C'_1}$$

<sup>5</sup>Это утверждение не тривиально, поскольку нелинейный элемент описывается квадратичной функцией только приближенно (погрешность должна быть порядка 1 %); катушка индуктивности, которая описана в модели с помощью константы  $L$ , выполнена на ферритовом сердечнике, что должно приводить при больших амплитудах к проявлению ее нелинейных свойств и т.д.

где  $x = U_{in}$ ,  $x' = U'_{in}$ , сила связи между подсистемами определяется значениями коэффициентов  $\alpha$  и  $\alpha'$ , которые менялись от эксперимента к эксперименту (см. табл.). На структуру (B2) удобно опираться при эмпирическом моделировании. Для определения направления и силы связи можно реконструировать модель по временному ряду в виде, соответствующем (B2) и "извлечь" из ее

коэффициентов значение параметров  $\alpha$  и  $\alpha'$ , ответственных за взаимодействие. Например, значение  $\alpha$  можно рассчитать по коэффициентам уравнения для первой подсистемы, поделив коэффициент при слагаемом  $x'^2$  на коэффициент при слагаемом  $x^2$ . Аналогично определяется  $\alpha'$  по коэффициентам уравнения для второго генератора<sup>6</sup>.

### Библиографический список

1. Павлов А.Н., Янов Н.Б., Анищенко В.С. // Радиотехника и электроника, 1999. Т. 44, № 9. С. 1075-1092.
2. Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 2000. Т. 8, № 1. С. 29-51.
3. Timmer J., Rust H., Horbelt W., et al // Phys. Lett. A, 2000, V. 274. P. 123-130.
4. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. // Phys. Rev. E, 2001, V. 63. 016207.
5. Horbelt W., Timmer J., Bunner M. J., et al // Phys. Rev. E, 2001, V. 64, 016222.
6. Voss H.U., Schwache A., Kurths J., et al // Phys. Lett. A, 1999, Vol. 256, P. 47-54.
7. Letellier C., Maquet J., Labro H., et al // J. Phys. Chem., 1998, V. 102. P. 10265-10273.
8. Timmer J. // Chaos, 1998, V. 8, No. 7. P. 1505-1516.
9. Mrowka R., Patzak A., Rosenblum M. // Int. J. Bif. Chaos, 2000, Vol.10, No.11. P.2479-2488.
10. Rosenblum M.G., Sirovici L., Bezerianos A. al // Phys. Rev. E, 2002, V. 65, 041909.
11. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G. // Phys. Rev. E, 2001, V. 64, 045202(R).
12. Takens F. // Lecture Notes in Mathematics, 1981. V. 898. P. 366-381.
13. McSharry P.E. and Smith L.A. // Phys. Rev. Lett 1999, V. 83, No. 21. P. 4285-4288.
14. Bezruchko B., Dikanov T., Smirnov D., Physical Review E, 2001, vol. 64, 036210.
15. Кравцов Ю.А. // В сб. Пределы предсказуемости. М.: ЦентрКом, 1997. С. 170-200.
16. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике, М.: Наука, 1989. 280 с.
17. Aguirre L.A., Freitas U.S., Letellier C. et al Physica D, 2001, V. 158. P. 1-18.
18. M. Small, K. Judd, A. Mees // Phys. Rev. E, 2001, V. 65, 046704.

*Статья поступила 2 марта 2004 г.*

## GLOBAL RECONSTRUCTION OF EQUATIONS FROM TIME SERIES IN APPLICATION TO DETERMINATION OF COUPLING DIRECTION

V.I. Ponomarenko<sup>1</sup>, D.A. Smirnov<sup>1</sup>, M.B. Bodrov<sup>2</sup>, B.P. Bezruchko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov Department of the Institute of Radio Engineering & Electronics of RAS,  
<sup>2</sup>Saratov State University

We propose a technique of employing global reconstruction of ordinary differential equations from time series for determination of direction of interaction between subsystems. The technique is applied in radiophysical experiment with the system of two nonlinear generators. We compare two approaches to determination of coupling direction: from the coefficients of model equations and from variation of model quality after allowing for interaction in its structure.

<sup>6</sup>Определение параметра связи через отношение двух указанных коэффициентов модели особенно удобно по следующим техническим причинам, связанным с процедурой измерений. В экспериментах с помощью АЦП измерялись не значения напряжений  $U_{in}$  и  $U'_{in}$  непосредственно, а величины  $x = a + U_{in}/b$  и  $x' = a' + U'_{in}/b'$ . Такое введение сдвига и масштабирования нужно для эффективного использования динамического диапазона АЦП. Коэффициенты сдвига и масштабирования мы специально не измеряли, чтобы не усложнять экспериментальную установку. Но это не является препятствием для применения методик, так как на поведении полученных эмпирических моделей такое преобразование переменных никак не отражается. Оно проявляется только в перенормировке коэффициентов моделей, по используемая величина, рассчитанная через отношение коэффициентов, также не меняется при этой перенормировке. Так что знание коэффициентов сдвига и масштабирования оказывается не нужным.