

01;09

Восстановление уравнений связанных систем с запаздыванием по временным рядам

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 29 июля 2004 г.

Предложен метод восстановления модельных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом для связанных систем с запаздыванием по их временным рядам. Метод позволяет определить наличие связи между системами с запаздыванием, а также тип связи, ее величину и направление. Эффективность метода продемонстрирована на экспериментальных временных рядах связанных генераторов с запаздывающей обратной связью.

1. Задача восстановления нелинейных динамических моделей систем с запаздывающей обратной связью по их хаотическим временным рядам привлекает к себе в последние годы большое внимание [1–7]. Актуальность данной задачи обусловлена широким распространением систем с запаздыванием в природе [8]. Обычно эти системы, поведение которых определяется не только текущим состоянием, но и состояниями в предыдущие моменты времени, моделируются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии, физиологии и химии.

В ряде практически важных задач типичной является ситуация, когда системы с запаздыванием взаимодействуют между собой. Например, связанные системы с запаздыванием используются при описании динамики взаимодействующих популяций [9–11] и при моделировании процессов в сердечно-сосудистой системе человека [12,13], их применение является перспективным в системах скрытой передачи информации [14], в том числе на основе лазеров с оптической обратной связью [15–17]. Однако проблема реконструкции модельных уравнений связанных систем с запаздыванием по временным рядам до сих пор остается практически не исследованной. В данной работе мы

предлагаем метод, позволяющий восстановить связанные системы с запаздыванием, определить априорно неизвестный способ их связи и найти значения коэффициентов связи.

2. Рассмотрим системы с запаздыванием X_1 и X_2 , описываемые в отсутствие связи дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2})), \quad (1)$$

где $\tau_{1,2}$ — времена запаздывания, $f_{1,2}$ — нелинейные функции, $\varepsilon_{1,2}$ — параметры, характеризующие инерционные свойства систем, индексы 1 и 2 указывают на принадлежность параметров и переменных к системам X_1 и X_2 соответственно. В общем случае уравнение (1) является математической моделью колебательной системы, известной в радиофизике как генератор с запаздывающей обратной связью [18], представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного, инерционного и задержки.

Системы с запаздыванием X_1 и X_2 могут быть связаны между собой различными способами. Выделим три способа связи, при которых переменная $x_1(t)$ системы X_1 вводится с коэффициентом k_1 в одну из трех точек кольцевой системы X_2 , обозначенных на рис. 1 арабскими цифрами 1–3. Аналогичным образом переменную $x_2(t)$ системы X_2 можно ввести с коэффициентом k_2 в кольцевую систему X_1 в различных ее точках, на рис. 1 обозначенных римскими цифрами I–III. В случае, когда способы воздействия X_1 на X_2 и X_2 на X_1 совпадают, динамика связанных систем описывается одним из следующих уравнений:

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t - \tau_{1,2})), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2}) + k_{2,1}x_{2,1}(t)), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{1,2}\dot{x}_{1,2}(t) = -x_{1,2}(t) + f_{1,2}(x_{1,2}(t - \tau_{1,2})) + k_{2,1}x_{2,1}(t). \quad (4)$$

Уравнение (2) описывает способ связи, который будем обозначать I/I, при котором первая система с запаздыванием воздействует на вторую в точке I, а вторая система воздействует на первую в точке I. Уравнения (3) и (4) описывают связанные системы для способов связи 2/II и 3/III соответственно. При отличающихся способах воздействия систем X_1 и X_2 друг на друга они описываются разными уравнениями. Например, при способе связи I/II система X_1 описывается уравнением (3), а система X_2 — уравнением (2).

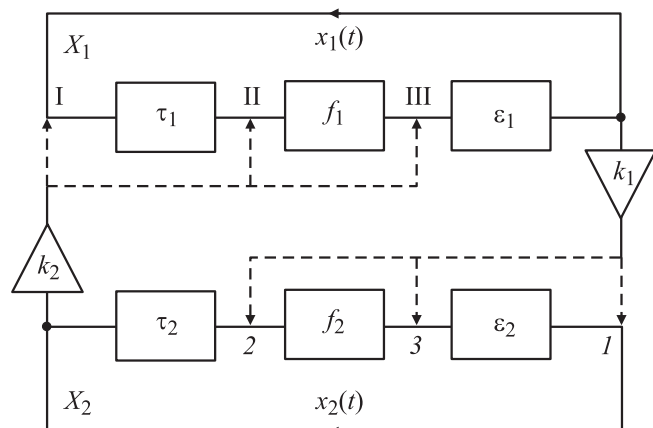


Рис. 1. Блок-схема связанных систем с запаздыванием X_1 и X_2 . Элементы, обозначенные τ_1 и τ_2 , f_1 и f_2 , ε_1 и ε_2 , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний, а элементы k_1 и k_2 определяют величину связи систем X_1 и X_2 друг с другом. 1–3 — точки, в которых система X_1 воздействует на систему X_2 ; I–III — точки, в которых X_2 воздействует на X_1 .

3. Проведем сначала восстановление системы X_1 , т.е. определим параметры τ_1 , ε_1 , k_2 и найдем функцию f_1 . Для восстановления по наблюдаемой реализации $x_1(t)$ времени задержки τ_1 воспользуемся методом, предложенным нами в работе [5], в которой было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на τ_1 . Тогда для нахождения τ_1 нужно выделить экстремумы в исходной реализации, а затем для различных значений времени τ определить число N пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на τ , и построить зависимость $N(\tau)$. Значению времени запаздывания τ_1 соответствует положение абсолютного минимума $N(\tau)$. Исследования показывают, что этот метод определения времени задержки может быть успешно применен и в том случае, если на систему X_1 действует система X_2 , при условии, что это воздействие не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов во временной реализации колебаний системы X_1 .

Для определения параметра ε_1 и функции f_1 системы X_1 , а также коэффициента связи k_2 мы предлагаем метод, использующий временные реализации обеих наблюдаемых переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Предположим сначала, что нам известен способ воздействия X_2 на X_1 , т.е. известна структура уравнения, описывающего динамику системы с запаздыванием X_1 . В качестве примера рассмотрим случай, описываемый уравнением (2), при котором переменная системы X_2 вводится в кольцо обратной связи системы X_1 перед элементом, обеспечивающим задержку (точка I на рис. 1). Запишем уравнение (2) для системы X_1 в виде

$$\varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t) = f_1(x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1)). \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что если построить на плоскости множество точек с координатами $(x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1), \varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t))$, то оно воспроизведет функцию f_1 . Поскольку заранее величины ε_1 и k_2 неизвестны, будем строить зависимости $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t)$ от $x_1(t - \tau_1) + k x_2(t - \tau_1)$ для различных значений ε и k , добиваясь однозначной зависимости на плоскости $(x_1(t - \tau_1) + k x_2(t - \tau_1), \varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t))$, которая возможна лишь при $\varepsilon = \varepsilon_1, k = k_2$. В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске ε_1 и k_2 будем использовать минимальную длину линии $L(\varepsilon, k)$, соединяющей точки на этой плоскости, упорядоченные по величине абсциссы. Минимум $L_{\min}(\varepsilon, k)$ будет наблюдаться при $\varepsilon = \varepsilon_1, k = k_2$, а построенная при этих значениях зависимость $\varepsilon_1 \dot{x}_1(t) + x_1(t)$ от $x_1(t - \tau_1) + k_2 x_2(t - \tau_1)$ воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. Предлагаемый подход использует все точки временных рядов, что позволяет по коротким реализациям восстанавливать параметры и нелинейную функцию.

Аналогичным образом можно восстановить нелинейную функцию f_1 и параметры ε_1 и k_2 системы X_1 , описываемой уравнением (3) или (4), строя соответственно зависимости $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t)$ от $x_1(t - \tau_1) + k x_2(t)$ и $\varepsilon \dot{x}_1(t) + x_1(t) - k x_2(t)$ от $x_1(t - \tau_1)$ для различных значений ε и k . Если нам априорно не известно, в какой именно точке, I, II или III, осуществляется воздействие X_2 на X_1 , нужно провести реконструкцию каждого из трех модельных уравнений (2)–(4) системы X_1 и определить для каждого из трех случаев $L_{\min}(\varepsilon, k)$. Однозначность восстановленной нелинейной функции может наблюдаться только при правильном выборе модельного уравнения. Следовательно, правильному выбору модели будет соответствовать наиболее

низкое из трех полученных значений $L_{\min}(\varepsilon, k)$. Таким образом, метод позволяет не только восстановить по временным рядам параметры связанных систем с запаздыванием, но и определить вид модельного уравнения.

Восстановление системы с запаздыванием X_2 по временным рядам переменных $x_2(t)$ и $x_1(t)$ проводится аналогично. Метод позволяет восстановить параметры τ_2 , ε_2 и нелинейную функцию f_2 системы X_2 , а также определить коэффициент связи k_1 и способ воздействия X_1 на X_2 .

4. Мы применили метод к экспериментальным временным рядам связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. При схематическом представлении таких связанных кольцевых генераторов в виде рис. 1 запаздывание сигнала $x_1(t)$ на время τ_1 , а сигнала $x_2(t)$ на время τ_2 обеспечивается соответствующей линией задержки; роль нелинейного элемента в каждом из генераторов выполняет усилитель с передаточной характеристикой f_1 или f_2 ; инерционность определяется фильтром, параметры которого задают величину ε_1 или ε_2 , а связь осуществляется с помощью суммирующих усилителей, обеспечивающих коэффициент передачи k_1 или k_2 . Способ связи генераторов соответствовал случаю I/III согласно нашей классификации. В случае, когда инерционным элементом является низкочастотный RC-фильтр первого порядка, такие генераторы описываются в отсутствие связи уравнением

$$R_{1,2}C_{1,2}\dot{V}_{1,2}(t) = -V_{1,2}(t) + f_{1,2}(V_{1,2}(t - \tau_{1,2})), \quad (6)$$

где $V_{1,2}(t)$ и $V_{1,2}(t - \tau_{1,2})$ — напряжения на входе и выходе линии задержки, $R_{1,2}$ и $C_{1,2}$ — сопротивления и емкости элементов фильтров в первом и втором генераторе. Уравнение (6) имеет вид (1) с $\varepsilon_{1,2} = R_{1,2}C_{1,2}$.

С помощью аналого-цифрового преобразователя мы записывали сигналы $V_1(t)$ и $V_2(t)$ на входе линий задержки с частотой выборки 10 kHz при $\tau_1 = 23$ ms, $\tau_2 = 31.7$ ms, $R_1C_1 = 0.48$ ms, $R_2C_2 = 1.01$ ms, $k_1 = -0.1$, $k_2 = 0.1$. Фрагменты временных реализаций этих сигналов приведены на рис. 2, *a* и *b*. Подсчитав число N одновременных обращений в нуль $\dot{V}_1(t)$ и $\dot{V}_1(t - \tau)$ для различных значений τ , перебираемых с шагом, равным периоду выборки точек $T_s = 0.1$ ms, построим зависимость $N(\tau)$ (рис. 2, *c*). Для оценки производной $\dot{V}_1(t)$ по временному ряду мы использовали локальную параболическую

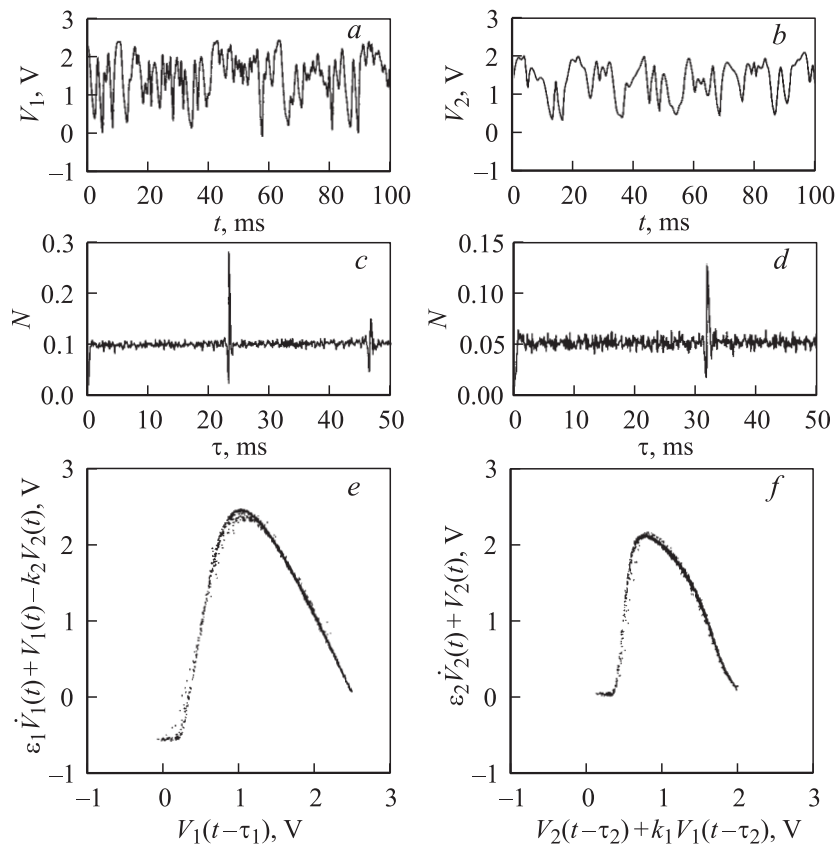


Рис. 2. Восстановление связанных генераторов с запаздывающей обратной связью, связанных способом I/III. Экспериментальные временные реализации первого (a) и второго (b) генераторов. Число N пар экстремумов во временной реализации генератора X_1 (c) и генератора X_2 (d) на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов. Восстановленная нелинейная функция f_1 при $\tau_1 = 23.0$ ms, $\varepsilon_1 = 0.46$ ms и $k_2 = 0.10$ (e). Восстановленная нелинейная функция f_2 при $\tau_2 = 31.7$ ms, $\varepsilon_2 = 1.06$ ms и $k_1 = -0.10$ (f).

аппроксимацию. Абсолютный минимум $N(\tau)$ наблюдается для первого генератора при $\tau = 23.0$ ms (рис. 2, c) и при $\tau = 31.7$ ms для второго генератора (рис. 2, d).

При реконструкции генератора X_1 в виде уравнения (4) зависимость $L(\varepsilon, k)$, построенная при шаге изменения ε , равном 0.01 ms, и шаге изменения k , равном 0.01, демонстрирует минимум при $\varepsilon = 0.46$ ms и $k = 0.10$, т.е. позволяет получить близкую оценку параметров ε_1 и k_2 . Восстановленная нелинейная функция (рис. 2, *e*) хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой f_1 нелинейного элемента первого генератора.

Минимум зависимости $L(\varepsilon, k)$, построенной при реконструкции системы X_2 в виде уравнения (2), наблюдается при $\varepsilon = 1.06$ ms и $k = -0.10$, достаточно близких к истинным значениям ε_2 и k_1 . На рис. 2, *f* приведена восстановленная нелинейная функция f_2 .

5. Итак, нами предложен метод восстановления связанных систем с запаздыванием по хаотическим временным рядам, который позволяет восстановить времена запаздывания, параметры инерционности, нелинейные функции и коэффициенты связи связанных систем с запаздыванием даже в случаях, когда способ связи этих систем априорно неизвестен. В этом случае процедура реконструкции позволяет дополнительно установить, каким именно образом системы с запаздыванием связаны между собой. В отличие от других методов определения связи между системами по временным рядам [19–21] предложенная нами процедура позволяет определять величину связи, а не только ее направление.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03–02–17593, CRDF, Award No. REC–006 и INTAS, грант № 03–55–920.

Список литературы

- [1] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [2] *Voss H., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [3] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [4] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // Eur. Phys. J. D. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [5] *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056216.
- [6] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [7] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L.* et al. // Phys. Lett. A. 2003. V. 308. P. 54–60.

- [8] *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [9] *Kuang Y.* Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
- [10] *Bocharov G.A., Rihan F.A.* // J. Comp. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
- [11] *Song Y., Han M., Peng Y.* // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V. 22. P. 1139–1148.
- [12] *Seidel H., Herzel H.* // Physica D. 1998. V. 115. P. 145–160.
- [13] *Kotani K., Takamasu K., Ashkenazy Y.* et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 051923.
- [14] *Mensour B., Longtin A.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. N 1–3. P. 59–70.
- [15] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Rhodes W.T.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 1892–1895.
- [16] *Koryukin I.V., Mandel P.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 026201.
- [17] *Shahverdiev E.M., Sivaprakasam S., Shore K.A.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 017206.
- [18] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
- [19] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 045202.
- [20] *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A.* et al. // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041909.
- [21] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 046209.