

01;09

Метод оценки параметров одномерных отображений по хаотическим временным рядам

© Д.А. Смирнов, В.С. Власкин, В.И. Пономаренко

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 2 сентября 2004 г.

Рассматривается задача построения модельных отображений по хаотическим временным рядам. Для случая одномерных отображений предложен новый метод оценки параметров модели, основанный на использовании метода наименьших квадратов (МНК) и расчете целевой функции с помощью итерирования модельного отображения в обратном времени. В численном эксперименте показано, что новый метод дает значительно более точные оценки, чем традиционный подход, при умеренных уровнях шума, меньших некоторого порога. Чем больше число оцениваемых параметров, тем выше этот порог, т.е. шире область большей эффективности нового метода.

1. Введение. Кроме своего фундаментального значения, методы построения математической модели процесса по временному ряду (конечному набору значений наблюдаемой величины η_1, \dots, η_N , измеренных в последовательные моменты времени) находят многочисленные приложения: от расчета характеристик нелинейных элементов электрических цепей [1] до описания биохимических процессов в клетках [2]. Задача моделирования по временным рядам известна под именами „идентификации систем“ [3] и „реконструкции динамических систем“ [4,5]. В настоящее время подходы к ее решению развиваются в рамках нелинейной динамики [1,2,6], причем очень распространено использование отображений [7–9], поскольку отображения даже низкой размерности могут описывать сложную динамику многих реальных систем. Так, отображение Пуанкаре сильно диссипативных нелинейных потоковых систем часто с высокой точностью одномерно (например, системы Лоренца и Ресслера [10]).

Данная работа посвящена этому специальному случаю задачи моделирования — оценке параметров одномерного отображения. Эта задача рассматривалась в ряде работ [11–15], где были предложены различные методы оценки. Теоретически чем длиннее временной ряд (больше N), тем больше возможностей для получения очень точных оценок параметров, но в случае хаотических режимов известные методы сталкиваются с существенными практическими трудностями. В работе предлагается новый метод, который дает более точные оценки по длинным хаотическим рядам (при не слишком высоких уровнях шума). Он основан на идее, связанной с итерированием отображения в обратном времени, которая ранее при обработке временных рядов предлагалась для нелинейной фильтрации шума [16] и разделения суммы хаотических сигналов на составляющие [17].

2. Постановка задачи и известный метод. Объект — одномерное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, \mathbf{a}), \quad (1)$$

где x — динамическая переменная, \mathbf{a} — вектор параметров размерности P . Временной ряд генерируется отображением (1) в хаотическом режиме при значениях параметров $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)}$ и начальном условии $x_1 = x_1^{(0)}$. Он зашумлен — $\eta_n = x_n + \xi_n$, где ξ_n — последовательность независимых случайных величин, распределенных по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_ξ^2 . Вид функции f известен, неизвестны значения $\mathbf{a}^{(0)}$ и $x_1^{(0)}$. Необходимо получить как можно более точные оценки параметров $\hat{\mathbf{a}}$.

Теоретически наиболее эффективен вариант МНК, согласно которому отыскиваются x_1 и \mathbf{a} , при которых реализация отображения (1) ближе всего к наблюдаемому ряду, т. е. минимизируется целевая функция

$$S(x_1, \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{N-1} (\eta_{n+1} - f^{(n)}(x_1, \mathbf{a}))^2, \quad (2)$$

где $f^{(n)}$ — n -я итерация отображения f , $f^{(0)}(x, \mathbf{a}) \equiv x$.¹ Но эта эффективность имеет место при условии, что удастся найти глобальный минимум (2).

¹ Причина эффективности МНК в том, что он совпадает с методом максимального правдоподобия при нормальном шуме ξ . Но и при других распределениях шума МНК дает достаточно точные оценки, что показывает численный эксперимент, результаты здесь не приводятся.

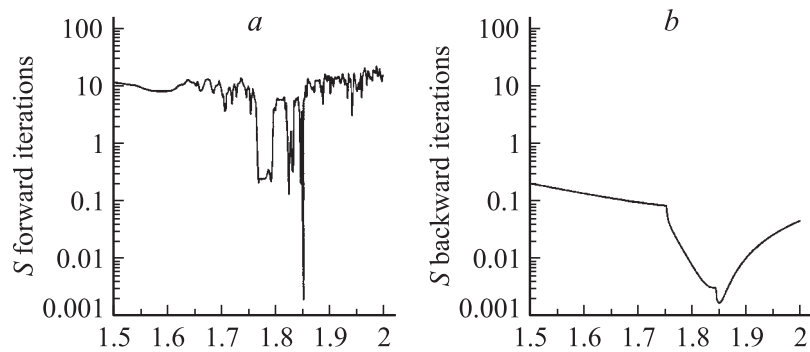


Рис. 1. Целевые функции для квадратичного отображения (4) при $N = 20$, $a^{(0)} = 1.85$, $x_1^{(0)} = 0.3$ (x_1 для итераций в прямом времени (a) и x_N для итераций в обратном времени (b) приняты равными истинным значениям $x_1 = x_1^{(0)}$ и $x_N = x_N^{(0)}$): слева — функция (2), справа — функция (3).

Практически минимизация проводится с помощью итерационных методов [18], согласно которым выбираются стартовые догадки для искоемых величин x_1 , a и по шагам происходит „спуск“ в минимум. Для длинных хаотических рядов найти глобальный минимум целевой функции (2) становится практически невозможно, так как она имеет множество локальных минимумов [15] (для ряда очень умеренной длины иллюстрация приведена на рис. 1, слева). Стартовые догадки определяют, какой из минимумов будет найден.

Обычно пробуют большое число M стартовых догадок и выбирают наиболее глубокий из найденных минимумов. Догадки берутся из некоторой области, в которой предположительно должны находиться истинные значения оцениваемых величин. Например, часто используется параллелепипед с осями длины Δ_x по начальному условию и Δ_i по параметрам a_i (назовем Δ_x и Δ_i интервалами стартовой неопределенности). Но для длинного хаотического ряда найти глобальный минимум можно только при астрономически большом M или очень малых Δ_x и Δ_i , что практически не реально. Приемлемый подход состоит в том, что фиксируются некоторые практически „разумные“ значения M , Δ_x , Δ_i , а исходный ряд делится на сегменты длины L , для каждого из которых удается найти глобальный минимум (2) за разумное

время. Итоговую оценку получают как эмпирическое среднее оценок, полученных по отдельным сегментам, обозначим ее $\hat{\mathbf{a}}_f$ (от английского „forward“ — прямо). Оценки по каждому из коротких сегментов могут быть сильно смещенными, тогда итоговая оценка тоже смещена. Причем ее смещение не устраняется при увеличении длины исходного ряда N . Увеличивать же L бесполезно, так как не удастся найти глобальный минимум (2). Это принципиальное ограничение описанного известного метода.

3. Новый метод. Мы предлагаем использовать МНК в сочетании с итерированием модельного отображения в обратном времени, т.е. минимизацию целевой функции:

$$S(x_N, \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{N-1} (\eta_{N-n} - f^{(-n)}(x_N, \mathbf{a}))^2, \quad (3)$$

где $f^{(-n)}$ — n -я итерация отображения (1) в обратном времени. При обращении времени ляпуновский показатель становится отрицательным и чувствительность траектории отображения к начальному условию пропадает. Поэтому локальных минимумов у целевой функции (3) можно ожидать немного (рис. 1).² Минимизация (3) также должна проводиться численно при некоторых M, Δ_x, Δ_t , но метод не чувствителен к этим величинам, как показывает численный эксперимент. Поэтому мы используем ниже $M = 1$, а Δ_x, Δ_t — такие же, как для $\hat{\mathbf{a}}_f$.

Поскольку хаотический режим может демонстрироваться только немонотонным одномерным отображением, то здесь обязательно возникает проблема неоднозначности обратного отображения, т.е. при итерациях в обратном времени нужно решать вопрос, какой из корней уравнения $x_{n+1} - f(x, \mathbf{a}) = 0$ брать в качестве x_n (x_{n+1} — значение переменной, полученное на предыдущей итерации в обратном времени). Мы берем корень, который ближе всего к соответствующему значению наблюдаемой η_n . Итоговую оценку обозначим $\hat{\mathbf{a}}_b$ (от английского „backward“ — обратно).

4. Численный эксперимент. Погрешность оценки одного параметра \hat{a} обычно определяется в математической статистике как

² Применимость нового метода ограничивается именно одномерными отображениями, так как для многомерной диссипативной системы траектория в обратном времени еще более чувствительна к параметрам и целевая функция (3) имеет много локальных минимумов.

средний квадрат ее отклонения от истинного значения, обозначим ее $\varepsilon = \langle (\hat{a} - a^{(0)})^2 \rangle$, где угловые скобки означают математическое ожидание. В случае оценивания нескольких параметров ($P > 1$) обозначим ε_i — погрешность оценки \hat{a}_i , а ε — суммарную погрешность $\varepsilon = \sum_{i=1}^P \varepsilon_i$.

В численных экспериментах путем усреднения по ансамблю из 1000 временных рядов (при фиксированных $\mathbf{a}^{(0)}$, $x_1^{(0)}$, N , σ_ξ^2) рассчитывались погрешности ε для оценок $\hat{\mathbf{a}}_f$ и $\hat{\mathbf{a}}_b$. Для минимизации целевых функций (2) и (3) использовался квази-Ньютоновский метод.³ Стартовые догадки генерировались как случайные величины, равномерно распределенные в соответствующем интервале стартовой неопределенности.

Оценивание одного параметра. В качестве тестового объекта была выбрана эталонная хаотическая система — квадратичное отображение

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2, \quad (4)$$

при $a = a^{(0)} = 1.85$ и начальном условии $x_1 = x_1^{(0)} = 0.3$ (значения те же, что в [11–13,15]). Длина ряда была принята равной $N = 100$. Для расчета \hat{a}_f фиксировалось $M = 10$ и интервалы неопределенности $[\eta_n - 0.1, \eta_n + 0.1]$ по начальному условию x_n на сегменте и $[1.5, 2.0]$ по a .⁴ Выбор длины L по отдельному временному ряду является сложной задачей [15], которой мы здесь не касаемся. Мы заранее нашли по ансамблю рядов такую длину L , которая дает минимальную погрешность ε (это $L = 10$, рис. 2, *a*).

Погрешности этой наилучшей оценки \hat{a}_f и новой оценки \hat{a}_b сопоставляются на рис. 2, *b*. Новый метод дает более точную оценку при шумах до порогового значения $\sigma_{\xi,thr}^2 \approx 0.019$.⁵ Причем расчет

³ Использование методов негладкой оптимизации, которые несколько более эффективны для быстро осциллирующих целевых функций, приводит здесь к тем же результатам, как показали наши эксперименты.

⁴ Величина M ограничена временем расчетов, а интервалы неопределенности — отсутствием априорной информации. Огромное увеличение M может несколько улучшить оценки, поскольку позволит увеличить длину сегмента L , но качественно выводы работы останутся те же.

⁵ Для ориентировки на практике выразим пороговый уровень шума как отношение шум/сигнал (по среднеквадратичному отклонению) в процентах. Дисперсия „чистого“ сигнала системы (4) равна 0.38. Таким образом, дисперсия шума 0.01 соответствует отношению шум/сигнал 16%, это весьма значительный шум.

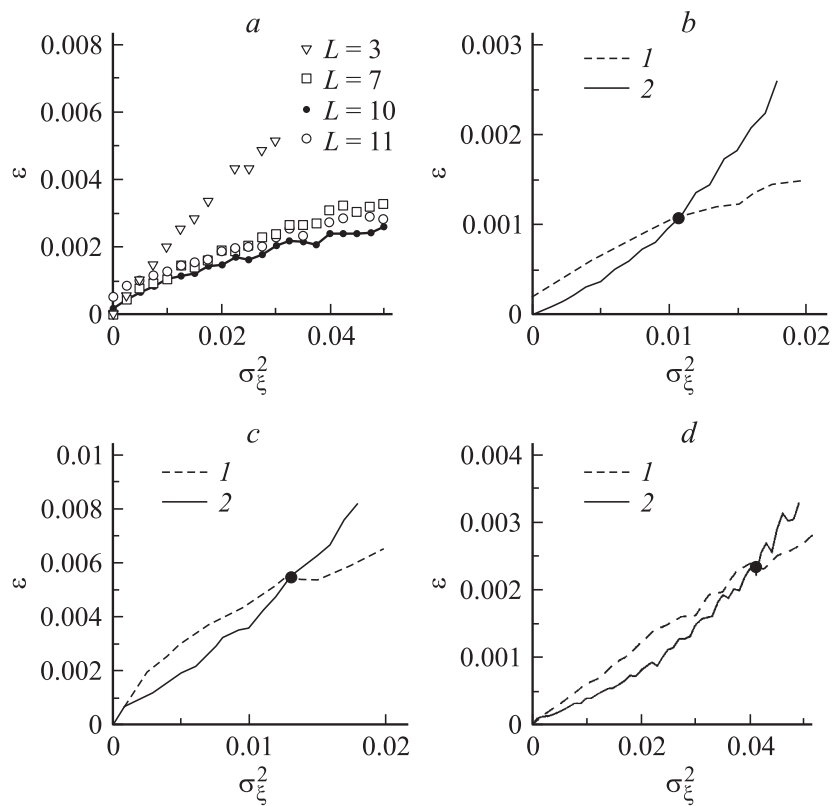


Рис. 2. Погрешности оценок параметров в зависимости от дисперсии шума: *a* — оценка \hat{a}_f параметра a отображения (4) при различных L ; *b* — оценки \hat{a}_f (при $L = 10$) и \hat{a}_b параметра a отображения (4); *c* — суммарная погрешность оценок \hat{a}_f и \hat{a}_b всех трех параметров отображения (5); *d* — погрешность оценок $\hat{a}_{f,1}$ и $\hat{a}_{b,1}$ параметра a_1 отображения (5). 1 — в прямом времени, 2 — в обратном.

новой оценки \hat{a}_b гораздо быстрее, так как используется только одна стартовая догадка. При больших шумах погрешность оценки \hat{a}_b быстро увеличивается, что вызвано появлением частых ошибок при выборе корня уравнения при итерациях в обратном времени.

Как показали наши эксперименты, представленная картина сохраняется и при увеличении длины ряда N . Дисперсии оценок \hat{a}_f и \hat{a}_b зависят от N практически по степенному закону $\sigma_a^2 \propto N^{-\alpha}$. Причем для дисперсии \hat{a}_f показатель степени при любом уровне шума примерно одинаков и равен $\alpha \approx 1.1$. Для новой оценки \hat{a}_b дисперсия убывает при малом шуме быстрее, чем для \hat{a}_f (например, $\alpha \approx 1.7$ при $\sigma_\xi^2 = 0.0001$), а при шумах порядка порогового так же.

Оценивание трех параметров. Чтобы изучить, что меняется при увеличении числа оцениваемых параметров, в качестве объекта было выбрано то же квадратичное отображение:

$$x_{n+1} = a_1 + a_2 x_n - a_3 x_n^2, \quad (5)$$

но с тремя неизвестными параметрами. Временные ряды генерировались при тех же $a_1^{(0)} = 1.0$, $a_2^{(0)} = 0.0$, $a_3^{(0)} = 1.85$, $x_1^{(0)} = 0.3$. Суммарная по всем трем параметрам погрешность оценок $\hat{\mathbf{a}}_f$ (оптимальная длина $L = 8$, интервалы неопределенности по a_1 — $[0.8, 1.2]$, по a_2 — $[-0.2, 0.2]$, остальные — те же, что в предыдущем случае) и $\hat{\mathbf{a}}_b$ представлена на рис. 2, *с*. Новые оценки $\hat{\mathbf{a}}_b$ вновь точнее при меньших шумах, причем пороговая дисперсия шума увеличилась примерно на 30% ($\sigma_{\xi,thr}^2 \approx 0.013$), т.е. расширилась область, где преимущество имеет предлагаемый метод. Результаты по оценкам отдельных параметров a_2 и a_3 очень близки к рис. 2, *с*, а для параметра a_1 пороговая дисперсия шума больше в 3 раза — $\sigma_{\xi,thr}^2 \approx 0.043$ (рис. 2, *д*). Таким образом, если нужно оценить точнее именно параметр a_1 (например, в силу его особенной значимости по какой-либо причине), то область превосходства нового метода еще более расширяется.

С ростом числа оцениваемых параметров P (а на практике их не редко может быть около 10) пороговое значение шума должно увеличиваться. Наконец, при очень большом их числе традиционный МНК с итерациями в прямом времени может стать вовсе не применимым, так как потребует нереально большого числа стартовых догадок. Тогда предлагаемый метод предпочтительнее при любых шумах.

5. Заключение. Процедура моделирования по временным рядам всегда завершается этапом оценки параметров для выбранной структуры модельных уравнений. В случае хаотических рядов, казалось бы, имеется возможность очень точной оценки, так как траектория модели чувствительна к значениям параметров. Но для длинного ряда

не удастся найти глобальный минимум целевой функции — суммы квадратов отклонений — из-за сложности ее „рельефа“ при расчете с помощью итерирования модельного отображения в прямом времени. Приходится делить ряд на сегменты, что снижает эффективность оценок.

В данной работе для одномерных отображений предложен новый вариант реализации МНК, использующий итерирование отображения в обратном времени. При этом почти устраняется проблема локальных минимумов и поэтому новый метод работает гораздо быстрее. Он дает и значительно более точные оценки при умеренных уровнях шума — не более некоторого порогового отношения шум/сигнал (его характерная величина порядка 10%). Причем этот порог тем больше, чем больше число оцениваемых параметров. Таким образом, на практике при построении многопараметрических модельных отображений предложенный подход должен быть особенно полезен.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-17578), CRDF, Президента РФ (грант МК-1067.2004.2) и Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] *Hegger R., Kantz H., Schmuser F. et al. // Chaos. 1998. V. 8. P. 727–754.*
- [2] *Swameye I., Muller T.G., Timmer J. et al. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2003. V. 100. P. 1028–1033.*
- [3] *Льонг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.*
- [4] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. 368 с.*
- [5] *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.*
- [6] *Смирнов Д.А., Сысоев И.В., Селезнев Е.П., Безручко Б.П. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 19. С. 69–76.*
- [7] *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42. № 3. С. 313–319.*
- [8] *Фейгин А.М., Мольков Я.И., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44. № 5–6. С. 376–399.*
- [9] *Smirnov D., Bezruchko V. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 046209.*
- [10] *Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.*

- [11] *Jaeger L., Kantz H.* // *Chaos*. 1996. V. 6. P. 440–450.
- [12] *McSharry P.E., Smith L.A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 4285–4288.
- [13] *Judd K.* // *Phys. Rev. E*. 2003. V. 67. P. 026212.
- [14] *Horbelt W., Timmer J.* // *Phys. Lett. A*. 2003. V. 310. P. 269–280.
- [15] *Pisarenko V.F., Sornette D.* // *Phys. Rev. E*. 2004. V. 69. P. 036122.
- [16] *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* // *Physica D*. 1991. V. 47. P. 373–392.
- [17] *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Efremova E.V.* // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. P. 046220.
- [18] *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.