

09

## Динамика нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии

© Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич

Саратовское отделение института радиотехники и электроники РАН  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: seleznev@sgu.ru

Поступило в Редакцию 16 февраля 2005 г.

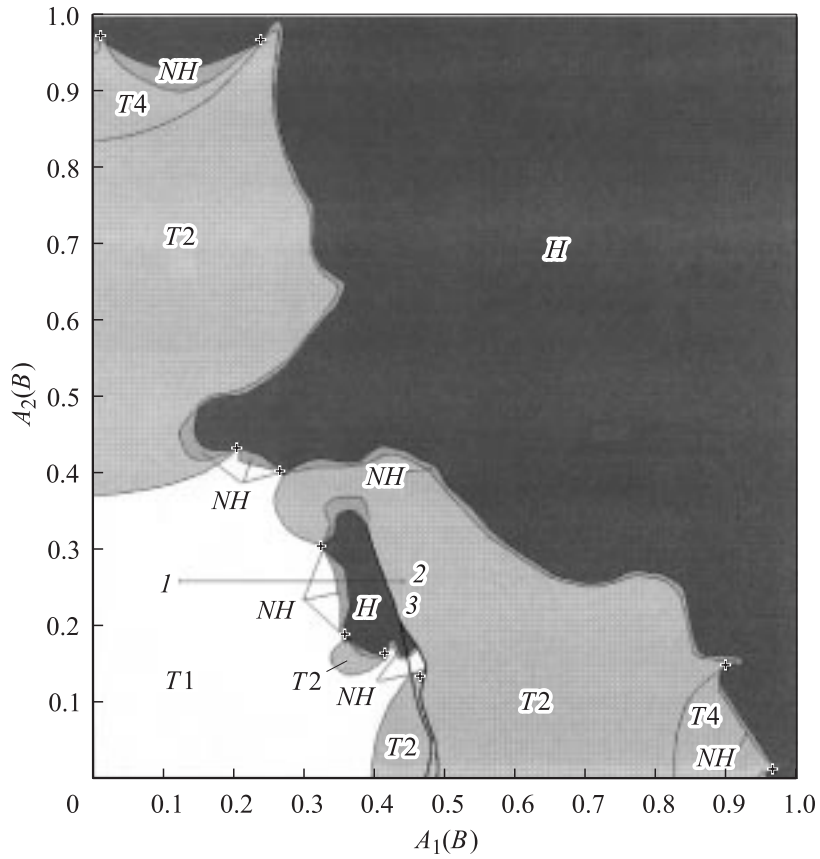
На примере возбуждаемого колебательного контура с полупроводниковым диодом исследуется динамика нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии. В пространстве управляющих параметров имеет место набор так называемых терминальных точек TDT (torus doubling terminal), на которые опираются линии удвоения торов и линии перехода к странному нехаотическому аттрактору. Переход к хаосу в такой системе происходит либо через рождение странного нехаотического аттрактора, либо через режим перемежаемости тор–хаос.

Исследование динамики нелинейных осцилляторов при квазипериодическом воздействии представляет интерес в связи с изучением особенностей перехода к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний [1,2]. При переходе от регулярной динамики к хаосу в таких системах очень часто встречается промежуточный тип поведения, который отвечает странному нехаотическому аттрактору (СНА) [3–11]. Одна из проблем, с которой сталкиваются экспериментаторы при исследовании странных нехаотических аттракторов, — это каким образом их идентифицировать, поэтому экспериментальных работ очень мало. В [9] на примере отображения с квазипериодическим воздействием предложен метод идентификации странного нехаотического аттрактора, связанный с бифуркациями при изменении фазы воздействия резонансных циклов, чьи рациональные числа вращения принадлежат последовательности, стремящейся в пределе к иррациональному. В [10,11] этот метод был апробирован и получено качественное соответствие результатов численного и физического экспериментов. Следует отметить, что большинство работ посвящено исследованию математических моделей в виде отображений [3–9], описывающих динамику реаль-

ных систем в узкой области пространства управляющих параметров. Так и в [10,11] представленная структура пространства управляющих параметров экспериментальной системы была получена при условии, когда переход к хаосу реализуется при изменении амплитуды одного из парциальных воздействий. Целью данной работы является исследование структуры пространства управляющих параметров нелинейного осциллятора при квазипериодическом воздействии в случае, когда переход к хаосу происходит как при изменении каждой из амплитуд воздействий.

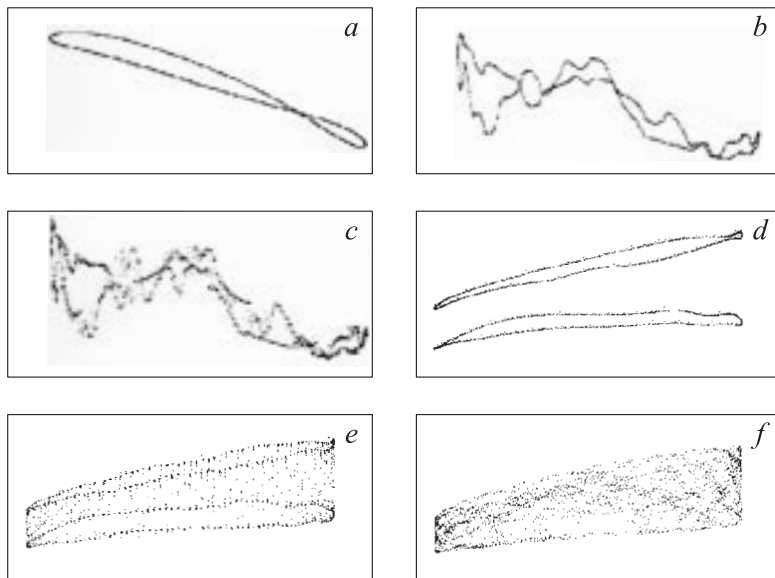
В качестве объекта исследования использовался колебательный контур с полупроводниковым диодом, возбуждаемый бигармоническим сигналом  $E(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$  [10,11]. Для реализации цели работы необходимо, чтобы значения  $\omega_1 = 2\pi f_1$  и  $\omega_2 = 2\pi f_2$  находились в диапазоне основной области хаоса колебательного контура [12,13]. В этом случае соотношение частот воздействия близко к 1. В то же время необходимо, чтобы существовала последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному, чтобы использовать предложенный в [9] метод идентификации странных нехаотических аттракторов. Реализовать подобную ситуацию возможно с помощью умножения „золотого сечения“ на некоторый рациональный множитель, достаточно удобным является  $7/5$ .

На рис. 1 представлена структура плоскости параметров  $(A_1, A_2)$  при соотношении частот  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{7}{5}$ . Жирными отмечены линии жестких бифуркаций, тонкими — мягких переходов, светлые области соответствуют движению на торе, различными тонами серого отмечены области существования удвоенных торов ( $T$ ), странных нехаотических ( $NH$ ) и хаотических ( $H$ ) аттракторов, цифрами — выделенные точки плоскости параметров, крестиками — терминальные точки  $TDT$ . Из рис. 1 видно, что линии удвоения тора и перехода к странному нехаотическому аттрактору начинаются и заканчиваются в терминальных точках  $TDT$ , при этом наблюдается их чередование. На рис. 2 представлены стробоскопические сечения с периодом  $2\pi/\omega_1$  проекций фазовых портретов на плоскость  $(A_2 \sin \omega_2 t, i)$ , где  $i$  — сила тока в диоде, при движении вдоль линии  $I-2$ . Рис. 1,  $a$  соответствует гладкому тору (значения параметров соответствуют точке  $I$  на рис. 1), с приближением к границе области существования странного нехаотического аттрактора форма сечения начинает деформироваться, а с переходом



**Рис. 1.** Структура плоскости параметров внешнего воздействия при  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{7}{5}$ .

к странному нехаотическому аттрактору на сечении формируется множество изломов различного масштаба (рис. 2, *b*). Размытие сечения в местах изломов из-за шумов в эксперименте указывает на локальную неустойчивость в этих областях фазовых портретов. В то же время на сечениях имеются области, где такое размытие не наблюдается, и аттрактор в них остается локально устойчивым. Учитывая выбор про-



**Рис. 2.** Стробоскопические сечения проекций фазовых портретов на плоскость  $(A_2 \sin \omega_2 t, i)$ .

екции, в данном случае можно говорить о фазозависимой динамике на аттракторе. Такая зависимость на основе критерия [9] подтверждается заданием рационального соотношения частот, равного  $\omega_2/\omega_1 = 13/15$  из соответствующей сходящейся последовательности отношений и изменением фазы одного из парциальных воздействий. С дальнейшим изменением параметра  $A_1$  наблюдается переход к хаосу, сопровождающийся размыванием стробоскопического сечения проекции фазового портрета (рис. 2, *c*). Качественно подобные переходы имеют место во всех областях существования странного нехаотического аттрактора и хаоса. Следует отметить, что четко определить в эксперименте переход странный нехаотический аттрактор—хаос не удастся из-за сложности каждого из режимов колебаний, поэтому граница между областями их существования построена на основе наблюдения спектров мощностей. Режим считался хаотическим, если уровень шумового пьедестала на

экране анализатора спектра превышал  $-40$  dB от уровня гармоника на частоте внешнего воздействия  $\omega_1$ .

При движении из точки 2 в область хаоса (влево по линии 2–1 на рис. 1) имеет место иной сценарий перехода к хаосу. Колебания, наблюдаемые на границе порядок–хаос, напоминают режим перемежаемости [14], в котором регулярным аттрактором является тор. Появление такого режима колебаний в первую очередь ассоциируется с существованием в исходной системе (в данном случае — нелинейном осцилляторе с гармоническим воздействием) сценария перехода к хаосу через режим перемежаемости [15]. В данном случае имеет место следующая ситуация. В пространстве параметров исследуемой системы имеет место сборка, ограниченная линиями складки (жирные линии на рис. 1). В этой области сосуществуют два устойчивых и один неустойчивый тор. С движением по плоскости параметров вверх жирные линии сливаются в точке сборки (точка 3 на рис. 1) и образуют границу между хаосом и удвоенным тором. Рис. 2, *d* соответствует удвоенному тору (значения параметров соответствуют точке 2 на рис. 1), на границе области его существования в сечении фазового портрета появляются точки, не принадлежащие удвоенному тору (рис. 2, *e*), при этом в зависимости тока от времени появляются короткие участки хаотических колебаний. С движением от границы в глубь области хаоса длина хаотической фазы увеличивается, ламинарной уменьшается, а в итоге в результате перемешивания формируется хаотический аттрактор, сечение которого представлено на рис. 2, *f*.

Таким образом, в физическом эксперименте для систем с квазипериодическим воздействием возможна качественная идентификация странных нехаотических аттракторов на основе наблюдения стробоскопических сечений проекций фазовых портретов на плоскости динамическая переменная — фаза воздействия. Движению на торе соответствует гладкая замкнутая кривая, движению на странном нехаотическом аттракторе — замкнутая кривая с гладкими участками, где движение локально устойчиво, и изломами, где движение локально неустойчиво. Переход к хаосу осуществляется через рождение странного нехаотического аттрактора или через режим перемежаемости тор–хаос. Можно предположить, что представленная на плоскости управляющих параметров конфигурация бифуркационных линий является универсальной и имеет место в других системах с квазипериодическим воздействием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05–02–16305, гранта для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов вузов Федерального агентства по образованию и U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Award No REC-006.

## Список литературы

- [1] *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983.
- [2] *Апищенко В.С.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. В. 2. С. 225–237.
- [3] *Grebogi C., Ott E., Pelican S., Yorke J.* // Physica. 1984. V. D13. P. 261.
- [4] *Ding M., Grebogi C., Ott E.* // Phys. Rev. 1989. V. A39. P. 2593.
- [5] *Ding M., Grebogi C., Ott E.* // Phys. Lett. A. 1989. V. 137. P. 167.
- [6] *Nishikawa T., Kaneko K.* // Phys. Rev. 1996. V. 54. N 6. P. 6114.
- [7] *Hunt B.R., Ott E.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. N 25.
- [8] *Chacon R., Martinez Garcia-Hoz A.* // Europhys. Lett. 2002. V. 57. N 1. P. 7–13.
- [9] *Pikovsky A., Feudel U.* // CHAOS. 1995. V. 5. P. 253.
- [10] *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Фойдель У., Селезнев Е.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 6. С. 3–20.
- [11] *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Ye.P.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 6. P. 7828–7830.
- [12] *Buskirk R., Jeffries C.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 5. P. 3332–3357.
- [13] *Baxter J.H., Bocko M.F., Douglass D.H.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 2. P. 619–625.
- [14] *Jeffries C., Perez J.* // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. P. 2117–2123.
- [15] *Dadio H.* // Progr. Theor. Phys. Japan. 1983. V. 70. N 3. P. 879–882.