

01

## Реконструкция моделей неавтономных систем с дискретным спектром воздействия

© Д.А. Смирнов, И.В. Сысоев, Е.П. Селезнев, Б.П. Безручко

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 30 апреля 2003 г.

Представлена методика конструирования по скалярным хаотическим временным рядам модельных дифференциальных уравнений для систем, находящихся под внешним воздействием, спектр которого дискретен. Она опирается на учет явной зависимости от времени в структуре моделей и ее аппроксимацию тригонометрическими рядами. Работоспособность методики проверена в вычислительных экспериментах на нелинейных эталонных системах при различных видах периодического и квазипериодического воздействия.

**Введение.** В отличие от динамического моделирования из „первых принципов“, когда выбор динамических переменных и структуры уравнений диктуется законами природы, при реконструкции модельных уравнений по временным рядам [1–5]<sup>1</sup> он, как правило, опирается лишь на интуицию исследователя. Желание вывести эмпирическое моделирование из сферы „искусства“ объясняет большой интерес к поиску универсальных структур и технологий реконструкции. В случае, когда измерению доступна лишь одна наблюдаемая величина  $\eta$ , такой стандартной структурой обычно является (см. [2]) система дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{dx_D}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_D),$$

---

<sup>1</sup> Из множества публикаций по моделированию (реконструкции уравнений, восстановлению уравнений) по временным рядам мы упомянули лишь первые работы и русскоязычные обзоры с большими списками литературы.

где в качестве  $x_1$  берется сама скалярная наблюдаемая  $\eta$ , а функция  $f$  представляется в виде степенного полинома порядка  $K$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K c_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=1}^D x_j^{l_j}, \quad \sum_{j=1}^D l_j \leq K. \quad (2)$$

Претензии таких моделей на общность теоретически обоснованы, поскольку в виде (1) может быть представлена почти любая система ОДУ (подробнее см. [6]) и любая непрерывная функция  $f$  в (1) может быть сколь угодно точно равномерно приближена алгебраическим полиномом (2) (теорема Вейерштрасса). Однако случаи успешного применения стандартного подхода на практике единичны, особенно если велики  $K$  и  $D$ , т.е. велико количество коэффициентов и многократное дифференцирование приводит к резкому возрастанию шумов. Работоспособность стандартного подхода можно повысить за счет частичного отказа от универсальности и разработки методик (технологий), ориентированных на сравнительно узкий класс объектов. В данной работе такая методика предлагается для систем, находящихся под регулярным (имеющим дискретный спектр) внешним воздействием. Это могут быть произвольные по форме периодические или квазипериодические изменения параметров или внешней силы. Предпосылками для моделирования объекта в виде системы ОДУ с регулярным внешним воздействием могут быть физические соображения, например, наличие дискретных пиков в спектре мощности наблюдаемого ряда,<sup>2</sup> или априорная информация. Методика опирается на введение явной зависимости от времени в структуру модельных уравнений, аналогично тому, как это делается для уменьшения  $D$  в [7,8] при гармоническом воздействии, а также на использование, наряду со степенными полиномами (2), тригонометрических рядов.

**Методика реконструкции.** Пусть имеется временной ряд наблюдаемой величины  $\{\eta_i\}$ , спектр мощности которой имеет дискретные пики на частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  и их комбинационные составляющие. Ограничившись для начала при моделировании предположением о силовом характере воздействия на объект, модифицируем стандартную структуру (1) путем замены:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_D) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_D) + g(t), \quad (3)$$

<sup>2</sup> Этот признак не является достаточным.

где функция  $g(t)$ , представляющая внешнее воздействие, в общем случае неизвестна. Поэтому представим ее в виде суммы тригонометрических полиномов:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k_1} \left( a_j \cos \left( \frac{2\pi jt}{T_1} \right) + b_j \sin \left( \frac{2\pi jt}{T_1} \right) \right) + \dots + \sum_{j=1}^{k_m} \left( a_j \cos \left( \frac{2\pi jt}{T_m} \right) + b_j \sin \left( \frac{2\pi jt}{T_m} \right) \right), \quad (4)$$

где  $T_j = 2\pi/\omega_j$ . Для периодического случая  $m = 1$ , в квазипериодическом случае  $m$  равно числу несоизмеримых частот. Примем, как и в стандартном подходе, за переменную  $x_1$  самую скалярную наблюдаемую, а временные ряды величин  $x_2(t_i), \dots, x_D(t_i), \frac{dx_D(t_i)}{dt}$  получим путем последовательного дифференцирования ряда  $\{x_1(t_i)\} = \{\eta(t_i)\}$  после фильтрации шума. Для нахождения коэффициентов полинома  $f$  и функции  $g$  используем метод наименьших квадратов (МНК), минимизируя средний квадрат ошибки аппроксимации:<sup>3</sup>

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{dx_D}{dt}(t_i) - f(x_1(t_i), \dots, x_D(t_i)) - g(t_i) \right)^2 = \min. \quad (5)$$

Использование структуры (1), (3), (4) вносит специфику в процедуру расчета коэффициентов модели по сравнению со стандартным подходом — в рассматриваемом случае параметры  $T_j$  входят в выражение для воздействия  $g$  нелинейно, поэтому приходится искать минимум погрешности аппроксимации  $\varepsilon^2$  как функции многих переменных с помощью итерационных методов. Мы использовали метод Левенберга–Марквардта,<sup>4</sup> но при этом значения линейно входящих параметров на

<sup>3</sup> В общем случае для оценки параметров по данным используют метод максимального правдоподобия, частным случаем которого является МНК. В работе [9] показано, что в общем случае МНК-оценки могут быть сильно смещены, но при рассматриваемых нами малых уровнях шума они должны быть достаточно точны. Поэтому далее используется только МНК, при котором сильно упрощаются расчеты.

<sup>4</sup> Согласно этому методу, выбираются начальные приближения для всех неизвестных коэффициентов; функции  $f$  и  $g$  линеаризуются по этим коэффициентам в окрестности этих приближений; решением задачи на линейный МНК находятся поправки к сделанным приближениям. Алгоритм повторяется, пока не будет достигнут минимум  $\varepsilon$ , в общем случае — локальный. Чтобы найти глобальный минимум, необходимо перебирать различные начальные приближения.

каждом шаге рассчитывали линейным МНК. В качестве начального приближения значений  $T_j$  удобно использовать экспериментальную оценку этих величин по спектру.

**Численный эксперимент.** Для апробирования методики были проведены реконструкции модельных ОДУ в стандартном (1), (2) и модифицированном (1), (3), (4) видах по хаотическим временным рядам, полученным путем интегрирования<sup>5</sup> неавтономного уравнения осциллятора Тоды:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - r \frac{dx}{dt} - 1 + e^{-x} - \varphi(t) = 0, \quad (6)$$

где  $r = 0.5$  — параметр диссипации,  $\varphi(t)$  — внешнее воздействие, рассмотренные варианты которого представлены на рис. 1. Величины  $K$ ,  $D$  и  $k$  подбирались оптимальным образом. Критериями качества моделей выступали погрешности аппроксимации  $\varepsilon$ , дальность прогноза  $\tau_{pred}$ <sup>6</sup> и сходство фазовых портретов модели и объекта. Для анализа влияния шума к исходному временному ряду добавлялся нормальный шум; тогда для расчета производных использовался  $m$ -точечный сглаживающий полином (фильтр Савицки–Голэя [11]) второго порядка, величина  $m$  подбиралась.

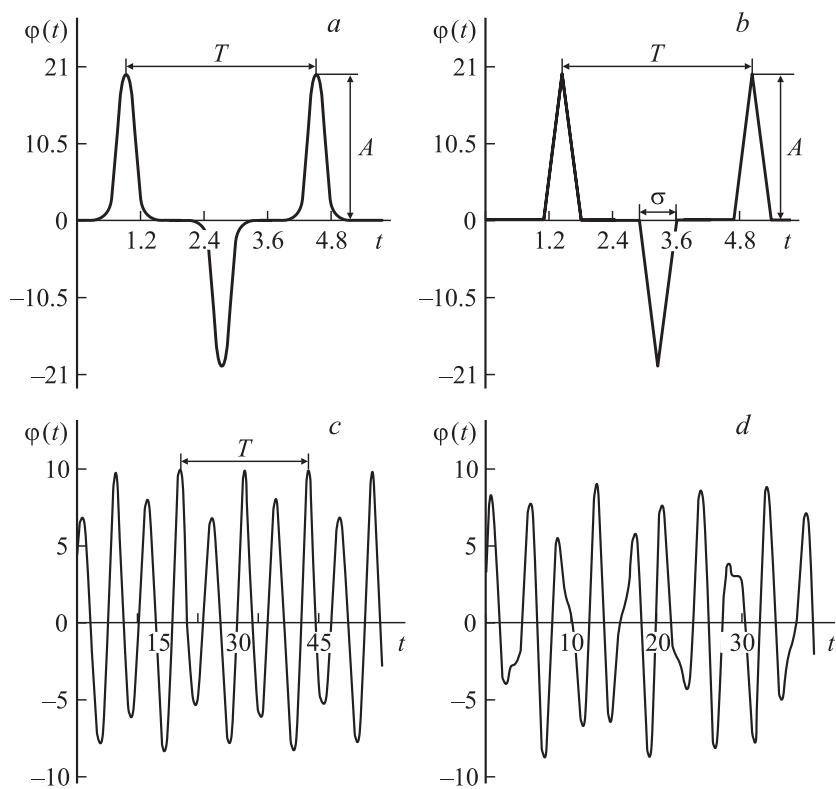
Результаты проведенных экспериментов и их сравнение сводятся к следующему.

Стандартный алгоритм (1), (2) не дает удовлетворительных результатов ни при одном из приведенных видов воздействия даже в отсутствие шумов, тогда как модернизированная структура (1), (3), (4) при достаточном количестве учтенных гармоник обеспечивает хорошее качество реконструкции (рис. 2)<sup>7</sup>, в том числе и при наличии шумов, хотя получение оптимальной модели в этом случае требует значительно большей длины тренировочного ряда.

<sup>5</sup> Методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом  $\Delta t = 0.01$ .

<sup>6</sup> Временной интервал, на котором ошибка прогноза не превышала 5% от стандартного отклонения. Он сравнивался с характерным временным масштабом воздействия  $T$  или предельно возможной дальности прогноза  $t_{limit}$ , определяемой величиной старшего ляпуновского показателя.

<sup>7</sup> Например, при воздействии гауссовыми импульсами (7) наилучшей из полученных стандартных моделей (с  $D = 3$ ,  $K = 2$ ) соответствовали  $\varepsilon = 86.9\%$  и  $\tau_{pred} = 0.078T$  при предельно возможной дальности прогноза  $t_{limit} \approx 60T$ . Модернизированная же структура при  $D = 2$ ,  $K = 8$  обеспечивает качественное соответствие фазовых портретов и  $\tau_{pred} = 19.24T$  уже при числе гармоник  $k = 8$ , а наилучших результатов — при  $k = 15$  (рис. 2).



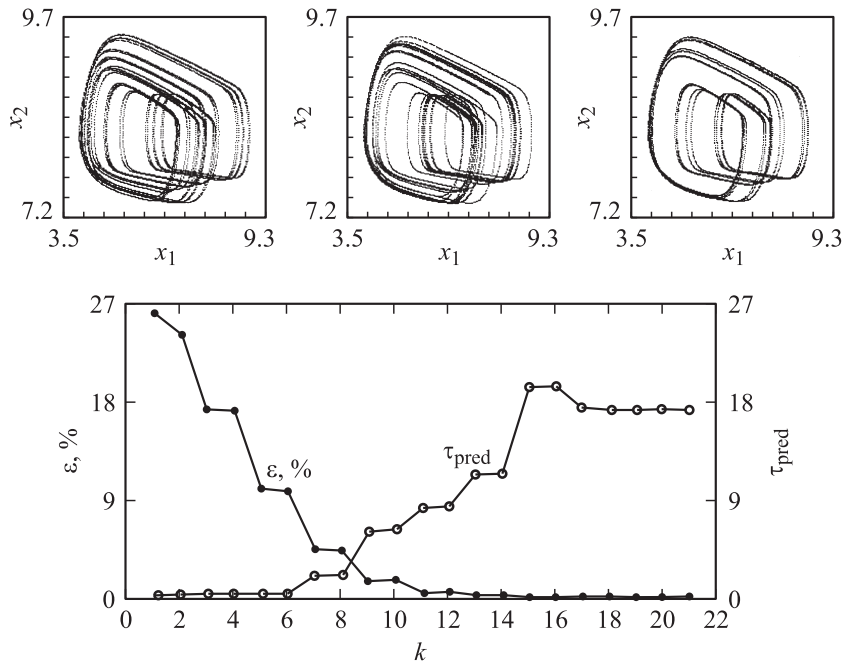
**Рис. 1.** Рассмотренные виды внешнего воздействия, периодические: *a* — гауссовы импульсы

$$\varphi(t) = A \left( \exp\left(-\left(\frac{\tau(t)}{\sigma}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{\tau(t+\frac{T}{2})}{\sigma}\right)^2\right) \right), \quad \tau = (t + t_0) \bmod T - \frac{T}{2}; \quad (7)$$

*b* — треугольные импульсы; *c* — с субгармониками (получено решением системы Рёсслера [10] в режиме периода 4 при значениях параметров  $a = 0.15$ ,  $b = 0.2$ ,  $r = 5.7$ ); *d* — квазигармонический сигнал

$$\varphi(t) = A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot (t + t_0)\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} \cdot (t + t_0)\right), \quad (8)$$

где  $T_1 = 4$ ,  $T_2 = 2 \cdot (\sqrt{5} - 1)$ ,  $A_1 = 6$ ,  $A_2 = 3$ .



**Рис. 2.** Фазовые портреты объекта (слева), результат моделирования с  $k = 15$  без добавленного шума (в центре) и с 1%-ным шумом (справа). Зависимости  $\varepsilon$  (в %) и  $\tau_{pred}$  (в периодах внешнего воздействия  $T$ ) от числа гармоник  $k$  в аппроксимации внешней силы, при воздействии гауссовыми импульсами с  $T = 3.6$ ,  $A = 20$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\sigma = 0.2$ .

2. Усложнение формы воздействия заставляет увеличивать число членов тригонометрического полинома (4), но это остается без негативных последствий, тогда как глобальная неустойчивость стандартных моделей с алгебраическими полиномами высоких порядков была главной причиной неудач стандартного подхода. Так, воздействие в виде треугольных импульсов потребовало учесть весьма большое, порядка 80–90, число членов ряда. Проводились успешные эксперименты с использованием даже 300–500 гармоник.

3. Присутствие субгармоник во внешнем воздействии не представляет никаких новых трудностей, если в качестве базовой частоты принять наименьшую из частот субгармоник.

4. При квазипериодическом воздействии (9) неавтономная модель продемонстрирует очень хорошее соответствие объекту,<sup>8</sup> фазовые траектории объекта и модели визуально неотличимы. Основная сложность работы с несколькими тригонометрическими полиномами состоит в том, что периоды двух высоких гармоник из разных полиномов на некотором этапе итерационной процедуры могут оказаться столь близкими, что это приведет к вырожденной или очень плохо обусловленной матрице при решении задачи оценки линейно входящих параметров. Поэтому приходится уменьшать числа членов ряда и очень точно задавать начальные догадки.

**Заключение.** Результаты свидетельствуют о работоспособности предложенной структуры моделирования выделенной группы объектов. В случае неаддитивного (праметрического, комбинированного) воздействия зависимость от времени в виде конечной суммы ряда Фурье вводились во все коэффициенты полинома  $f$ , аналогично [8]. Если все уравнения универсальной модели в отличие от (1) содержат неизвестные функции в правых частях всех уравнений, то  $g(t)$  вводится в каждое из них. Примечательно, что качество неавтономных моделей не ухудшается и при использовании тригонометрических рядов даже очень больших порядков в отличие от применения степенных полиномов, увеличение порядка которых ведет к неустойчивостям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-02-17578, 03-02-06858), CRDF (REG-006) и Фонда некоммерческих программ „Династия“ (гр. № 245.662).

## Список литературы

- [1] Crutchfield J.P., McNamara B.S. // Complex Systems. 1987. V. 1. P. 417–452.
- [2] Gouesbet G., Letellier C. // Phys. Rev. E. V. 49. P. 4955–4972.
- [3] Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 9. С. 1075–1092.
- [4] Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 1. С. 29–51.
- [5] Фейгин А.М., Мольков Я.И., Мухин Д.Н., Лоскутов Е.М. Прогноз бифуркаций слабонеавтономных динамических систем на основе наблюдаемых временных рядов. Препринт № 508. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН. 1999. 54 с.

<sup>8</sup> При  $D = 2$ ,  $K = 10$ ,  $m = 2$  достигнуты  $\varepsilon = 0.016\%$ ,  $\tau = 19.68 T_1$  (при  $\tau_{hor} = 63.7 T_1$ )

- [6] *Sauer T., Yorke J., Casdgli M.* // Journal of Statistical Physics. 1991. V. 65. № 3–4. P. 579–616.
- [7] *Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H.* // Chaos. 1998. V. 8.N 3. P. 727.
- [8] *Bezruchko B.P.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 63. P. 016207.
- [9] *McSharry P.E., Smith L.A.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4285.
- [10] *Rossler O.E.* // Phys. Lett. 1976. V. 57A. N 5. P. 397–398.
- [11] *Press W.Y., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.* Numerical Recipes Cambridge: Cambridge University Press, 1992.