



## ВОССТАНОВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ С ЗАДЕРЖКОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

*Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.*

Предложен новый метод реконструкции по временным рядам уравнений с запаздыванием, опирающийся на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний. На основе информации о времени задержки определяется вид нелинейной функции и параметр инерционности. Работоспособность метода продемонстрирована при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием по их хаотическим решениям, в том числе с добавленным шумом, а также при конструировании моделей реальных систем с запаздыванием по хаотическим временным реализациям.

### Введение

Системы с задержкой широко распространены в природе. В частности, динамика изменения состава крови [1], электрические сигналы мозга [2], колебания в радиofизических [3, 4] и оптических [5] системах и другие явления могут быть описаны с использованием уравнений с задержкой. Это во многом объясняет высокую популярность уравнений с задержкой у исследователей, занимающихся проблемами нелинейной динамики, в частности, реконструкцией уравнений по временным рядам, что и является предметом предлагаемой работы.

Использование при реконструкции модельных уравнений по временным рядам универсальных методик, не учитывающих особенностей объекта, как правило, не приводит к успеху. На хороший результат обычно можно рассчитывать лишь при использовании специальных технологий реконструкции для достаточно узких классов объектов [6-8]. Мы ограничиваемся рассмотрением систем, описываемых уравнениями первого порядка, с запаздыванием вида

$$\epsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (1)$$

где  $x(t)$  - состояние системы в момент времени  $t$ ,  $f$  - нелинейная функция,  $\tau_0$  - время запаздывания,  $\epsilon_0$  - параметр, характеризующий инерционность системы. В достаточно общем случае уравнение (1) является математической моделью колебательной системы, в радиofизическом варианте представляемой кольцом из трех идеализированных элементов: нелинейного усилителя, линии задержки и инерционного элемента (рис. 1).

Для однозначного определения состояния системы (1) необходимо задать начальные условия на непрерывном временном интервале  $[-\tau_0, 0]$ . Таким образом, система обладает бесконечно большим числом степеней свободы. Это вносит трудности в решение задачи реконструкции по временному ряду. Действительно, при больших временах задержки даже скалярные дифференциальные уравнения с запаздыванием

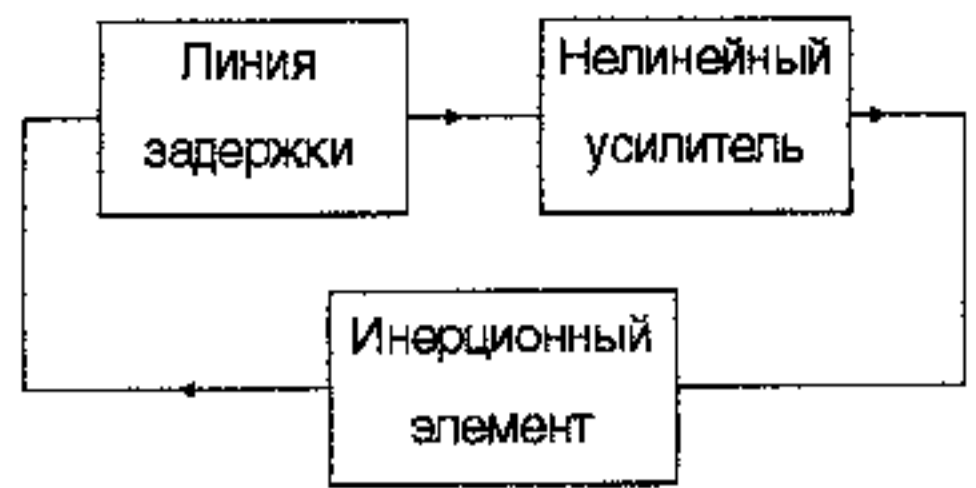


Рис. 1. Обобщенная схема генератора с запаздывающей обратной связью

могут демонстрировать хаотические движения очень высокой размерности [9]. Поэтому для реконструкции систем с запаздыванием разрабатываются специальные приемы. Одним из них является проецирование траектории, задаваемой уравнением (1), из бесконечномерного фазового пространства в трехмерное  $(x(t - \tau_0), \dot{x}(t), x(t))$ . При этом множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности [10, 11]. Сечение этой поверхности плоскостью  $\dot{x}(t)=0$  позволяет определить вид нелинейной функции, входящей в уравнение (1),

$$x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (2)$$

Поскольку заранее время задержки  $\tau_0$  неизвестно, приходится проецировать траекторию в пространство  $(x(t - \tau), \dot{x}(t), x(t))$  при различных значениях  $\tau$ , добиваясь однозначной зависимости в сечении  $\dot{x}(t)$ , которая возможна лишь при  $\tau = \tau_0$ . В качестве количественного критерия однозначности при таком поиске  $\tau_0$  используют, например, минимальную длину линии  $L(\tau)$ , соединяющей экстремальные точки на плоскости  $(x(t - \tau), \dot{x}(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau)$  [11]. В других методах, опирающихся на аналогичное проецирование бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в подпространства малой размерности, используются свои критерии качества, например, минимальная ошибка прогноза построенной модели [12-14], минимальная величина информационной энтропии [15] или различные меры сложности спроецированного временного ряда [12, 16, 17]. Известны также методы исследования систем с запаздыванием, основанные на применении регрессионного анализа [18, 19] и на построении корреляционной функции [20, 21].

В нашей работе предложен новый метод реконструкции по временным рядам уравнений с запаздыванием вида (1), опирающийся на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях наблюдаемых колебаний. В предлагаемом подходе проводится выделение экстремумов в исходной временной реализации и анализируется длительность временных интервалов между ними (раздел 1). Для различных значений времени  $\tau$  определяется число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на время  $\tau$  (рис. 2). Характерные особенности зависимости  $N(\tau)$  позволяют с большой точностью найти значение времени запаздывания  $\tau_0$  без введения каких-либо дополнительных количественных критериев. На основе информации о  $\tau_0$  определяется вид нелинейной функции и параметр инерционности. Возможна оценка параметра  $\epsilon_0$  и непосредственно из вида зависимости  $N(\tau)$ . В разделе 2 особенности метода и его работоспособность при наличии шумов иллюстрируются как на примере реконструкции динамических систем по их решениям, так и на примере

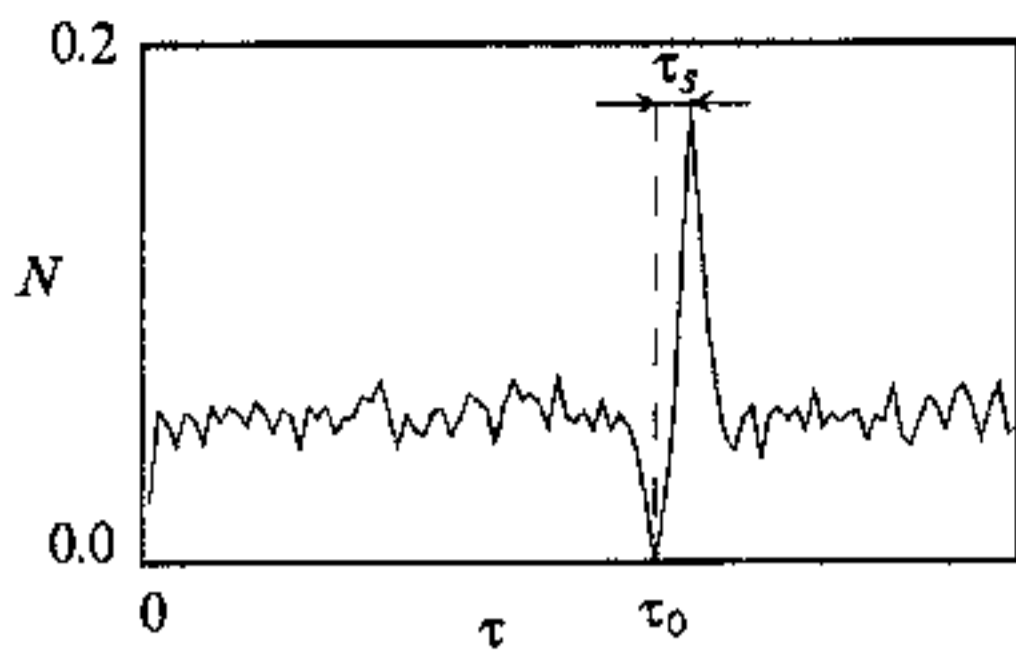


Рис. 2. Число  $N$  пар экстремумов в реализации уравнения (1) при  $\epsilon_0 > 0$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$  в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  имеет четкий минимум при времени, соответствующем времени запаздывания системы. Положение максимума определяется величиной параметра  $\epsilon_0$

моделирования реальных радиофизических систем. Достоинства подхода и возможные приложения обсуждаются в заключении.

## 1. Описание метода восстановления нелинейной функции, времени задержки и параметра инерционности

Предлагаемый метод базируется на обнаруженных нами особенностях формы и расположения экстремумов в зависимости переменной  $x$  от времени  $t$  для системы (1) при различных значениях  $\epsilon_0$  [22, 23]. Особенности расположения экстремумов во времени наглядно иллюстрирует зависимость  $N(\tau)$  (см. рис. 2). Такую зависимость можно построить, определив для различных значений  $\tau$  число  $N$  пар экстремумов во временной реализации  $x(t)$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$ . Если нормировать  $N$  на общее число экстремумов, то при достаточно большом их числе полученная величина будет иметь смысл оценки вероятности обнаружить во временной реализации пару экстремумов, разделенных интервалом  $\tau$ . Поясним качественные особенности зависимости  $N(\tau)$  при различных значениях параметра  $\epsilon_0$ .

В отсутствие инерционности ( $\epsilon_0 = 0$ ) уравнение (1) принимает вид (2). Продифференцировав его по  $t$ , получим

$$\dot{x}(t) = [df(x(t - \tau_0))/dx(t - \tau_0)]\dot{x}(t - \tau_0). \quad (3)$$

Откуда следует, что если  $\dot{x}(t - \tau_0) = 0$ , то и  $\dot{x}(t) = 0$ . Таким образом, при  $\epsilon_0 = 0$  за каждым экстремумом через время  $\tau_0$  во временной реализации  $x(t)$  всегда следует экстремум<sup>1</sup>. В результате в зависимости  $N(\tau)$  при  $\tau = \tau_0$  будет наблюдаться максимум (рис. 3, а).

Ситуацию в отсутствие инерционности можно наглядно проиллюстрировать с помощью отображений последования и кольцевой схемы (см. рис. 1), для которой  $\epsilon_0 = 0$  эквивалентно отсутствию инерционного элемента и неограниченной полосе пропускания оставшихся элементов. Сигнал  $x(t)$  распространяется по кольцу в одну сторону, при этом линия задержки обеспечивает его запаздывание на время  $\tau_0$ , а нелинейный усилитель преобразует его в соответствии со своей передаточной функцией  $f(x(t - \tau_0))$ . В этом случае сигнал на выходе нелинейного усилителя в момент времени  $t$  определяется только сигналом на входе линии задержки в момент времени  $t - \tau_0$  (локально). То есть эволюция во времени точек реализации может быть представлена диаграммой Ламерея на графике одномерного отображения  $x(t - \tau_0) \rightarrow x(t)$  (рис. 3, б) при этом одному шагу дискретного времени соответствует сдвиг на  $\tau_0$  непрерывного времени. Графические построения отображения нескольких соседних точек, выделенных на временной реализации  $x(t)$  в окрестности экстремума (рис. 3, в), свидетельствуют, что

<sup>1</sup> Так как в хаотических временных реализациях исследуемых систем практически все критические точки, в которых  $\dot{x}(t) = 0$ , являются экстремальными, в дальнейшем всюду в статье мы будем называть точки, в которых  $\dot{x}(t) = 0$ , экстремальными.

экстремум в непрерывной реализации  $x(t)$  всегда отображается в экстремум. Из этого же рисунка следует, что экстремумов, удаленных друг от друга на  $\tau$ , незначительно отличающемся от  $\tau_0$ , должно быть относительно мало, чему соответствует наличие минимумов на рис. 3, а. В реальности мы имеем дело не с непрерывной реализацией  $x(t)$ , а с дискретным рядом  $\{x_i\}_{i=1}^M$ , полученным в результате численного решения дифференциального уравнения или экспериментального измерения наблюдаемой величины  $x$  в дискретные моменты времени. Однако и в этом случае, как видно из рис. 3, в, типичной является ситуация, когда за экстремальной точкой временного ряда через время  $\tau_0$  следует экстремум.

При наличии инерционности ( $\epsilon_0 > 0$ ), что соответствует реальным ситуациям, наиболее вероятная величина временного интервала между экстремумами во временной реализации  $x(t)$  смещается от  $\tau_0$  в сторону больших значений. Наблюдаемый эффект можно истолковать с помощью представлений кольцевой системы (см. рис. 1): инерционный элемент вносит в систему некоторую дополнительную задержку. В результате экстремумы наиболее часто располагаются на удалении  $\tau_0 + \tau$ , друг от друга (см. рис. 2). Например, численные исследования уравнения (1) с квадратичной нелинейной функцией  $f(x) = \lambda - x^2$  при больших значениях параметра нелинейности  $\lambda$  позволили сделать оценку:  $\tau_s \approx \epsilon_0/2$ .

При  $\epsilon_0 > 0$  экстремумы во временной реализации  $x(t)$  близки к квадратичным, а следовательно, в экстремальных точках  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{x}(t) \neq 0$ . Можно показать, что в этом случае во временной реализации решения уравнения (1) должны отсутствовать экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau_0$ . Для доказательства этого продифференцируем (1) по времени:

$$\epsilon_0 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{df(x(t - \tau_0))}{dx(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (4)$$

Если при  $\dot{x}(t) = 0$  в общем случае  $\ddot{x}(t) \neq 0$ , то, как видно из уравнения (4), при

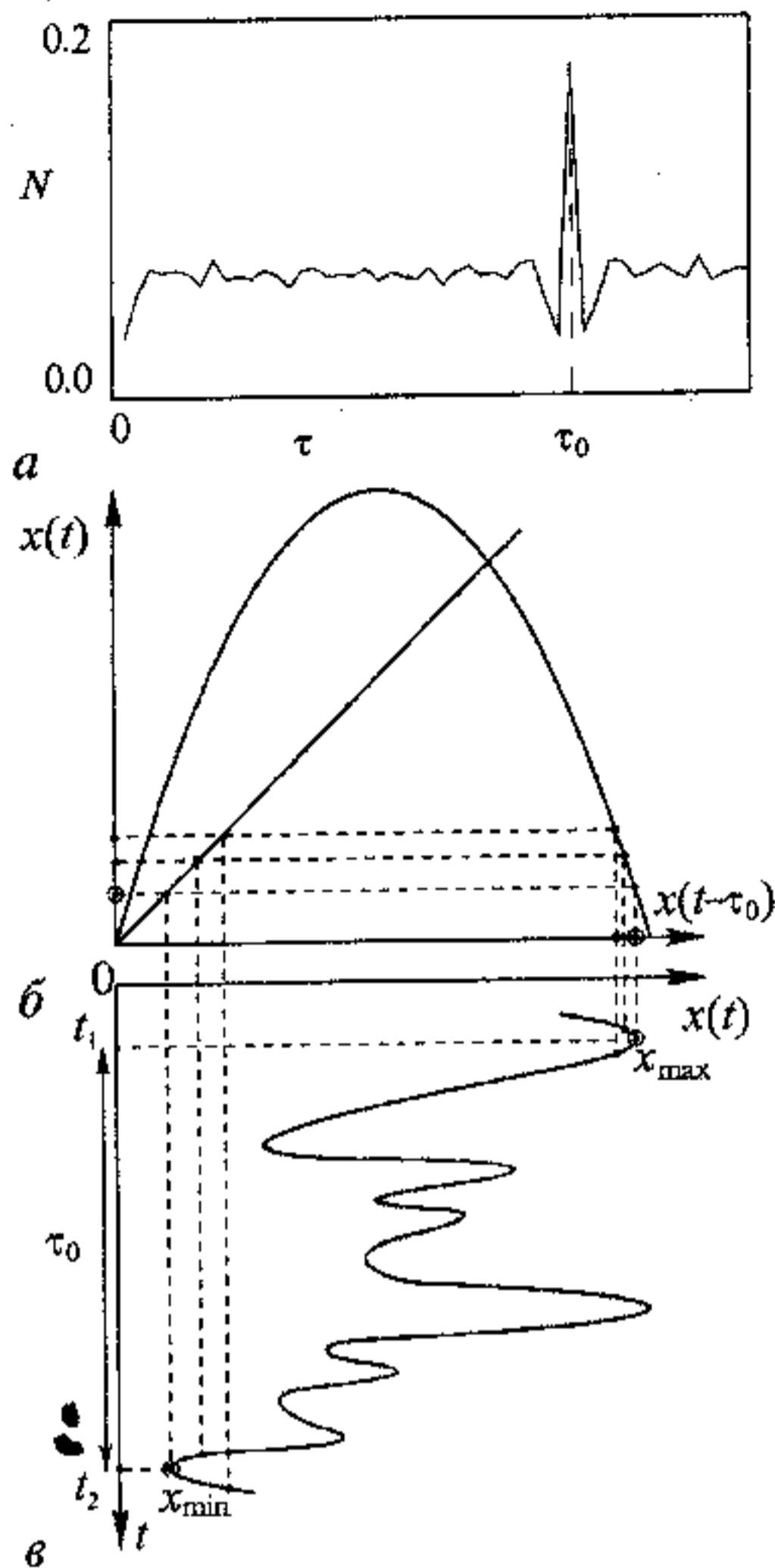


Рис. 3. а - Число  $N$  пар экстремумов в реализации уравнения (1) при  $\epsilon = 0$ , удаленных друг от друга на время  $\tau$  в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  имеет резкий максимум при времени, соответствующем времени запаздывания системы. б - Типичная передаточная функция нелинейного элемента и отображение множества значений входного сигнала на выход. в - Временная реализация сигнала с выделенными вблизи экстремумов точками временного ряда. Экстремальные точки показаны кружочками

$\varepsilon_0 \neq 0$  должно выполняться условие  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$ . То есть на удалении  $\tau_0$  от квадратичного экстремума не должно быть другого экстремума, а следовательно, значение  $N(\tau_0) \rightarrow 0$ . При  $\tau \neq \tau_0$  производные  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau)$  могут быть равны нулю одновременно, то есть на удалении  $\tau$  друг от друга экстремумы можно обнаружить. Характерная конфигурация на графике  $N(\tau)$  в окрестности  $\tau = \tau_0$ , представленная на рис. 2, дублируется при больших  $\tau$  в окрестностях  $\tau = 2\tau_0, 3\tau_0, \dots$

Предложенная процедура определения  $\tau_0$  не требует больших вычислительных затрат, поскольку для нахождения экстремумов и построения зависимости  $N(\tau)$  могут быть использованы только операции сравнения и сложения.

Вид зависимостей  $N(\tau)$ , построенных по конечным временным рядам  $\{x_t\}_{t=1}^M$ , будет определяться длиной ряда, шагом дискретизации, уровнем шума и точностью измерения. Влияние этих факторов на вид  $N(\tau)$  и на качество реконструкции модельного уравнения рассмотрено в разделе 2.

Для определения по хаотической временной реализации параметра инерционности  $\varepsilon_0$  и нелинейной функции  $f$  системы (1) мы предлагаем новый метод, суть которого заключается в следующем. Из уравнения (1) получаем

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (5)$$

Таким образом, если для временной реализации  $x(t)$  системы (1) построить на плоскости множество точек с координатами  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , то оно воспроизведет функцию  $f$ . Поскольку заранее величина  $\varepsilon_0$  не известна, приходится строить зависимости  $(\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$  от  $x(t - \tau_0)$  для различных значений  $\varepsilon$ , добиваясь однозначной зависимости на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , которая возможна лишь при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . В качестве количественного критерия однозначности при поиске  $\varepsilon_0$  будем использовать минимальную длину линии  $L(\varepsilon)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau_0)$ . Минимум зависимости  $L(\varepsilon)$  будет наблюдаться при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , а построенная при этом значении зависимость на плоскости  $(x(t - \tau_0), \varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t))$  воспроизведет нелинейную функцию, которую при необходимости можно аппроксимировать. В отличие от других методов [10, 11], использующих для восстановления нелинейной функции только экстремальные точки или удовлетворяющие определенным условиям, предлагаемый нами подход использует все точки временного ряда. Это позволяет по коротким временным рядам более полно восстанавливать нелинейную функцию даже в случаях слаборазвитого хаоса.

## 2. Примеры восстановления уравнения систем с задержкой

Для проверки работоспособности предлагаемого нами подхода мы реконструировали уравнения систем с запаздыванием вида (1) по временным рядам, полученным при их численном решении, а также получали модельные дифференциальные уравнения реальных кольцевых генераторов по экспериментальным временным рядам. Для построения зависимостей  $N(\tau)$  всюду в работе мы использовали 10000 точек временного ряда, а для построения зависимостей  $L(\varepsilon)$  и восстановления функции  $f$  лишь 1000 точек временного ряда (раздел 2.1) и 2000 точек (раздел 2.2). Для оценки производной по временному ряду мы использовали параболическую аппроксимацию.

**2.1. Реконструкция уравнения Маккея - Гласса.** Мы применили метод к временным рядам, полученным из уравнения Маккея - Гласса

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau_0)}{1 + x^c(t - \tau_0)}, \quad (6)$$

которое может быть приведено к виду (1) с  $\varepsilon_0 = 1/b$  и

$$f(x(t - \tau_0)) = \frac{ax(t - \tau_0)}{b[1 + x^c(t - \tau_0)]}, \quad (7)$$

Временной ряд был получен численным решением уравнения (6) методом Рунге - Кутты 4-го порядка с интерполяцией промежуточных значений внутри шага интегрирования. Параметры соответствовали движению системы на хаотическом аттракторе высокой размерности [9]. На рис. 4, а приведена часть временного ряда. Масштабы таковы, что 300 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки  $\tau_0 = 300$ . Весь ряд содержал около 600 экстремумов. На рис. 4, б приведена зависимость числа  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных друг от друга на время  $\tau$ , от величины  $\tau$ . На этом и последующих рисунках  $N$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда. В отсутствие шума для выделения экстремумов и построения  $N(\tau)$  можно даже обойтись без оценки  $\dot{x}_t$ , определяя экстремумы как локальные минимумы и максимумы временного

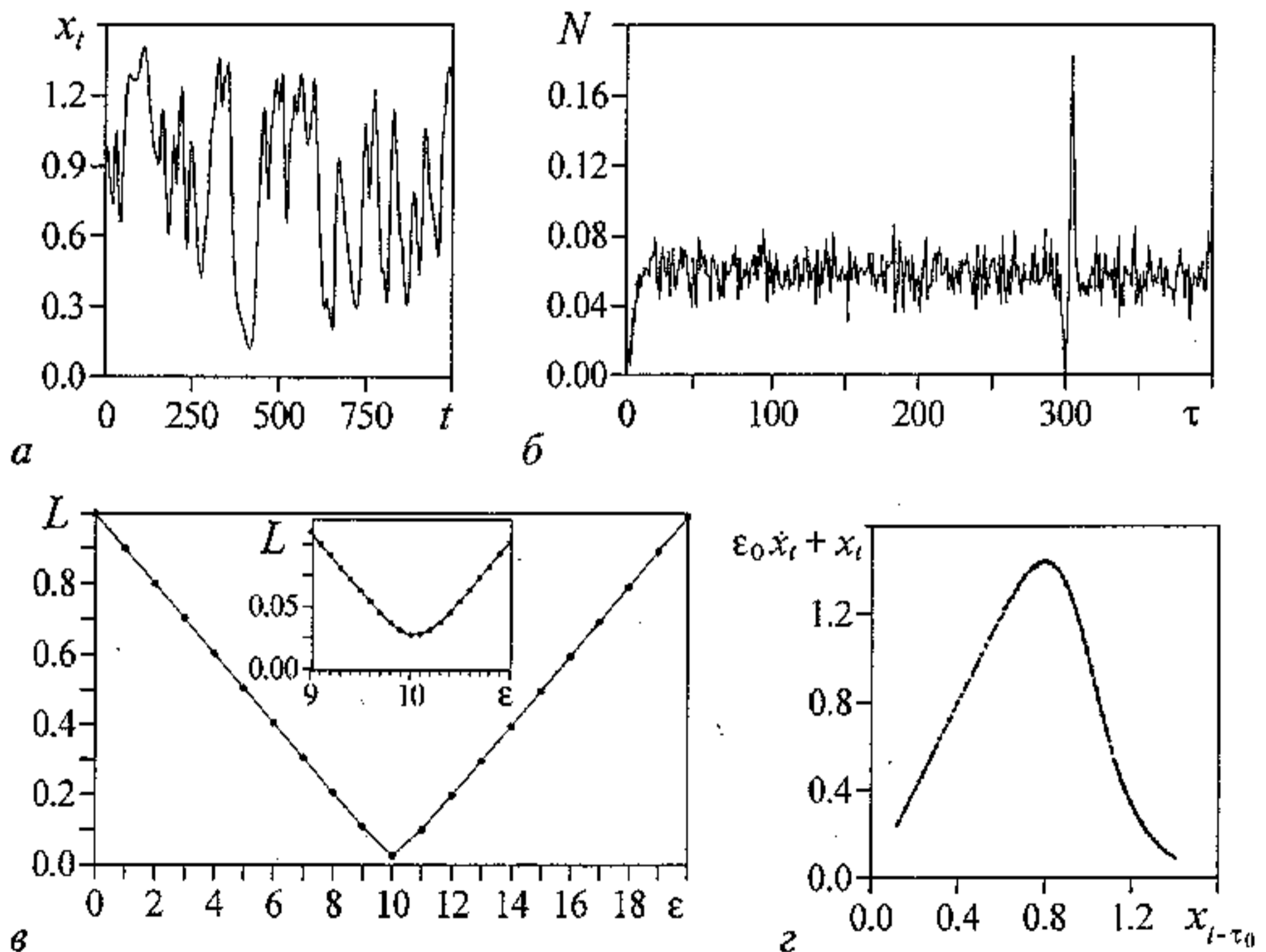


Рис. 4. а - 1000 точек реализации уравнения (6) при  $a=0.2, b=0.1, c=10, \tau_0=300$ . б - Нормированное число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга при  $\tau=1, \dots, 400$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда. в - Длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине  $x_{t-\tau_0}$  точки уравнения (6) на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$  в зависимости от  $\varepsilon$ .  $L(\varepsilon)$  нормировано таким образом, что наиболее неупорядоченному множеству точек соответствует  $L=1.0$ ;  $L_{\min}(\varepsilon) = L(10.0) = 0.027$ . г - Восстановленная нелинейная функция

ряда. Абсолютный минимум  $N(\tau)$  наблюдается точно при  $\tau=\tau_0=300$ , причем  $N(300)=0$ . При уменьшении длины  $M$  ряда и, соответственно, числа экстремумов, этот минимум на графике  $N(\tau)$  становится все менее ярко выраженным, а при  $M < 2500$ , когда ряд содержит порядка 150 экстремумов, появляются дополнительные минимумы с  $N(\tau)=0$ . На рис. 4, в представлена зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \epsilon \dot{x}_t + x_t)$ , от  $\epsilon$ . Для уменьшения времени счета начальный шаг изменения параметра  $\epsilon$  можно выбрать большим, а затем уменьшить его в окрестности минимума  $L(\epsilon)$ . Так, на выделенном фрагменте шаг изменения  $\epsilon$  уменьшен до 0.1. Минимум зависимости

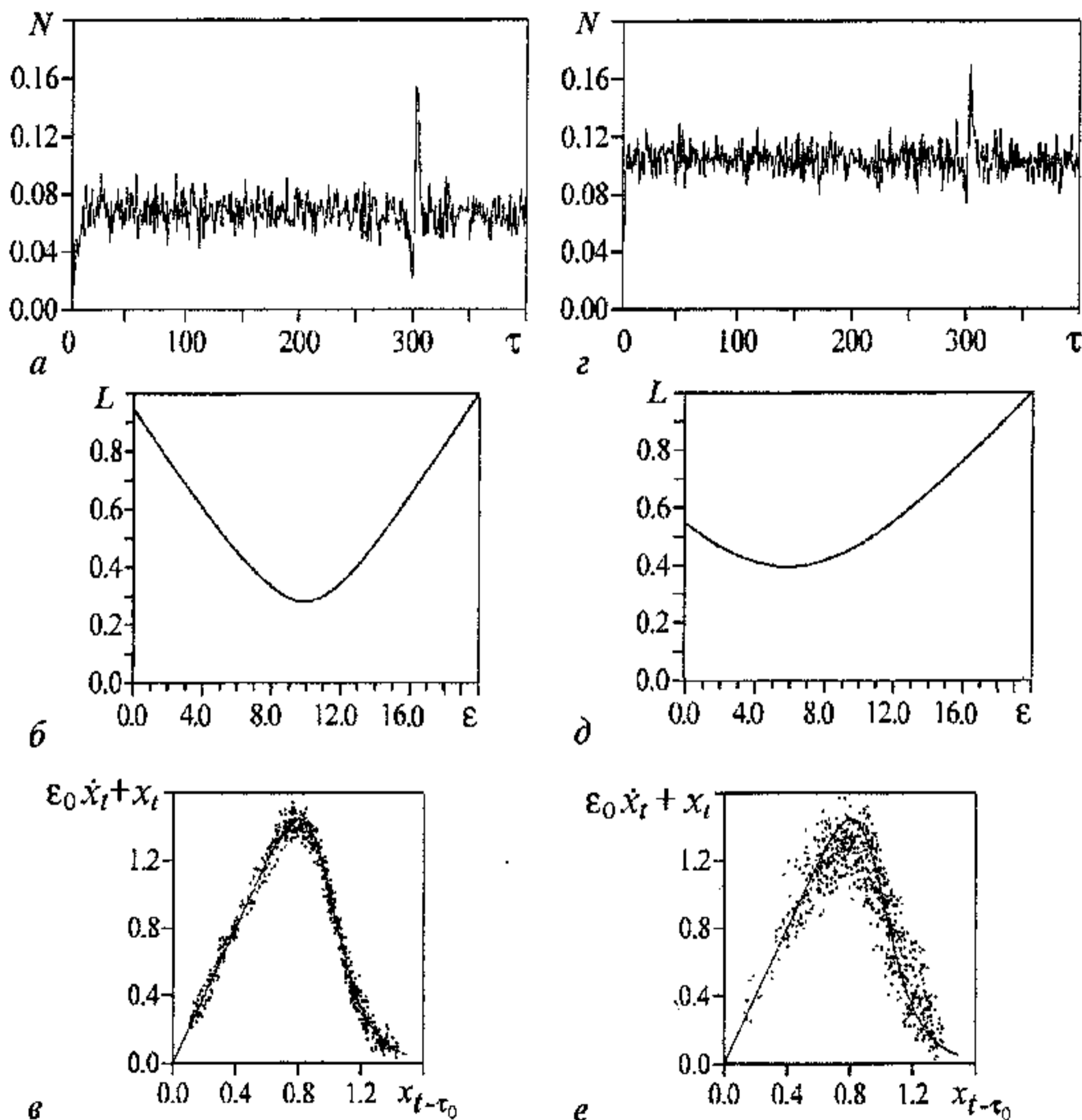


Рис. 5. Оценка времени запаздывания, параметра инерционности и восстановление функции по временным рядам уравнения Маккея - Гласса с добавленным гауссовым белым шумом. *а, з* - Нормированное число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, при 3% (*а*) и 10% (*з*) шуме.  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов временного ряда.  $N_{\min}(\tau)=N(300)=0.02$  (*а*),  $N_{\min}(\tau)=N(300)=0.07$  (*з*). *б, д* - Зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \epsilon \dot{x}_t + x_t)$ , от  $\epsilon$  при 3% и 10% шуме, соответственно.  $L_{\min}(\epsilon)=L(9.9)=0.28$  (*б*),  $L_{\min}(\epsilon)=L(6.0)=0.39$  (*д*). *в, е* - Нелинейная функция (7) (сплошная линия) и восстановленная функция (точки) при 3% (*в*) и 10% (*е*) шуме и  $\epsilon$ , соответствующем минимуму  $L(\epsilon)$

$L(\varepsilon)$  позволяет точно определить параметр  $\varepsilon_0 = 1/b = 10$ . На рис. 4, г приведена нелинейная функция, восстановленная при найденном  $\varepsilon_0$ . Она практически совпадает с истинной функцией (7).

Для демонстрации возможностей метода при наличии шума мы использовали ряды, полученные при добавлении к временному ряду уравнения (6) гауссова белого шума, имеющего нулевое среднее значение и среднеквадратичное отклонение, составляющее 3% и 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда. При увеличении уровня шума абсолютный минимум на графике  $N(\tau)$  становится все менее ярко выраженным, параметр инерционности определяется по минимуму  $L(\varepsilon)$  менее точно, а множество точек на плоскости  $(x_{t-\tau_0}, \varepsilon \dot{x}_t + x_t)$  становится все более рассредоточенным (рис. 5). При более высоких уровнях шума на  $\tau = \tau_0$  уже более не наблюдается абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$ .

**2.2. Восстановление уравнения генератора с запаздывающей обратной связью.** На рис. 6, а приведена блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью для случая, когда фильтром является низкочастотный RC-фильтр первого порядка. Мы использовали для восстановления уравнения временные ряды двух модельных систем: полученные в численном эксперименте и в физическом с использованием реального фильтра, компьютера, аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. Реконструкция велась по временному ряду напряжения  $V$  на конденсаторе фильтра. Из законов Кирхгофа можно получить модельное уравнение такой системы

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)), \quad (8)$$

где  $V(t)$  и  $V(t - \tau_0)$  - напряжения на входе и выходе линии задержки,  $R$  и  $C$  - сопротивление и емкость элементов фильтра. Уравнение (8) имеет вид (1) с  $\varepsilon_0 = RC$ . На рис. 6, б представлены первые 2000 точек исследуемого временного ряда, полученного путем численного решения уравнения (8), нелинейная функция в котором имела вид

$$f(V) = \lambda - V^2, \quad (9)$$

где  $\lambda$  - параметр нелинейности. Масштабы таковы, что 1000 точек ряда занимали временной интервал, равный времени задержки  $\tau_0 = 1000$ . Весь ряд содержал около 400 экстремумов. Зависимость  $N(\tau)$  (рис. 6, в), позволяет точно определить  $\tau_0$ , а  $L(\varepsilon)$  - точно определить  $\varepsilon_0$  (рис. 6, г). На рис. 6, д показана восстановленная нелинейная функция. Значение  $RC$  может быть оценено по величине  $\tau_s = \tau_m - \tau_0$ , где  $\tau_m$  - значение, при котором наблюдается абсолютный максимум зависимости  $N(\tau)$  (см. рис. 2). Меняя в широких пределах значения  $RC$ ,  $\lambda$  и  $\tau_0$ , мы получили эмпирическую зависимость  $\tau_s \approx RC/2 = \varepsilon_0/2$ . То есть для приближенной оценки величины  $RC$  может быть непосредственно использована зависимость  $N(\tau)$  и соотношение  $RC \approx 2\tau_s$ . Заметим, что при наличии шума такая оценка может оказаться точнее других. Поскольку максимум зависимости  $N(\tau)$  четко различим при уровне шума, в 2-3 раза большем минимального, значение  $\tau_m$  может быть использовано для оценки  $\tau_0$  сверху по сильно зашумленным временным рядам.

На рис. 7 представлены результаты применения метода к экспериментальному временному ряду, полученному при использовании радиофизического RC-фильтра в схеме на рис. 6, а. Нелинейный элемент и линия задержки моделировались на компьютере. По временному ряду, записанному с шагом выборки на порядок меньшим времени инерционности системы, время задержки определяется точно (рис. 7, а). Об этом свидетельствует и близость восстановленной нелинейной функции (рис. 7, б) к однозначной зависимости.



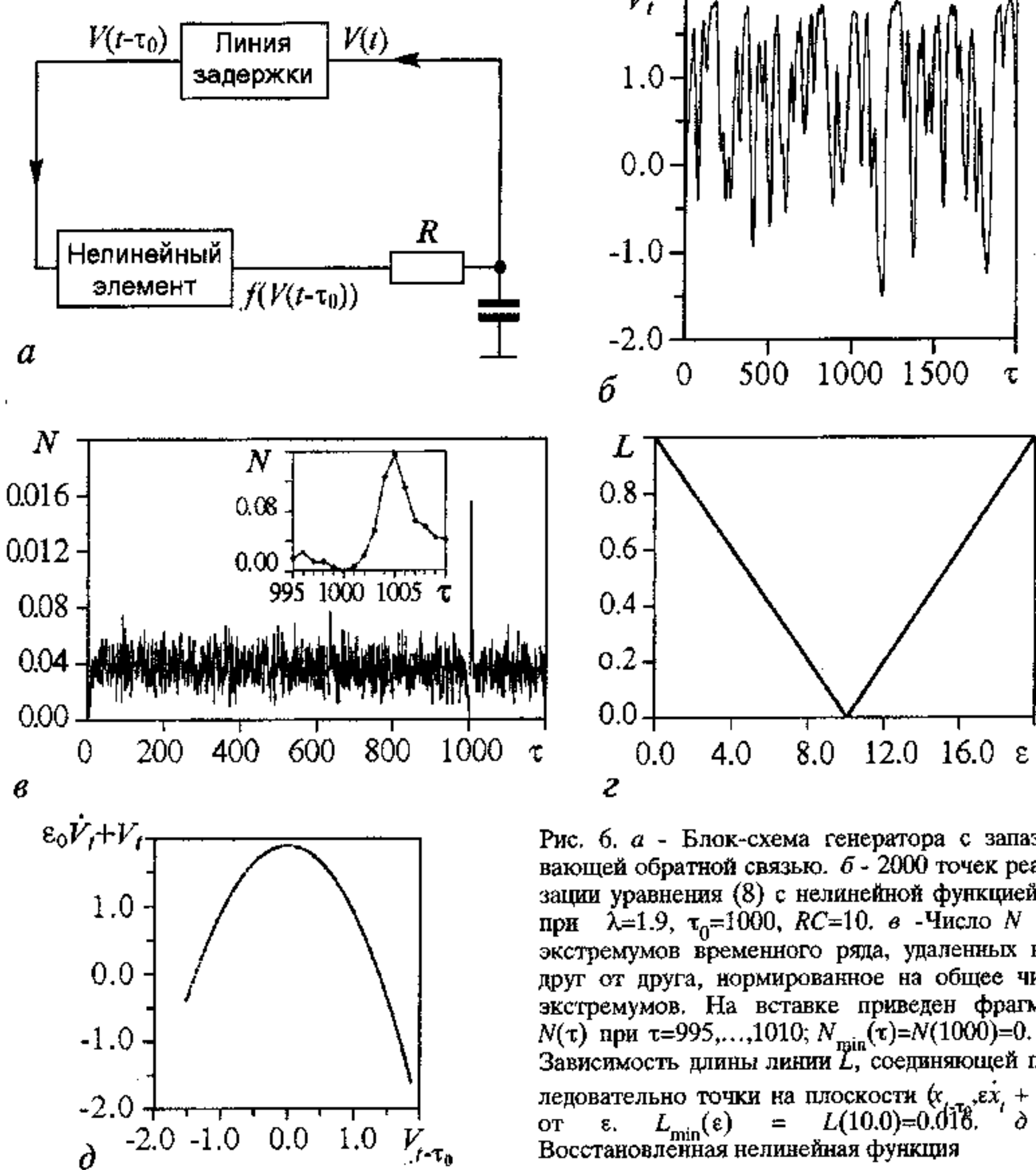


Рис. 6. а - Блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью. б - 2000 точек реализации уравнения (8) с нелинейной функцией (9) при  $\lambda=1.9$ ,  $\tau_0=1000$ ,  $RC=10$ . в - Число  $N$  пар экстремумов временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов. На вставке приведен фрагмент  $N(\tau)$  при  $\tau=995, \dots, 1010$ ;  $N_{\min}(\tau)=N(1000)=0$ . г - Зависимость длины линии  $L$ , соединяющей последовательно точки на плоскости  $(x_{(t-\tau_0)}, \epsilon \dot{x}_t + x_t)$ , от  $\epsilon$ .  $L_{\min}(\epsilon) = L(10.0) = 0.016$ . д - Восстановленная нелинейная функция

### Заключение

Нами предложен метод реконструкций по экспериментальным временным рядам дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием вида (1). Метод опирается на характерное расположение квадратичных экстремумов во временных рядах и статистический анализ временных интервалов между ними. Так как при наличии инерционности квадратичность экстремумов типична, практически можно сопоставлять все экстремумы ряда. По абсолютному минимуму зависимости  $N(\tau)$  удастся определить значение времени запаздывания  $\tau_0$ , а затем использовать его для оценки величины  $\epsilon_0$  и восстановления нелинейной функции. Продемонстрирована работоспособность метода при реконструкции дифференциальных уравнений с запаздыванием по сгенерированным ими временным рядам, в том числе и при наличии достаточно высокого уровня шума, а также при конструировании моделей реальных систем с запаздыванием. Поскольку максимум зависимости  $N(\tau)$  более ярко выражен, чем ее минимум, и

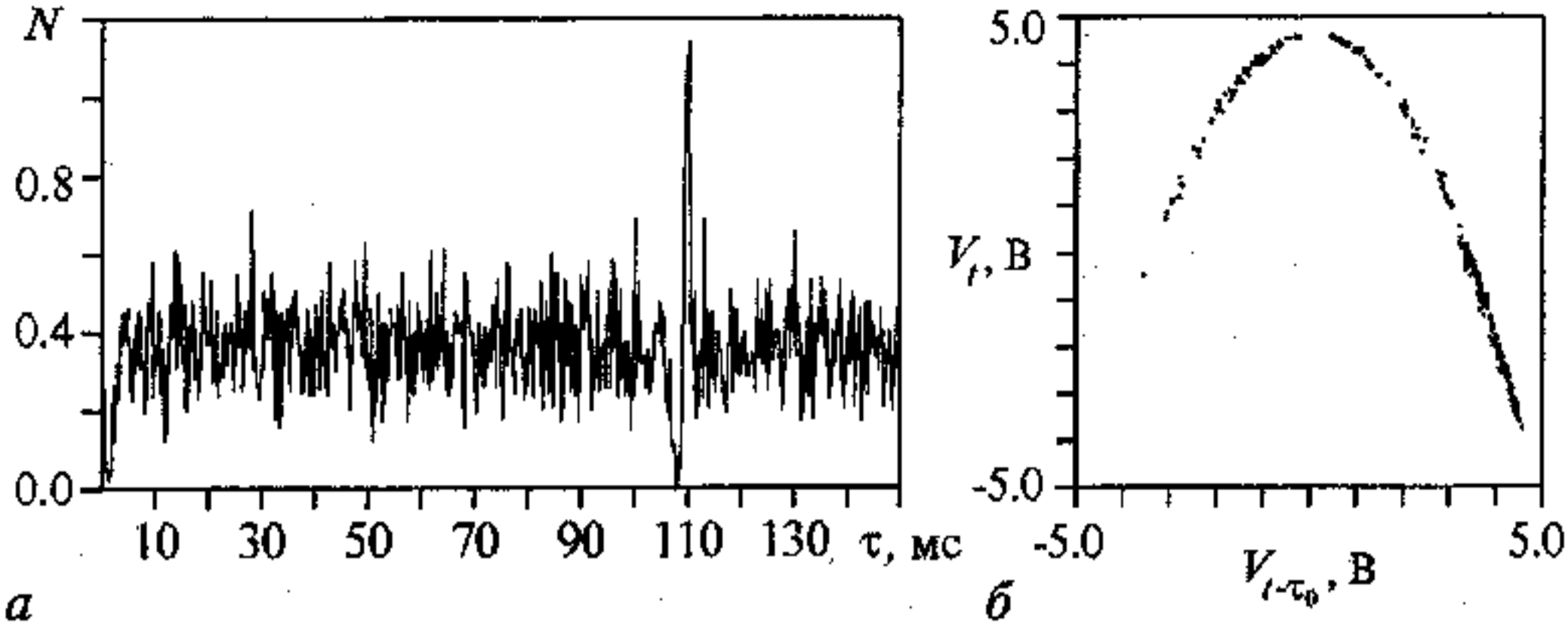


Рис. 7. а - Число  $N$  пар экстремумов экспериментального временного ряда, удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов.  $\tau_0 = 108$  мс,  $N_{\min}(\tau) = N(108 \text{ мс}) = 0$ . б - Восстановленная нелинейная функция

четко различим при уровне шума, в 2-3 раза большем минимального, его положение может быть использовано само по себе для оценки времени запаздывания  $\tau_0$  сверху по сильно зашумленным временным рядам. Предложенный способ определения времени запаздывания использует только операции сравнения и сложения, не применяя ни сортировку точек, ни вычисление ошибки аппроксимации или каких-либо мер сложности движения, а поэтому не требует больших вычислительных затрат. Последнее перспективно для обработки данных в реальном времени и для создания устройств экспресс-анализа с помощью компактных вычислительных устройств. Применение метода может также оказаться перспективным при разработке подходов, альтернативных предложенным в [14, 24], для решения задачи выделения сигнала сообщения, зашумленного хаотическим сигналом системы с запаздыванием.

Рассмотренный на примере систем вида (1) способ определения времени запаздывания по графику зависимости  $N(\tau)$  может быть успешно применен к временным рядам систем с запаздыванием более общего вида

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_0)). \quad (10)$$

Продифференцировав уравнение (10) по времени, получим

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (11)$$

Для этого уравнения, так же как и для уравнения (4), в случае квадратичных экстремумов  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_0)$  одновременно в ноль не обращаются: если  $\dot{x}(t) = 0$ , то  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$ .

Предложенный нами способ определения  $\tau_0$  по временному ряду в принципе может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка, имеющие вид

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_0)), \quad (12)$$

где  $x^{(n)}(t)$  -  $n$ -я производная переменной  $x(t)$  по времени,  $a_1, \dots, a_{n-1}$  - коэффициенты. Дифференцирование уравнения (12) по  $t$  дает

$$x^{(n+1)}(t) + a_1 x^{(n)}(t) + \dots + a_{n-1} \ddot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_0))}{\partial x(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (13)$$

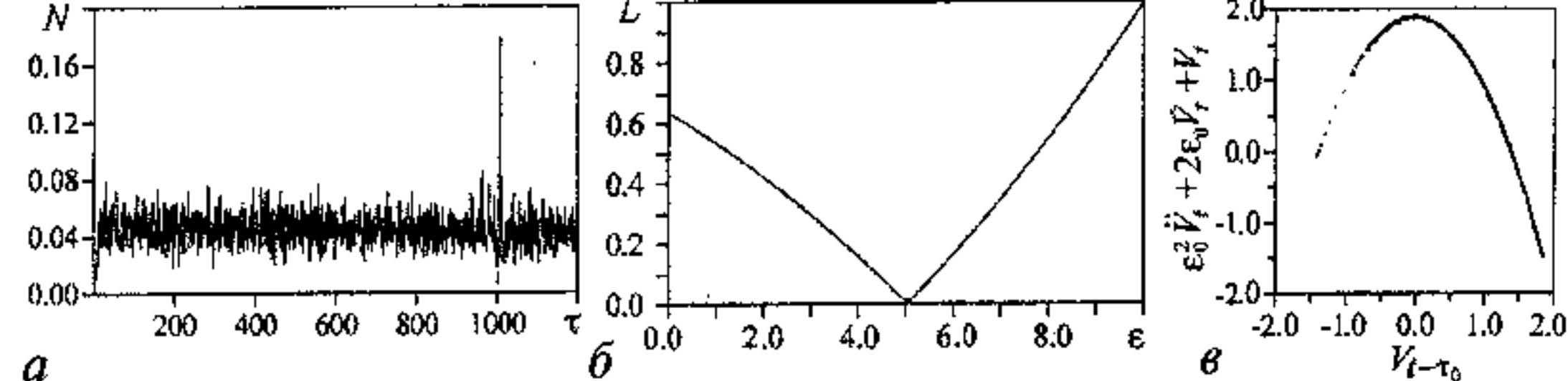


Рис. 8. *а* - Число  $N$  пар экстремумов временного ряда системы (14), удаленных на  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов.  $\tau_0=1000$ ,  $\lambda=1.9$ ,  $\epsilon=5$ .  $N_{\min}(\tau)=N(1000)=0.006$ . *б* - Зависимость  $L(\epsilon)$ ,  $L_{\min}(\epsilon)=L(5.0)=0.013$ . *в* - Восстановленная нелинейная функция

При  $\dot{x}(t)=0$  условие  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$  должно выполняться в тех случаях, когда левая часть уравнения (13) отлична от нуля. Вероятность обращения левой части уравнения (13) в нуль в общем случае очень мала и поэтому график зависимости  $N(\tau)$  качественно должен иметь описанный нами вид.

В качестве иллюстрации мы применили метод к временным рядам генератора с запаздывающей обратной связью, изображенного на рис. 6, *а*, в котором последовательно с  $RC$ -фильтром был включен второй  $RC$ -фильтр, идентичный первому. Выведенное из законов Кирхгофа модельное уравнение такого генератора с двухзвенным фильтром имеет вид уравнения второго порядка с запаздыванием

$$\epsilon_0^2 \ddot{V}(t) + 2\epsilon_0 \dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)), \quad (14)$$

где  $V(t)$  и  $V(t - \tau_0)$  - напряжения на входе и выходе линии задержки,  $\epsilon = RC$ . На рис. 8, *а* график  $N(\tau)$  построен для временного ряда, полученного из численного решения уравнения (14) для случая, когда нелинейная функция имела вид (9). Абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$  позволяет точно определить  $\tau_0$ . Строя зависимости  $(\epsilon^2 \ddot{V}(t) + 2\epsilon \dot{V}(t) + V(t))$  от  $V(t - \tau_0)$  при вариации  $\epsilon$ , мы можем также оценить параметр  $\epsilon_0$  по минимуму  $L(\epsilon)$  и восстановить функцию  $f$  (рис. 8, *б*, *в*). Качество восстановления, однако, несколько ухудшается, так как процедура связана с численным определением второй производной. Таким образом, предложенный метод восстановления уравнений систем с задержкой по временному ряду может быть успешно применен к широкому классу систем с запаздыванием.

Авторы выражают благодарность профессору Б.П. Безручко за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний, сделанных при подготовке публикации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17578), гранта молодых ученых № 23 РАН, гранта CRDF № REC-006.

## Библиографический список

1. M.C. Mackey, L. Glass. Oscillations and chaos in physiological control systems // Science, 1977. Vol. 197. P. 287.
2. Gribkov D., Gribkova V. Learning dynamics from nonstationary time series: Analysis of electroencephalograms // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. P. 6538.
3. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) // Изв. вузов, Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410.
4. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике М.: Наука, 1989. 280 с.

5. Ikeda K. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // *Opt. Commun.*, 1979. Vol. 30. P. 257.
6. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Constructing nonautonomous differential equations from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 63, 016207.
7. Horbelt W., Timmer J., Büchner M. J., Meucci R., Ciofini M. Identifying physical properties of a CO<sub>2</sub> laser by dynamical modeling of measured time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. 016222.
8. Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B. Global reconstruction in the presence of a priori information // *Chaos, Solitons & Fractals*. 1998. Vol. 8. P. 1267.
9. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // *Physica D*. 1982. Vol. 4. P. 366.
10. Büchner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Rau U., Parisi J. Recovery of scalar time-delay systems from time series // *Phys. Lett. A*. 1996. Vol. 211. P. 345.
11. Büchner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Tool to recover scalar time-delay systems from experimental time series // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54. P. 3082.
12. Fowler A.C., Kember G. Delay recognition in chaotic time series // *Phys. Lett. A*. 1993. Vol. 175. P. 402.
13. Hegger R., Büchner M.J., Kantz H. Identifying and modeling delay feedback systems // *Phys. Rev. Lett.*, 1998. Vol. 81. P. 558.
14. Zhou C., Lai C.-H. Extracting messages masked by chaotic signals of time-delay systems // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60. P. 320.
15. Tian Y.-C., Gao F. Extraction of delay information from chaotic time series based on information entropy // *Physica D*. 1997. Vol. 108. P. 113.
16. Kaplan D.T., Glass L. Coarse-grained embeddings of time series: random walks, gaussian random process, and deterministic chaos // *Physica D*. 1993. Vol. 64. P. 431.
17. Büchner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J. Recovery of the time-evolution equation of time-delay systems from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56. P. 5083.
18. Voss H., Kurths J. Reconstruction of non-linear time delay models from data by the use of optimal transformations // *Phys. Lett. A*. 1997. Vol. 234. P. 336.
19. Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N., McCauley E., Briggs C.J. Inferring mechanism from time-series data: delay differential equations // *Physica D*. 1997. Vol. 110. P. 182.
20. Eurich C.W., Milton J.G. Noise-induced transitions in human postural sway // *Phys. Rev. E*, 1996. Vol. 54. P. 6681.
21. Ohira T., Sawatari R. Delay estimation from noisy time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55. P. 2077.
22. Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. 056216.
23. Караваяев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам // *Письма в ЖТФ*, 2001. Т.27. В.10. С. 43.
24. Mensour B., Longtin A. Synchronization of delay-differential equations with application to private communication // *Phys. Lett. A*. 1998. Vol. 244. P. 59.

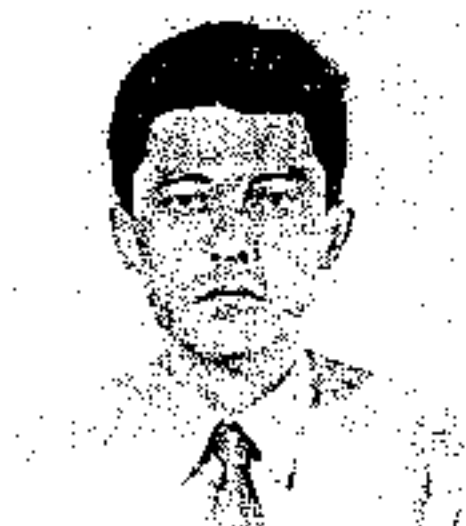
Саратовское отделение Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 21.02.02

# RECONSTRUCTION OF TIME-DELAY SYSTEMS EQUATIONS OVER EXPERIMENTAL TIME SERIES

*V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov*

We propose a new method to reconstruct the time-delay differential equations over time series. The method is based on extreme location in the time series. On the base of information about time delay we determine nonlinear function and inertiality parameter. We verify our method by using it for the reconstruction of the time-delay differential equations from their chaotic solutions and for modelling experimental systems with delay-induced dynamics from their chaotic time series.



*Пономаренко Владимир Иванович* - родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1992, СГУ). Работает старшим научным сотрудником в Саратовском отделении института радиотехники и электроники РАН, доцент ФНП. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное моделирование сложных систем, методы параллельной обработки информации. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Прохоров Михаил Дмитриевич* - родился в Саратове (1968). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1997, СГУ). Работает старшим научным сотрудником в Саратовском отделении института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное и численное моделирование сложных систем, исследование систем с запаздыванием. Имеет более 40 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: SBIRE@sgu.ru