Изв. вузов «ПНД», т.9, № 2, 2001 УДК 530.18

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Е.П. Селезнев, А.М. Захаревич

Численно исследуется многообразие резонансных циклов дискретной модели нелинейного осциллятора при двухчастотном воздействии с рациональным соотношением частот, подчиняющимся последовательности чисел Фибоначчи. Дана классификация циклов, прослежена эволюция структуры плоскости управляющих параметров в зависимости от соотношения частот.

В последние годы изучение систем, находящихся под квазипериодическим воздействием, привлекает к себе внимание в связи с изучением странных нехаотических аттракторов (СНА) [1-7]. Однако их исследование, особенно в физическом эксперименте, сопряжено с рядом трудностей, в частности, с нахождением области существования в пространстве управляющих параметров и определением бифуркаций, которые они претерпевают. В [5] предложен, а в [6,7] экспериментально апробирован метод перехода к странному нехаотическому аттрактору в нелинейном осцилляторе при двухчастотном воздействии, основанный на бифуркации резонансных циклов, чьи числа вращения принадлежат последовательности чисел Фибоначчи и в пределе стремятся к “золотому сечению”. В связи с этим возникает задача классификации многообразия резонансных движений, исследования их динамики и эволюции структуры плоскости управляющих параметров при последовательном изменении соотношения частот внешнего воздействия. В данной работе эта задача решается численно на примере отображения вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + \varepsilon \sin 2\pi y_n \\ y_{n+1} = y_n + \omega (\mathrm{mod} 1), \end{cases} \tag{1}$$

где x_n, y_n - динамические переменные, λ и ε - управляющие параметры, ω - характеризует соотношение частот внешнего воздействия.

При рациональных значениях параметра $\omega = k/m$ (где k и m - целые числа) система (1) демонстрирует многообразие резонансных циклов, которые с изменением параметров λ и ε эволюционируют к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Анализ фазовых портретов показывает, что для исследования и классификации циклов удобно использовать их стробоскопические сечения с периодом $1/\omega$. Такой подход позволяет сформулировать общий принцип классификации циклов системы (1): при $\varepsilon=0$ каждый цикл периода N может быть реализован m способами (где m известно из соотношения $\omega=k/m$ и соответствует наименьшему периоду цикла системы (1)), определяемыми фазой воздействия y_n. В силу того, что y_n принимает дискретные значения, в соответствии с данным принципом классификации при $\varepsilon=0$ циклы системы (1) отличаются сдвигом между значениями y, аналогично [8].

На рис. 1 на плоскости параметров (λ,ε) приведены линии бифуркаций циклов при $\omega=1/2$. Светлые области соответствуют периодическим режимам, серые – хаотическим, тонкими сплошными обозначены линии бифуркаций удвоения периода (мультипликатор циклов на них обращается в -1), жирными – седлоузловые бифуркации (мультипликатор циклов на них обращается в $+1$), l_0

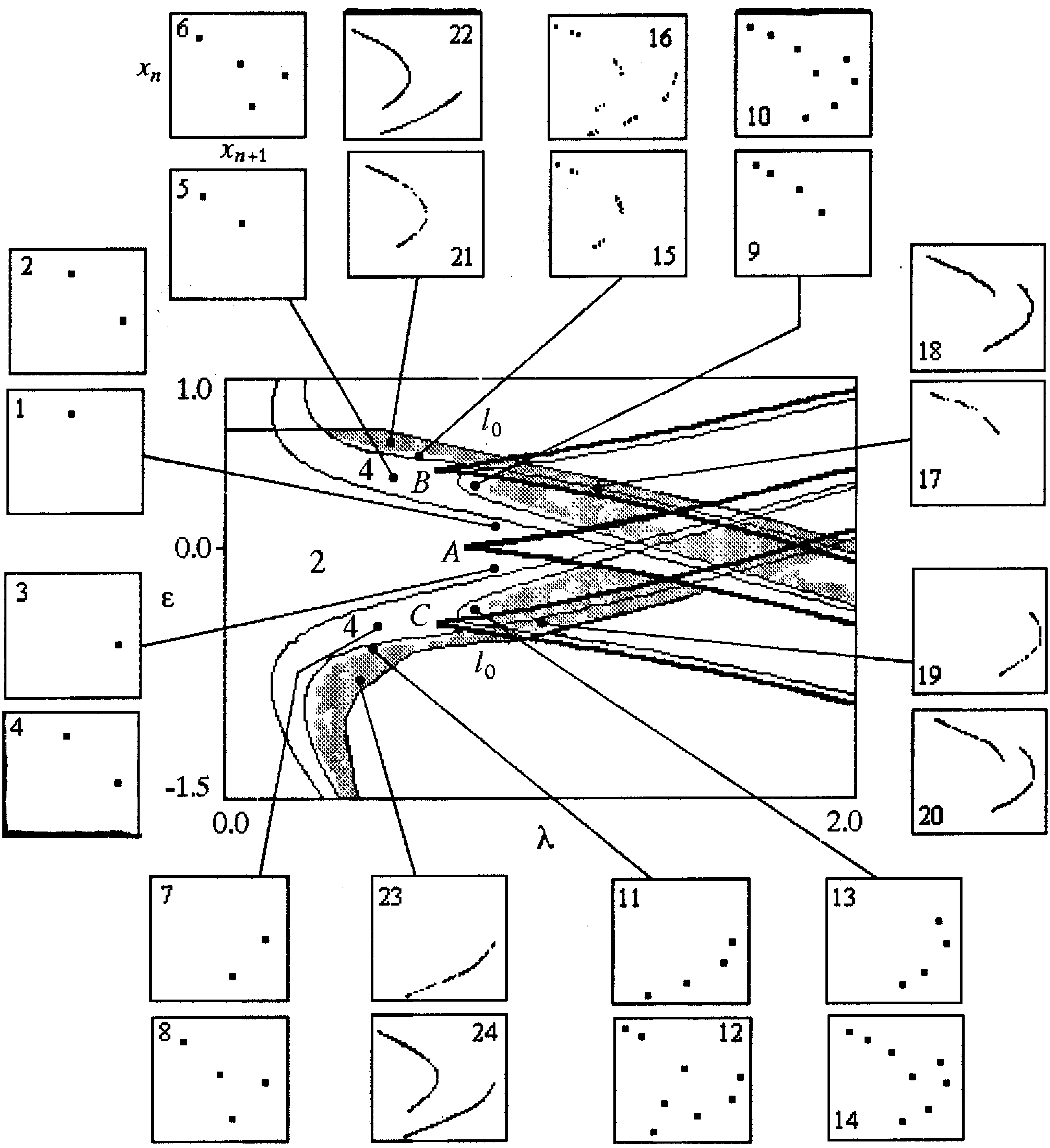

Рис. 1. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ε) при значении $\omega=1/2$

отмечена линия, за пределами которой система с нулевых начальных условий убегает на бесконечность. В выделенных фрагментах на плоскости (x_{n+1}, x_n) представлены фазовые портреты циклов и их сечения Пуанкаре при фазе стробирования y=0. Плоскость параметров изобилует структурами типа «crossroad», на ней имеется сборка A с координатами (0.75, 0), линии складки которой ограничивают области существования двух базовых циклов периода m=2. Фрагменты 1, 2 и 3, 4 иллюстрируют фазовые портреты и стробоскопические сечения этих циклов при значениях параметров λ=0.9, ε=0.1 и λ=0.9, ε=−0.1, соответственно. Циклы имеют одинаковые фазовые портреты и отличить их можно только по сечениям Пуанкаре. С изменением управляющих параметров каждый из этих циклов демонстрирует удвоения периода. В области существования циклов удвоенного периода имеются сборки B и C, а общее количество циклов равно уже 4 (фрагменты 5–12 на рис.1). Следует отметить, что стробоскопические сечения их фазовых портретов напоминают противофазные циклы в связанных квадратичных отображениях [8].

В случае ω=2/3 количество сборок и бифуркационных структур типа «crossroad» на плоскости параметров увеличивается (рис. 2). Здесь имеется три

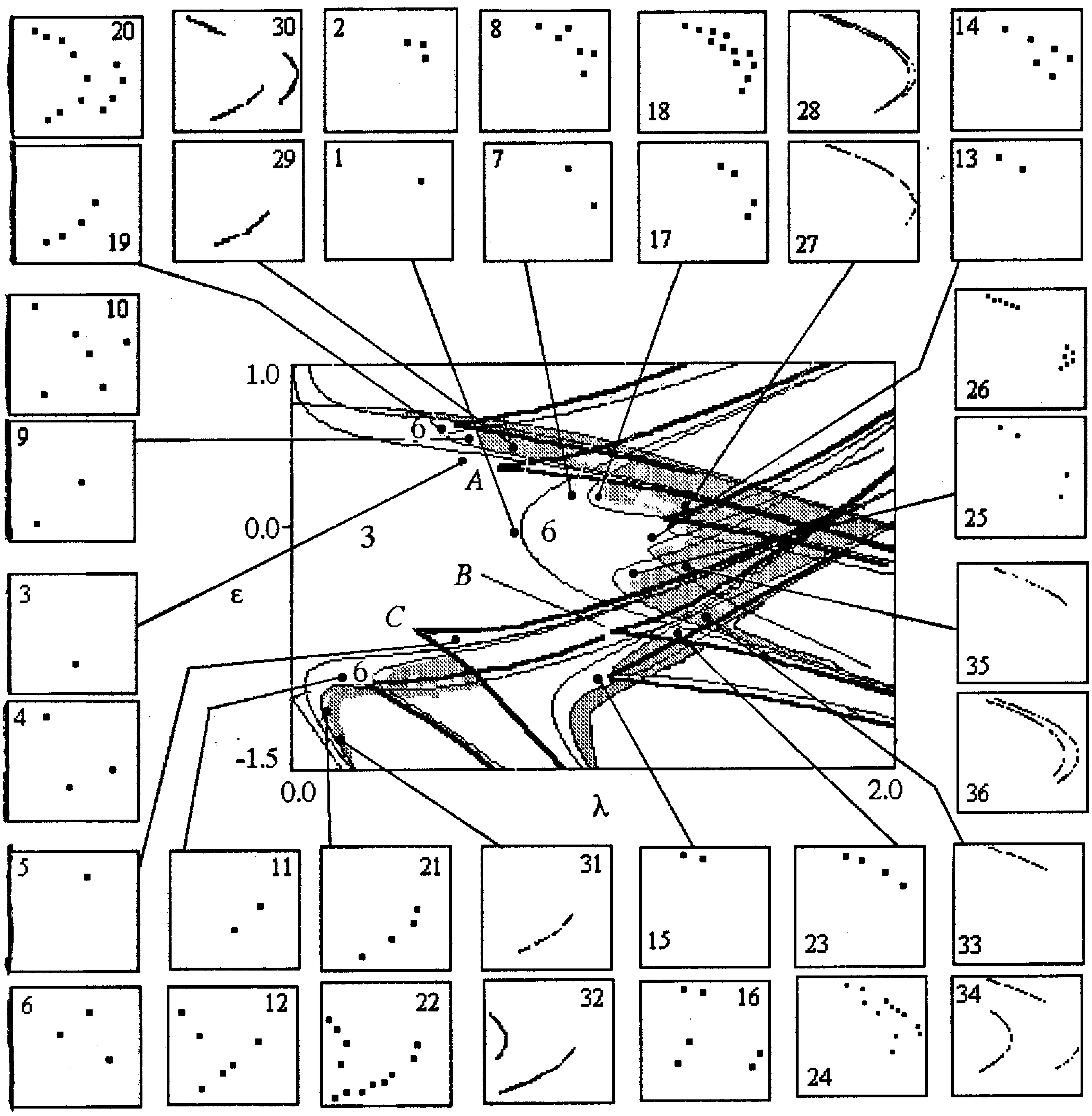

Рис. 2. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ε) при значении ω=2/3

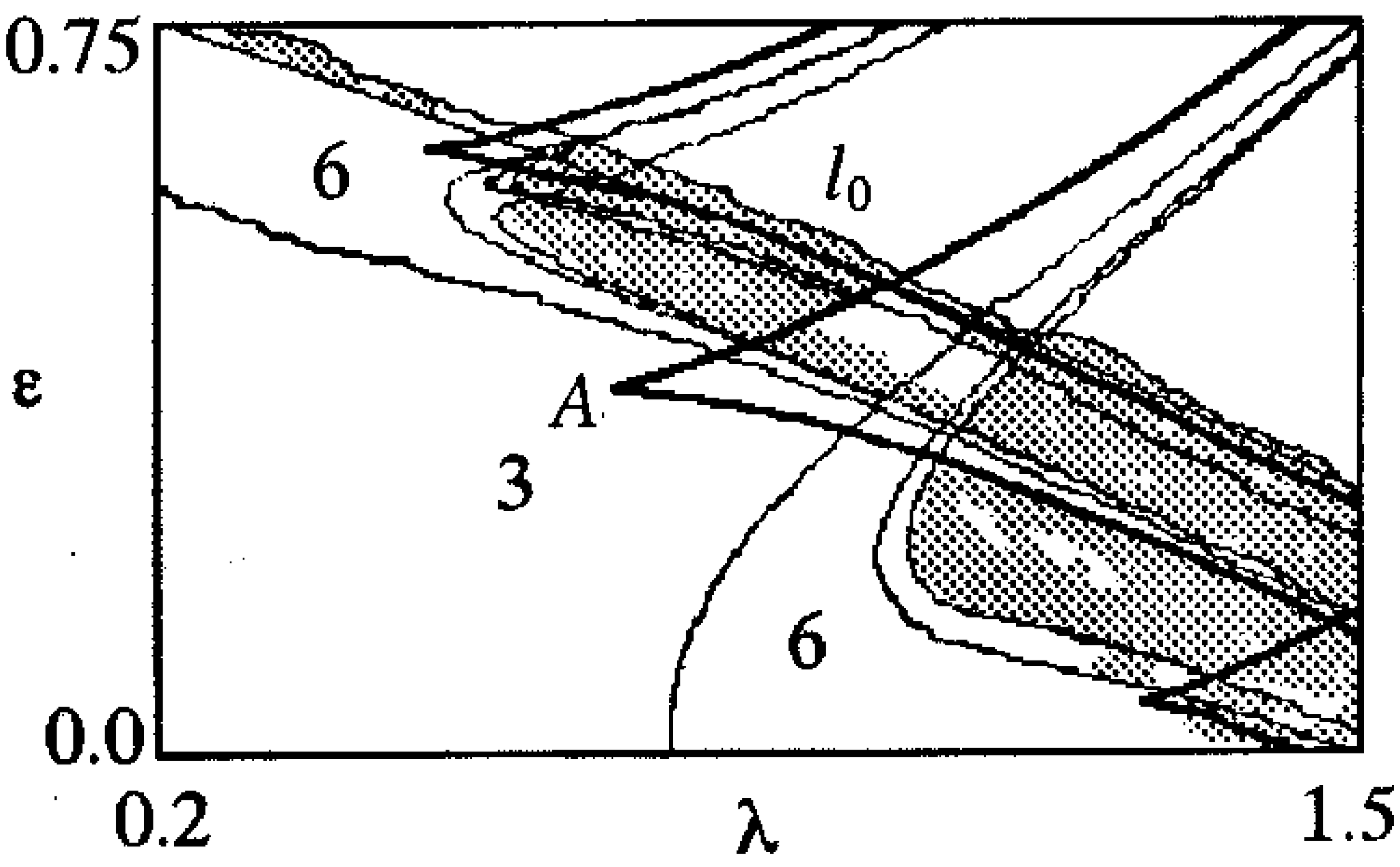

Рис. 3. Увеличенный фрагмент рис. 2

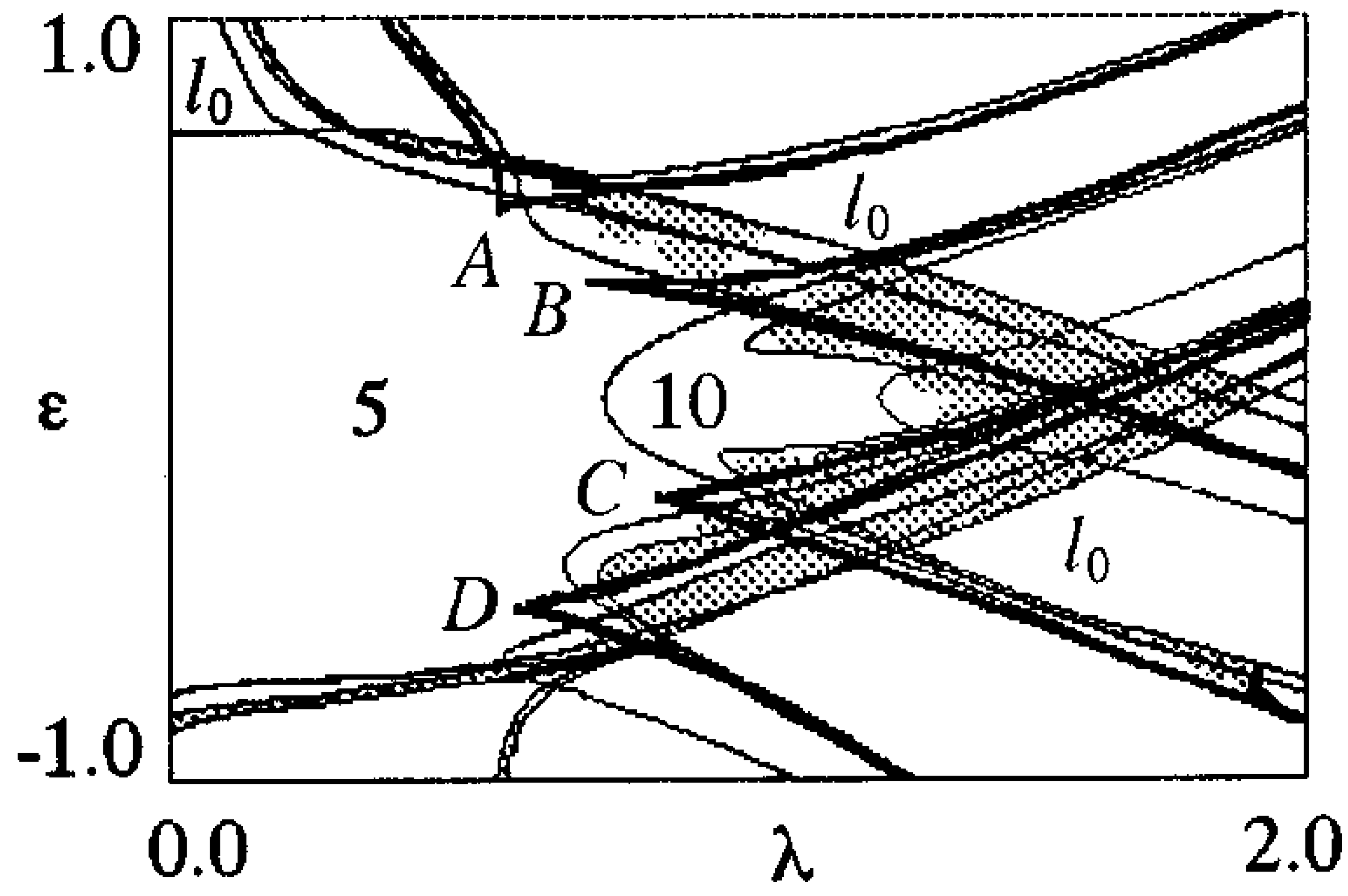

Рис. 4. Структура плоскости управляющих параметров (λ, ε) при значении ω=3/5

сборки A, B, C, линии складки которых ограничивают области существования трех базовых циклов периода 3 (фрагменты 1–6). С изменением параметров эти циклы эволюционируют к хаосу через последовательность удвоений периода, при этом в результате удвоения на базе каждого формируется пара циклов – синфазный и несинфазный (фрагменты 7–16 на рис.2). Стробоскопическое сечение синфазного цикла располагается вдоль диагонали фазовой плоскости (фрагменты 9–12), а противофазного – трансверсально (фрагменты 7, 8 и 13–16). С изменением параметров циклы эволюционируют к хаосу через последовательность удвоений периода, а в итоге на базе каждого цикла формируется m–связный хаотический аттрактор. Рис. 3 иллюстрирует увеличенный фрагмент плоскости параметров при ω=2/3. Из рис. 3 видно, что внутри областей существования циклов удвоенного периода имеются структуры типа «crossroad», внутри областей циклов более высокого порядка также формируются структуры типа «crossroad», и такая последовательность наблюдается вплоть до перехода к хаосу.

С дальнейшим изменением параметра ω количество базовых циклов растет, плоскость параметров (λ, ε) становится более изрезанной, количество структур типа «crossroad» на ней увеличивается. Рис. 4 иллюстрирует структуру плоскости управляющих параметров (λ, ε) для ω=3/5.

Сопоставление рис. 1–4, а также численные исследования для других значений ω показывают, что при нечетных значениях m для бифуркационных линий, проходящих через точку λ=0.75, ε=0, сохраняется (по сравнению с квадратичным отображением) значение мультипликатора, равное –1 (см. рис. 2, 3). При четных знаменателях m значение мультипликатора цикла в этой точке равно +1, для m=2 эта точка является точкой сборки, на складках которой происходят седло–узловые бифуркации (см. рис. 1), а для других четных значений наблюдается бифуркация потери симметрии, последнее связано с симметрией циклов для четных значений m относительно вращения [9].

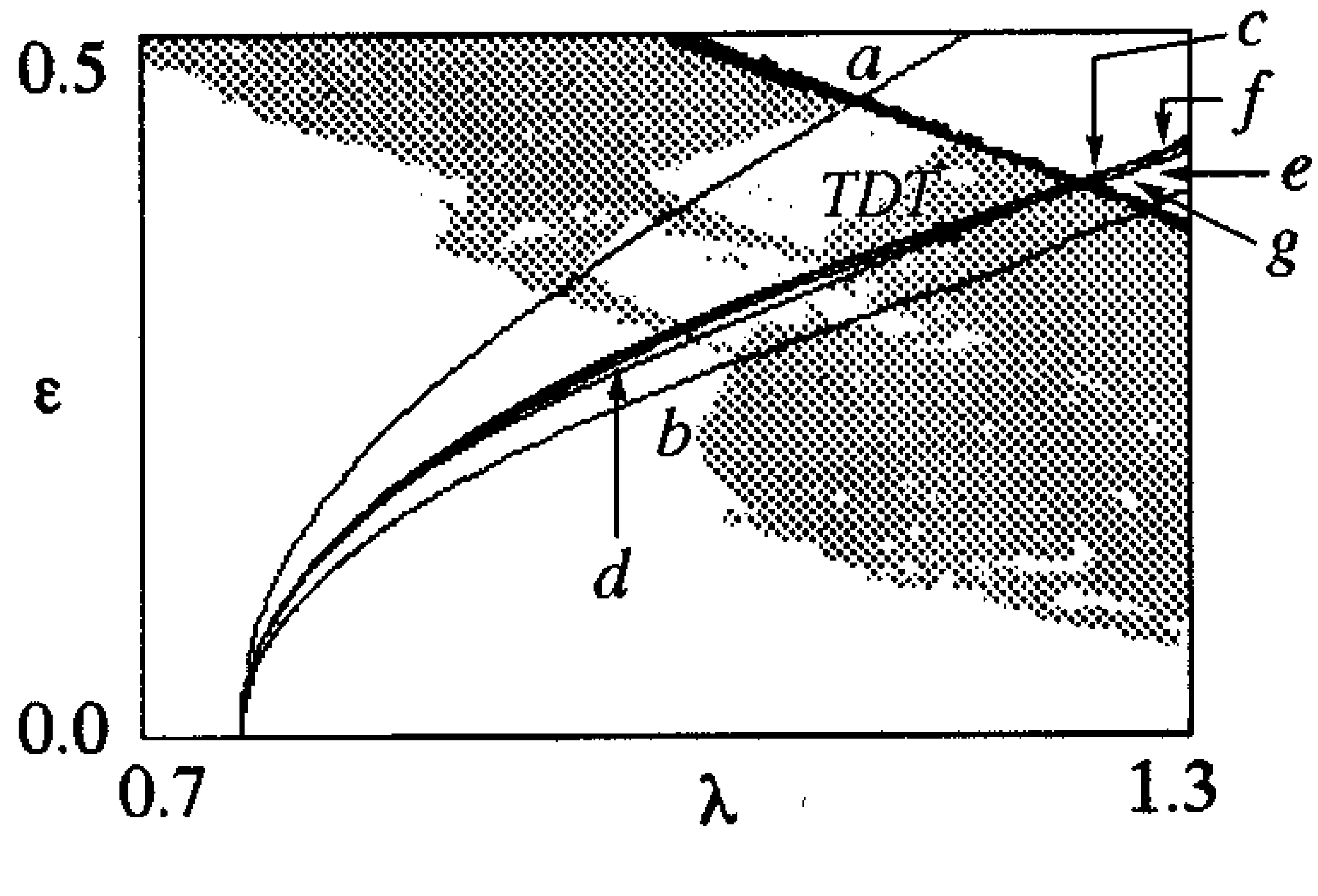

Рис. 5. Сходимость линий бифуркаций удвоения периода и потери симметрии (для ω=5/8, 21/34) при изменении частоты воздействия: кривая a соответствует ω=2/3, b – ω=3/5, c – ω=5/8, d – ω=8/13, e – ω=13/21, f – ω=21/34, g – ω=34/55. Точка TDT соответствует терминальной точке при $\omega=(5^{1/2}-1)/2$

Таким образом, при рациональных значениях ω для многообразия циклов системы справедлив принцип, предложенный для связанных систем с удвоением периода, основанный на временном сдвиге (или сдвиге фаз) колебаний в подсистемах. С приближением параметра ω к «золотому сечению» $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ количество циклов увеличивается. Соответственно, на плоскости параметров растет множество областей типа «crossroad»; граница перехода к хаосу для каждого цикла остается гладкой, однако в целом плоскость параметров имеет сложную многолистную структуру. Такая последовательность изменений объясняет сложный, изрезанный вид границы перехода к хаосу для иррационального значения ω. При этом линия бифуркации удвоения периода одного из базовых (периода m) циклов, а также линия потери симметрии, проходящие через точку плоскости параметров $\lambda=0.75$, $\varepsilon=0$, в пределе стремятся к линии бифуркации удвоения тора, что иллюстрирует рис. 5.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99–02–17735, при поддержке U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Avard № REC–006 и Федеральной Программы «Интеграция», грант № 696.3

Библиографический список

1. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* // Physica D. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. *Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* // Physica D. 1995. Vol. 88. P. 176.
3. *Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. R 1629.
4. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.N.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4451.
5. *Kuznetsov S., Pikovsky A., Feudel U.* // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P.1585.
6. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, №6. С. 3.
7. *Bezruchko B.P., Kuznetsov S.P., Seleznev Ye.P.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, №6. P. 7828.
8. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* // ЖТФ. 1990. Т. 60, №10. С.19.
9. *Krupa M., Roberts M.* // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 417.

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН, Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 18.01.2001

STRUCTURE OF THE CONTROL PARAMETERS SPACE IN THE MODEL OF THE NONLINEAR OSCILLATOR UNDER TWO–FREQUENCY DRIVING

Ye.P. Seleznev, A.M. Zakharevich

Manifold of resonance cycles of the discrete model of nonlinear oscillator under two–frequency external force with rational frequency ratio is investigated numerically. Classification of cycles is down and dependence of structure evolution of the control parameter plane from frequency ratio is investigated.