

01;09

## Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам

© А.С. Караваев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: mdprokh@ire.san.ru

Поступило в Редакцию 9 января 2001 г.

Предложен новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временным рядам. Метод отличается простотой, быстродействием и может быть успешно применен для анализа зашумленных данных. Работоспособность метода проиллюстрирована на примере временных рядов, полученных в численном эксперименте, в том числе при добавлении шума, и на примере временных рядов реальной радиофизической системы.

1. Системы, динамика которых определяется не только текущим состоянием, но и состоянием в прошлом, т. е. системы с запаздыванием представляют собой большой класс динамических систем, для описания которых широко используются модели в виде дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [1–3]. Модельные уравнения могут быть восстановлены по экспериментальным временным рядам и использованы для определения параметров исследуемой системы с запаздыванием. В качестве таких моделей для многих физических и биологических систем с задержкой используются дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием, имеющие следующий общий вид:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_0)), \quad (1)$$

где  $x$  — динамическая переменная,  $f$  — нелинейная функция,  $\tau_0$  — время запаздывания,  $\varepsilon$  — безразмерный параметр, характеризующий отношение времени релаксации ко времени запаздывания. Для однозначного определения эволюции системы необходимо задать начальные условия на всем интервале  $[x(t_0 - \tau_0), x(t_0)]$ . Таким образом, система обладает бесконечно большим числом степеней свободы, и для ее однозначного описания необходимо бесконечномерное фазовое пространство. Однако,

как было показано в работах [4,5], если спроецировать траекторию, задаваемую уравнением (1), из бесконечномерного фазового пространства в трехмерное пространство  $(x(t - \tau_0), x(t), \dot{x}(t))$ , то множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности. Сечение этой поверхности плоскостью  $\dot{x}(t) = 0$  определяет вид нелинейной функции, так как при этом согласно уравнению (1):

$$x(t) = f(x(t - \tau_0)). \quad (2)$$

Поскольку заранее время задержки  $\tau_0$  неизвестно, временной ряд проецируется в трехмерные пространства  $(x(t - \tau), x(t), \dot{x}(t))$  с различными значениями  $\tau$  и для  $\dot{x}(t) = 0$  строятся сечения  $(x(t - \tau), x(t))$  этих пространств. Однозначная зависимость (2) в этих сечениях будет иметь место лишь при  $\tau = \tau_0$ . В качестве количественного критерия при поиске  $\tau_0$  могут быть использованы, например, различные меры сложности спроецированного временного ряда [4–8] или минимальная ошибка прогноза построенной модели [9,10].

В нашей работе предложен новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временным рядам, в основе которого лежит статистический анализ производных наблюдаемой динамической переменной в точках ряда. Работа направлена на реконструкцию модельных дифференциальных уравнений вида (1): определение по временному ряду времени запаздывания  $\tau_0$ , нелинейной функции  $f(x(t - \tau_0))$  и параметра  $\varepsilon$ .

**2.** Предлагаемый метод базируется на следующих соображениях. Продифференцируем модельное уравнение (1) по времени:

$$\varepsilon \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{df(x(t - \tau_0))}{dx(t - \tau_0)} \dot{x}(t - \tau_0). \quad (3)$$

Для абсолютного большинства точек хаотической траектории уравнения (1)  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  одновременно в ноль не обращаются (в общем случае для функции  $x(t)$  условие  $\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$  может выполняться либо в точке, которая является точкой перегиба или точкой экстремума, отличного от квадратичного, либо должен быть интервал, на котором динамическая переменная не меняется). Тогда, если  $\dot{x}(t) = 0$ , то  $\ddot{x}(t) \neq 0$  и из уравнения (3) следует:  $\dot{x}(t - \tau_0) \neq 0$ . Это означает, что  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_0)$  одновременно в ноль не обращаются. При  $\tau \neq \tau_0$  соотношение (3) не выполняется и производные  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_0)$  могут быть равны

нулю одновременно. Проведенные рассуждения используются нами для определения по временному ряду заранее неизвестного времени запаздывания  $\tau_0$ . Для этого сначала найдем на траектории точки экстремумов, т.е. точки, для которых  $\dot{x}(t) = 0$ . Затем для различных значений  $\tau$  определим по всему временному ряду число  $N$  ситуаций, при которых  $\dot{x}(t) = \dot{x}(t - \tau) = 0$ . Построим зависимость  $N(\tau)$  (см., например, рис. 1, *b*). Абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$  будет наблюдаться при  $\tau = \tau_0$ . Предложенный нами способ определения времени запаздывания отличается простотой и быстродействием. Он требует в десятки раз меньше вычислительных затрат, чем известные методы восстановления систем с запаздыванием, поскольку после необходимого практически для каждого метода определения  $\dot{x}(t)$  использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления ошибки аппроксимации или каких-либо мер сложности движения<sup>1</sup>.

Определив время запаздывания  $\tau_0$ , мы можем восстановить вид нелинейной функции  $f(x(t - \tau_0))$ , откладывая на плоскости  $(x(t - \tau_0), x(t))$  точки, для которых  $\dot{x}(t) = 0$ . Согласно соотношению (2), построенная таким образом зависимость воспроизведет неизвестную априорно нелинейную функцию. Восстановив  $f(x(t - \tau_0))$ , можно найти и параметр  $\varepsilon$ , так как из уравнения (1):  $\varepsilon = (f(x(t - \tau_0)) - x(t))/\dot{x}(t)$ .

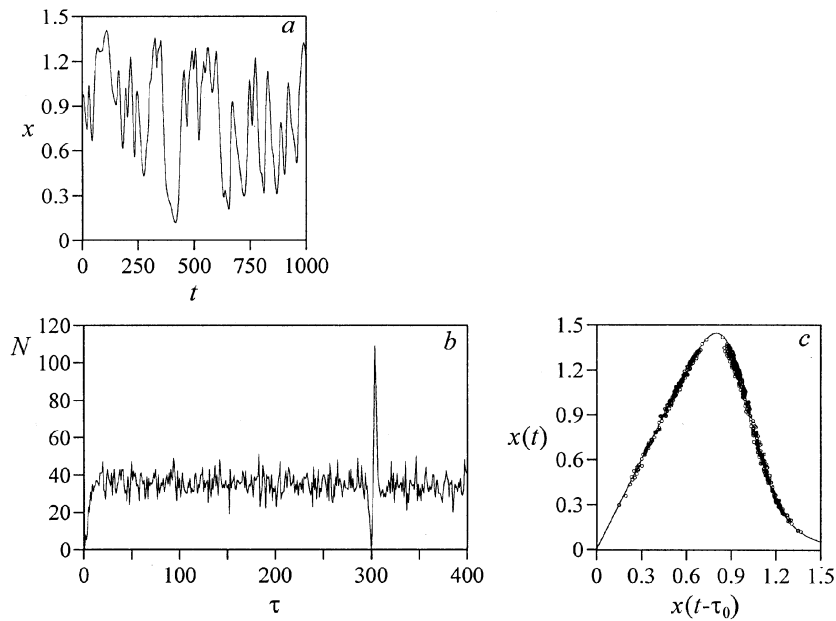
**3.** Работоспособность предложенного нами метода продемонстрирована на численных и экспериментальных примерах. Рассмотрим сначала скалярный временной ряд (рис. 1, *a*), сгенерированный уравнением Маккея–Гласса:

$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t - \tau_0)}{1 + x^c(t - \tau_0)} \quad (4)$$

при  $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$  и  $\tau_0 = 300$ , соответствующих движению на хаотическом аттракторе. Уравнение (4) может быть приведено к виду (1) при введении обозначений:  $\varepsilon = 1/b$  и

$$f(x(t - \tau_0)) = \frac{ax(t - \tau_0)}{b(1 + x^c(t - \tau_0))}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> Одновременно с  $\dot{x}(t)$  можно определять  $\ddot{x}(t)$  и исключать из рассмотрения точки ряда, для которых  $\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$ . Однако проведенные нами исследования свидетельствуют, что для большинства временных реализаций систем в режиме развитого хаоса можно ограничиться определением лишь первой производной, поскольку число точек, для которых выполняется условие  $\dot{x}(t) = \ddot{x}(t) = 0$ , либо равно нулю, либо ничтожно мало.



**Рис. 1.** *a* — временной ряд системы Маккея–Гласса при  $a = 0.2$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau_0 = 300$ ; *b, d, f* — зависимости  $N(\tau)$  в отсутствие шума соответственно при 3 и 10%-ном шуме; *c, e, g* — нелинейная функция (5) (сплошная линия) и восстановленные функции (показаны кружочками на *c* и точками на *e, f*) в отсутствие шума при 3 и 10%-ном шуме соответственно.

Подсчитав число  $N$  одновременных обращений в ноль  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau)$  при  $\tau \in [1, 400]$ , построим зависимость  $N(\tau)$  (рис. 1, *b*). Зависимость получена для временного ряда, содержащего 10 000 точек и около 600 экстремумов. Для определения по временному ряду  $\dot{x}(t)$  использовался 5-точечный сглаживающий полином второго порядка. Абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$  наблюдается при  $\tau = \tau_0 = 300$ , причем  $N(300) = 0$ . При уменьшении длины временного ряда и соответственно числа экстремумов этот минимум становится все менее ярко выраженным и, начиная с некоторой длины ряда, имеются  $\tau \neq \tau_0$ , для которых  $N(\tau) = 0$ . Результат восстановления нелинейной функции представлен на рис. 1, *c* кружками. Значение  $\varepsilon$ , определенное описанным

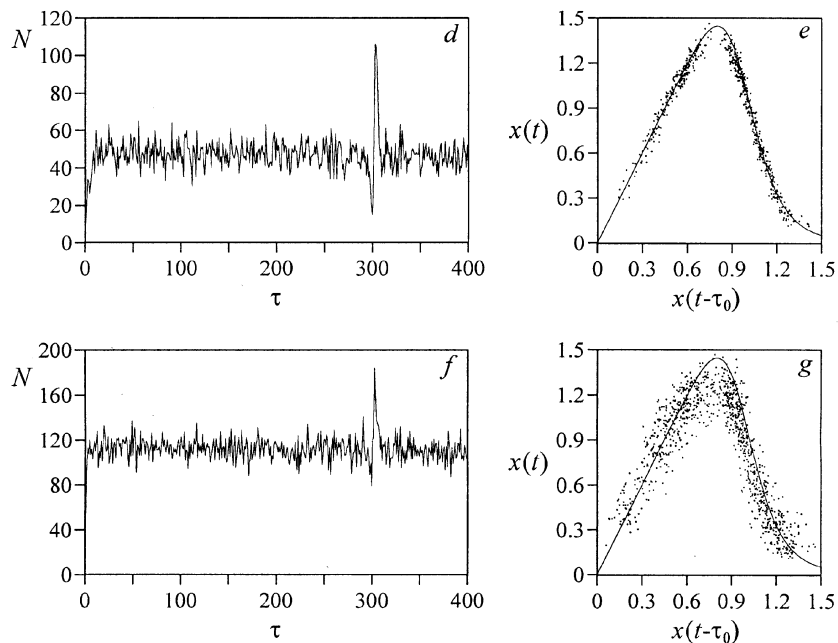
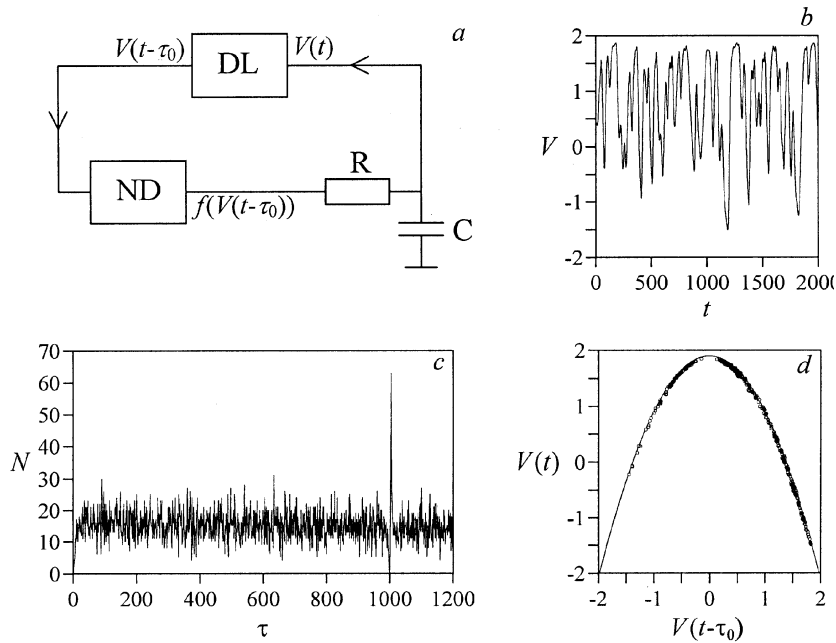


Рис. 1 (продолжение).

выше способом и усредненное по всем точкам временного ряда, для которых при  $x(t) \neq 0$  определена  $f(x(t - \tau_0))$ , имеет величину  $\varepsilon = 10.6$  (истинное значение  $\varepsilon = 1/b = 10$ ).

Для исследования возможностей метода при наличии шума рассмотрим ряды, полученные добавлением гауссовского белого шума в уравнение (4). На рис. 1, *d-g* приведены графики зависимости  $N(\tau)$  и результат восстановления нелинейной функции в случае аддитивного шума, имеющего нулевое среднее значение и среднеквадратичное отклонение, составляющее 3 и 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда. При увеличении уровня шума абсолютный минимум на графике  $N(\tau)$  становится все менее ярко выраженным (на рис. 1, *d*  $N_{\min}(\tau) = N(300) = 15$ , а на рис. 1, *f*  $N_{\min}(\tau) = N(300) = 79$ ), а зависимость на плоскости  $(x(t - \tau_0), x(t))$  все более однозначной. При уровнях шума свыше 10%  $N(\tau_0)$  уже более не является абсолютным минимумом



**Рис. 2.** *a* — блок-схема генератора с запаздывающей обратной связью (ГЗОС) при численном эксперименте, *ND* — нелинейный элемент, *DL* — линия задержки; *b, c, d* — соответственно временной ряд системы (6), зависимость  $N(\tau)$  и восстановленная функция (показана кружочками) при  $\lambda = 1.9$ ,  $\tau_0 = 1000$ ,  $RC = 10$  (нелинейная функция (7) показана на *d* сплошной линией); *e* — блок-схема ГЗОС при натурном эксперименте, ADC и DAC — аналого-цифровой и цифроаналоговый преобразователи; *f, g, h* — соответственно временной ряд экспериментальной системы, зависимость  $N(\tau)$  и восстановленная нелинейная функция при  $\tau_0 = 4.5$  ms,  $RC = 0.08$  ms.

зависимости  $N(\tau)$ . Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенный метод является достаточно грубым по отношению к шуму и может быть применен для исследования временных рядов реальных систем.

С помощью предложенного нами метода проведем исследование генератора с запаздывающей связью [3]. Для системы, изображенной на

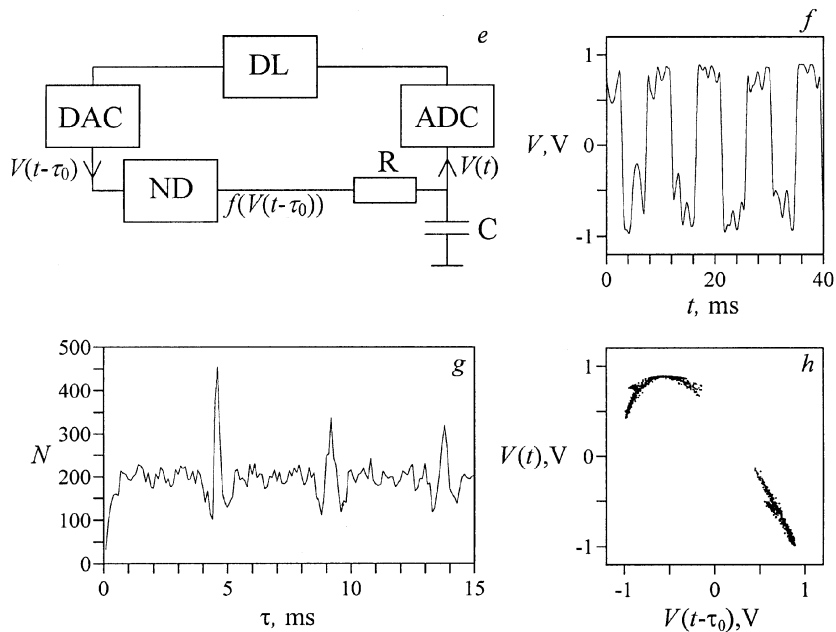


Рис. 2 (продолжение).

рис. 2, а, модельное уравнение, выведенное из законов Кирхгофа, имеет следующий вид:

$$RC\dot{V}(t) = -V(t) + f(V(t - \tau_0)), \quad (6)$$

где  $V(t)$  и  $V(t - \tau_0)$  — напряжения на входе и выходе линии задержки,  $R$  и  $C$  — сопротивление и емкость элементов фильтра,  $f$  — передаточная функция нелинейного элемента,  $\tau_0$  — время задержки. Уравнение (6) имеет вид уравнения (1), где  $\varepsilon = RC$ . Исследуем его временные ряды, выбрав в качестве нелинейной функции логистическую функцию с запаздыванием:

$$f(V(t - \tau_0)) = \lambda - V^2(t - \tau_0), \quad (7)$$

где  $\lambda$  — параметр нелинейности,  $0 < \lambda \leq 2$ . На рис. 2, b-d представлены временной ряд системы (6), зависимость  $N(\tau)$  и вос-

становленная нелинейная функция для случая  $\lambda = 1.9$ ,  $\tau_0 = 1000$ ,  $RC = 10$ . Временной ряд содержит 10 000 точек и около 400 экстремумов.  $N_{\min}(\tau) = N(1000) = 0$ . Восстановленная при  $\tau_0 = 1000$  нелинейная функция практически совпадает с построенной численно из уравнения (7). Восстановленное значение  $\varepsilon = RC$ , усредненное по всему ряду, имеет значение  $RC = 9.9$ . Обратим внимание на то, что значение  $RC$  может быть приближенно оценено по величине  $\tau_c = \tau_m - \tau_0$ , где  $\tau_m$  — значение, при котором наблюдается абсолютный максимум зависимости  $N(\tau)$ . С увеличением  $RC$  увеличивается характерный временной масштаб колебаний и увеличивается временной интервал между экстремумами зависимости  $x(t)$ , что приводит к росту  $\tau_m$  и  $\tau_c$ . Меняя в широких пределах значения  $RC$ ,  $\lambda$  и  $\tau_0$ , мы получили следующую эмпирическую зависимость:  $\tau_c \approx RC/2$ , т.е. для приближенной оценки величины  $RC$  могут быть непосредственно использованы зависимость  $N(\tau)$  и соотношение  $RC \approx 2\tau_c$ . Заметим, что такая оценка может оказаться точнее других при наличии шума, когда восстановленная по описанной процедуре нелинейная функция оказывается неоднозначной и требуется ее усреднение.

Наконец исследуем временные ряды, полученные в натурном эксперименте, реализованном на схеме, представленной на рис. 2, *e*.  $RC$ -фильтр и нелинейный элемент, выполненный в виде схемы на транзисторах и имеющий нелинейную характеристику с квадратичным экстремумом, являлись аналоговыми системами, а линия задержки, выполненная на микросхемах, являлась цифровой системой. Связь между аналоговыми и цифровыми элементами схемы обеспечивалась при помощи аналого-цифрового и цифроаналогового преобразователей. На рис. 2, *f* изображен временной ряд, полученный при  $\tau_0 = 4.5$  ms,  $RC = 0.08$  ms и времени выборки 0.1 ms. Временной ряд содержит 10 000 точек и около 1400 экстремумов. Минимум зависимости  $N(\tau)$  наблюдается при  $\tau = 4.4$  ms (рис. 2, *g*). Восстановленная нелинейная функция (рис. 2, *h*) достаточно хорошо качественно воспроизводит передаточную функцию нелинейного элемента. Усредненное по всему временному ряду восстановленное значение  $RC = 0.11$  ms.

4. Нами предложен и апробирован на различных системах новый метод восстановления скалярных систем с запаздыванием по временным рядам. Метод отличается простотой, требует меньше вычислительных затрат, чем другие методы, и может быть успешно применен для анализа достаточно сильно зашумленных данных.



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-02-17735 и при поддержке U.S. Civilian Research Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union, Award No REC-006.

## Список литературы

- [1] *Mackey M.C., Glass L.* // Science. 1977. V. 197. P. 287–289.
- [2] *Ikeda K.* // Opt. Commun. 1979. V. 30. P. 257–261.
- [3] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410–1428.
- [4] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 345–349.
- [5] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [6] *Fowler A.C., Kember G.* // Phys. Lett. A. 1993. V. 175. P. 402–408.
- [7] *Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A.* et al. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 5083–5089.
- [8] *Tian Y.-C., Gao F.* // Physica D. 1997. V. 108. P. 113–118.
- [9] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 558–561.
- [10] *Zhou C., Lai C.-H.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 320–323.