

# НЕЛИНЕЙНЫЕ МАЯТНИКИ И ИХ МОДЕЛИ

Б. П. БЕЗРУЧКО

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

## NONLINEAR PENDULA AND THEIR MODELS

B. P. BEZRUCHKO

*Dynamic chaos, hysteresis, multistability, and other phenomena inherent in oscillatory systems are shown using several pendula and their simple mathematical models.*

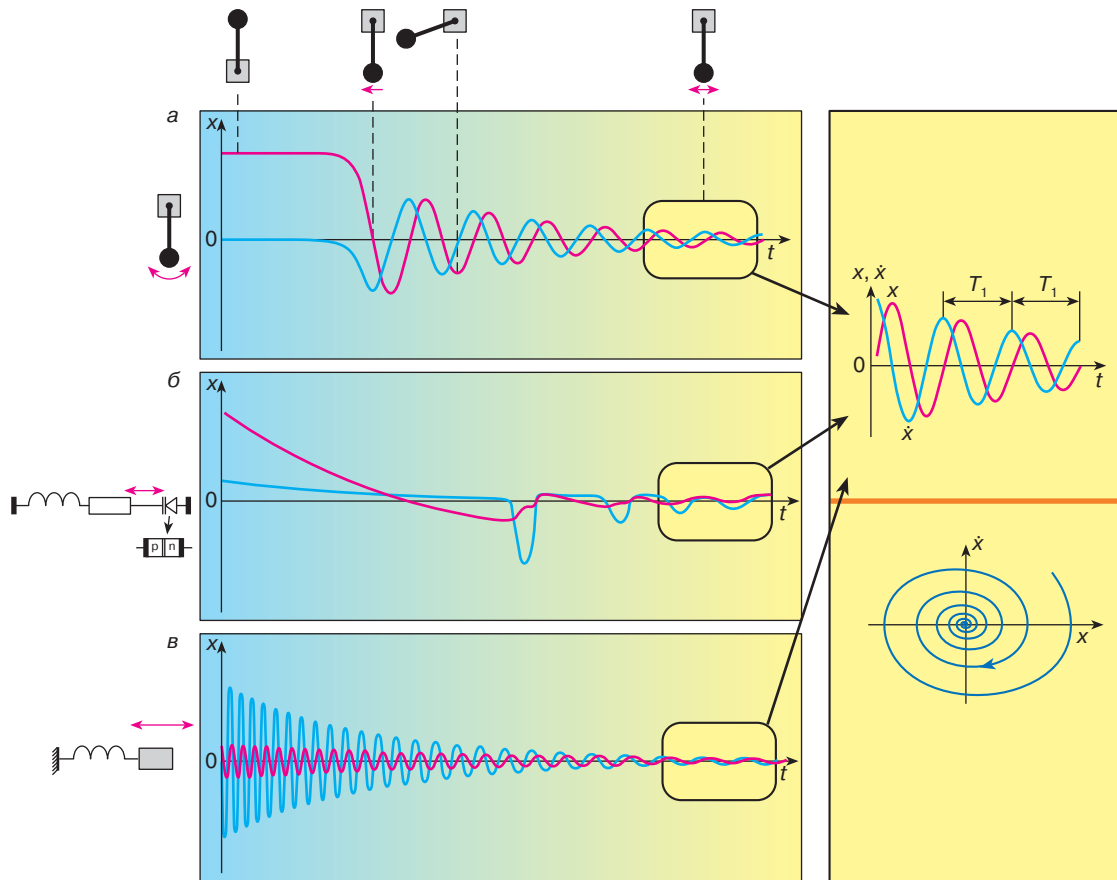
*С помощью маятников и их простых математических моделей демонстрируются динамический хаос, гистерезис, мультистабильность и другие феномены, присущие нелинейным колебательным системам.*

## ВВЕДЕНИЕ

Познавая природу, люди опираются на представления об объектах и явлениях, которые считаются понятными и приобрели статус эталонных. Для колебательных систем, движения в которых обладают той или иной степенью повторяемости во времени, такими исключительно удобными эталонами являются маятники. Их рассматривали основатели физики и создатели современной теории колебаний и волн. К ним обращаются и сейчас при изучении колебаний в курсах общей физики, но, как правило, ограничиваются узким классом гармонических и затухающих квазигармонических движений. Заглянем с помощью маятников в безграничный мир сложных нелинейных колебаний, не выходя при этом за уровень, доступный вооруженному компьютером школьнику.

## ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД СЛОВОМ “МАЯТНИК”

Обратимся к “Физическому энциклопедическому словарю”: “*Маятник* – твердое тело, совершающее под действием приложенных сил колебания около неподвижной точки или вокруг оси. Обычно под маятником понимают тело, совершающее колебания под действием силы тяжести, при этом ось маятника не должна проходить через центр тяжести тела. Простейший маятник состоит из небольшого массивного груза, подвешенного на нити (или легком стержне). Если считать нить нерастяжимой и пренебречь размерами груза по сравнению с длиной нити, а массой нити по сравнению с массой груза, то груз на нити можно рассматривать как материальную точку, находящуюся на неизменном расстоянии от точки подвеса (рис. 1, а). Такой маятник называется *математическим*...” Приведенное в энциклопедии определение относится к объектам механики, а в настоящее время термин “маятник” широко используют в приложении к системам различной природы (см., например, [1]). Так, *электрическим маятником* называют цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности (колебательный контур, рис. 1, б), *химическим* – смесь химикатов, вступающих в колебательную реакцию, *экологическим маятником* – две



**Рис. 1.** Качественный вид временных реализаций  $x$  и  $\dot{x}$  маятников: груз на стержне (а), колебательный контур с диодом (б), груз на пружине (в). Одинаковая для всех примеров линейная стадия колебаний представлена в увеличенном масштабе, для нее приведен и портрет на фазовой плоскости  $x\dot{x}$ : точка, изображающая состояние системы, движется по скручивающейся спирали к аттрактору – точке устойчивого равновесия в начале координат. В области больших значений координат и скоростей фазовые портреты маятников сильно различаются и более замысловаты

взаимодействующие популяции хищников и жертв. Этот же термин применяется к экономическим системам, в которых имеют место колебательные процессы.

Далее мы будем называть маятником систему, способную совершать колебания около положения равновесия. При этом ограничимся строго диссипативными системами, для описания состояния которых при отсутствии внешних воздействий достаточно указать две переменные величины:  $x$ , называемую координатой, и скорость ее изменения  $\dot{x} = dx/dt$ <sup>1</sup>. Маятник, выведенный из состояния равновесия и предоставленный сам себе, совершает колебания, называемые собственными. Движения маятника при наличии внешнего воздействия именуют вынужденными.

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Из куска пластилина, карандаша и иголки создадим конструкцию, напоминающую маятник, упомянутый в энциклопедии, и поэкспериментируем с ней. Что бы мы ни проделывали, но предоставленный самому себе наш маятник в конце концов оказывается в состоянии устойчивого равновесия, в котором стержень направлен

<sup>1</sup> Для физических систем диссипативность означает наличие потерь энергии. В более широком смысле, на языке представлений в фазовом пространстве (пространстве состояний), это соответствует сжатию начального фазового объема. Словом “строго” подчеркивается невозможность автоколебаний. При наличии внешнего периодического воздействия маятник трехмерен. Для описания его состояния кроме координаты и скорости необходимо принимать во внимание еще и фазу воздействия.

вертикально, а груз располагается ниже оси (рис. 1, *a*). В зависимости от начальных положения и скорости, формы, массы, трения в оси этому предшествуют различные варианты движений.

Будем характеризовать состояние маятника величиной угла отклонения от вертикали  $x$  и рассматривать зависимости  $x$  и угловой скорости  $\dot{x}$  от времени  $t$ . Качественный вид графиков  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  (временных реализаций) приведен на рис. 1, *a*. На рисунке цветовым фоном выделены две области, в которых движения качественно различны. Синяя область соответствует большим отклонениям от устойчивого равновесия, груз может достигать верхнего положения или даже проскакивать его вращаясь. Временные реализации координаты и скорости здесь качественно отличаются друг от друга, и (обратите внимание) интервал времени между соседними максимумами кривых меняется с уменьшением размаха колебаний при их затухании. Эта особенность получила название “неизохронность”. Отмеченные закономерности просматриваются еще более ярко в осциллограммах колебаний электрического маятника (рис. 1, *b*), для него  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  имеют смысл напряжения и тока в цепи. Похоже ведет себя и груз на пружине (рис. 1, *в*).

Области, выделенные на рис. 1 желтым цветом, соответствуют малым колебаниям. Вид временных реализаций здесь близок к затухающей по экспоненте косинусоиде или синусоиде:

$$x(t) = x_0 \exp(-\delta t) \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (1)$$

где постоянная  $\delta$  определяет затухание,  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  — частота,  $T_1$  — период (вернее, квазипериод) малых колебаний,  $\varphi$  — начальная фаза, которая определяет сдвиг кривой по оси  $t$ . Временные реализации координаты и скорости по форме подобны, но сдвинуты во времени на  $T_1/4$  (по фазе на  $\pi/2$ ). При малых амплитудах колебаний временные интервалы между соседними максимумами не меняются, то есть маятник обладает свойством изохронности, которое отсутствовало в случае больших отклонений. На эту особенность малых колебаний обратил внимание еще Галилей, наблюдая за люстрой в соборе.

## ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотренные малые изохронные колебания часто называют линейными. Название связано с математической природой уравнений, используемых для описания такого процесса. Например, монотонное затухание колебаний (как и безграничное возрастание) наглядно моделируется линейным отображением, которое можно получить из (1). Для этого следует перейти к рассмотрению колебательного процесса (1) в фиксированные моменты  $t = nT_1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — дискретное время.

Обозначим значения  $x(t)$  в моменты  $nT_1$  и  $(n+1)T_1$  как  $x_n$  и  $x_{n+1}$  и введем параметр  $a = \exp(-\delta T_1) < 1$ . Выразив с помощью (1) значение  $x_{n+1}$  через  $x_n$ , получим одномерное отображение

$$x_{n+1} = ax_n. \quad (2)$$

График отображения представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. От графика линейного отображения, приведенного на рис. 3, *б* синей линией, он отличается лишь сдвигом. Если задать начальное значение  $x_0$  и по полученной формуле подсчитать  $x_1$ , затем подставить  $x_1$ , вычислить  $x_2$  и т.д., можно убедиться, что значение  $x_n$  монотонно стремится к нулю. Не составляет труда проделать то же самое графически, проведя построения, аналогичные показанным стрелками на рис. 3, *б*, и убедиться, что изображающая точка приближается к нулю. Такое построение называют диаграммой Ламерея (см. [4]). При замене знака перед  $\delta$  (при этом  $a > 1$ ) линия графика отображения расположится выше диагонали и изображающая точка убежит на бесконечность.

Кроме того, основанием назвать колебания в желтой области линейными является и то, что решение вида (1) имеет обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

известное как уравнение линейного диссипативного осциллятора. Переменная  $x$  и ее производные входят в это уравнение в первой степени (линейно), поэтому уравнение удовлетворяет принципу суперпозиции. Это означает, что сумма двух любых решений уравнения или решение, умноженное на константу, тоже являются решениями. В виде (3) удастся записать уравнения динамики различных колебательных систем. Широкий набор интересных примеров имеется в [1]. Проинтегрировав уравнение (3), можно получить (1) с  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

Поведение большинства маятников хорошо описывается линейными математическими моделями, если движение ограничено некоторыми пределами. Например, для груза на стержне значения  $x$  должны быть столь малыми, что  $\sin x \approx x$ , а значения  $\dot{x}$  ограничены сверху условием пропорциональной зависимости сил вязкого трения от скорости.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Для моделирования движений наших маятников в синей части рис. 1 необходимы нелинейные отображения и дифференциальные уравнения. Уравнение осциллятора (3) станет нелинейным, если в него войдут члены, содержащие любые нелинейные функции от  $x$  и его производных (квадраты, кубы и т.п.). Так, колебания математического маятника (рис. 1, *a*) хорошо

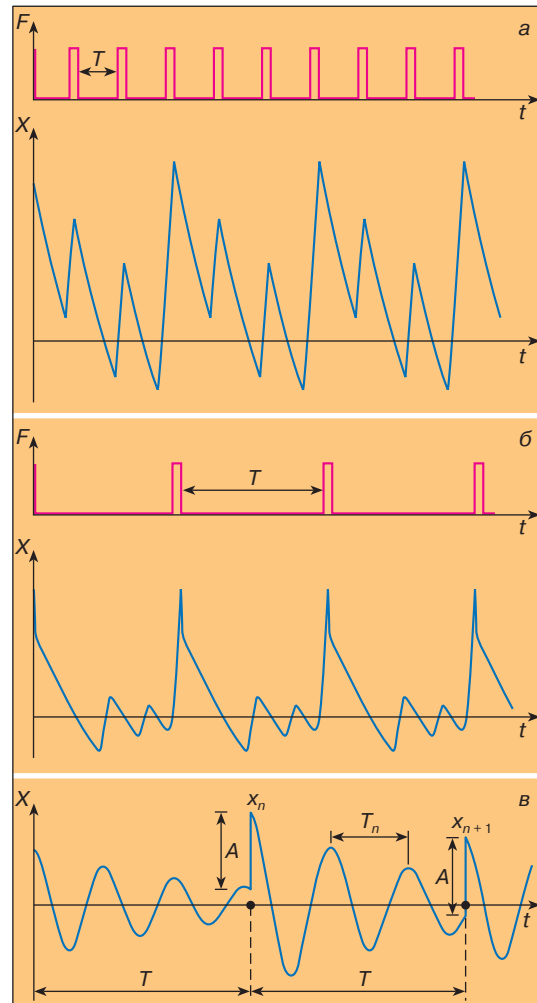
моделируются уравнением (3), если  $x$  в последнем слагаемом заменить на  $\sin x$ . В получившемся нелинейном уравнении в отличие от (3) суперпозиция решений уже не будет его решением. Нелинейности отображения  $x_{n+1} = f(x_n)$  соответствует отличный от линейного вид функции  $f$ .

По сравнению с единым стандартом (1) линейных колебаний многообразие типов нелинейного поведения очень велико. Так, в трех примерах на рис. 1 при полной идентичности линейной стадии характер нелинейных участков существенно различается. Это связано с особенностями каждого из маятников: характером их нелинейности, видом зависимости параметров системы от координат и скоростей. Например, в случае математического маятника (см. рис. 1, а) нелинейность определяется синусоидальной зависимостью от угла поворота величины момента силы тяжести относительно оси вращения. В электрическом маятнике с полупроводниковым конденсатором (варакторным диодом, см. рис. 1, б) она вызвана зависимостью емкости и сопротивления диода от напряжения. В пружинном маятнике нелинейность обусловлена видом зависимости силы вязкого трения от скорости движения и силы упругости от величины деформации пружины. Например, при сильном сжатии витки пружины смыкаются, так что сила упругости резко возрастает по сравнению с предписываемой законом Гука (пружина становится более жесткой). Обратите внимание, что в этом случае период колебаний уменьшается при увеличении их размаха (см. рис. 1, в). По аналогии с грузом на пружине нелинейность маятников, приводящую к уменьшению периода колебаний с ростом их амплитуды, стали называть нелинейностью типа жесткой пружины, а в противоположном случае — типа мягкой пружины.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Будем периодически подталкивать маятник, не давая ему вернуться в состояние устойчивого равновесия. Результат в значительной степени зависит от способа воздействия. Мы же выберем очень простой вариант — экспериментируя с грузом на стержне, будем периодически брать груз руками и поворачивать маятник на некоторый одинаковый угол  $A$ , а затем отпускать каждый раз с нулевой начальной скоростью. В колебательном контуре с диодом аналогичный способ воздействия реализуется с помощью источника импульсной ЭДС, обеспечивающего прямой ток через диод. При этом во время действия импульса собственные колебания быстро затухают, а по его окончании начинаются с близкой фазы (рис. 2, а, б).

Если короткие импульсы воздействия следуют через равные интервалы времени  $T$  (период воздействия), временная реализация вынужденных движений состо-



**Рис. 2.** Временные реализации колебаний тока в LR-диод цепи при периодическом воздействии импульсами прямой полярности  $F(t)$ : а — цикл класса “последовательности добавления периода” — период воздействия меньше периода колебаний в 3 раза ( $\Gamma_{3/1} = \Gamma_3$ ); б — цикл класса субгармонических колебаний — период воздействия  $T$  больше квазипериода собственных движений в 3 раза ( $\Gamma_{1/3}$ ); в — модель временной зависимости субгармонических колебаний — изменение квазипериода затухающих колебаний в цуге, характерное для реальной системы, заменено на зависимость периода от начальной амплитуды (внутри цуга период не меняется)

ит из цугов затухающих собственных колебаний (последовательностей уменьшающихся отклонений от положения равновесия), как это показано на примере контура с диодом на рис. 2. В зависимости от амплитуды и периода воздействия, уровня затухания, вида нелинейности, а также начальных условий в системе могут устанавливаться различные повторяющиеся (периодические) движения — циклы. Времена повторения

(периоды циклов) равны периоду воздействия или кратны ему – составляют величину  $kT$ , где  $k$  принимает значения 1, 2, 3, ...

Вариантов вынужденных периодических движений может быть очень много, поэтому их требуется как-то систематизировать. Например, для маятников с нелинейностью типа мягкой пружины циклы по признаку подобия<sup>1</sup> можно условно разделить на две группы. В каждой из них сохраняются некоторые особенности формы временных реализаций, а также предельных циклов в фазовом пространстве. Первую группу составляют циклы периода воздействия  $1T$ , существующие в области низких частот  $f = 1/T \leq f_1 = 1/T_1$ , – субгармонические. Так как период воздействия велик по сравнению с временным масштабом собственных движений, на временных реализациях этих циклов в общем случае имеется несколько максимумов (см. рис. 2, б). Вторую группу составляют циклы периода  $kT$ , где  $k = 2, 3, \dots$ , которые наблюдаются при больших частотах воздействия  $f \approx (0,5-2)f_1$ . Временная реализация такого цикла (см. рис. 2, а) как бы собрана из  $k$  начальных кусков нелинейной стадии осциллограммы рис. 1, б. Так как при увеличении амплитуды воздействия смена этих режимов сопровождается последовательным увеличением  $k$  на единицу, их называют циклами последовательности добавления периода. Достаточно традиционно условное обозначение циклов –  $\Gamma_{m/l}$ . Здесь  $l$  соответствует отношению периода воздействия к квазипериоду собственных колебаний (его можно оценить по числу максимумов на интервале  $T$  осциллограммы), а  $m$  – период цикла, измеренный в единицах  $T$ .

## БИФУРКАЦИИ

При изменении параметров маятника и внешнего воздействия все циклы эволюционируют. При малых амплитудах колебаний они плавно переходят друг в друга, а при достаточно больших амплитудах, когда проявляется нелинейность, испытывают качественные перестройки – бифуркации [4]. Наиболее типична бифуркация удвоения периода (period doubling), в результате которой колебания начинают повторяться через раз, немного изменив свою форму. Для нелинейных маятников при изменении параметров характерны последовательности (каскады) бифуркаций удвоения периода: циклы последовательно увеличивают свой период до бесконечности. В итоге колебания становятся неповторяющимися во времени, беспорядочными, хаотическими [3]. При дальнейшем изменении пара-

<sup>1</sup> Подобие означает пропорциональное изменение геометрических размеров при качественном сохранении формы: подобны не только треугольники с равными углами, но и все шары, куклы, входящие в матрешку и т.п.

метров хаотические колебания, в свою очередь, видоизменяются, происходят переходы к новым циклам и новым видам хаотических движений и т.д.<sup>2</sup>

Множество вариантов вынужденных колебаний, бифуркации, хаос и многие другие явления, свойственные маятникам, будем исследовать с помощью их математических моделей. Наиболее полную информацию дают дифференциальные уравнения. Мы же ограничимся рассмотрением лишь субгармонических колебаний, а для этого достаточно более простых и наглядных модельных отображений.

## ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ МАЯТНИКА С МЯГКОЙ ПРУЖИНОЙ

Воспользуемся временной реализацией субгармонических колебаний маятника с мягкой пружиной (см. рис. 2, б) и промоделируем ее последовательностью цугов собственных колебаний (рис. 2, в). Установим, что в цуге зависимость  $x(t)$  имеет вид (1), но квазипериод линейно зависит от начальной амплитуды цуга  $x_n$ : теперь это не  $T_1$ , а  $T_1(1 + \beta x_n)$ , где  $\beta = \text{const} > 0$ . Тогда в цуге, начинающемся в момент времени  $nT$ , зависимость переменной от времени можно представить как  $x(t) = x_n \exp(-\delta t) \cos[2\pi t / T_1(1 + \beta x_n)]$ , если  $t$  отсчитывать от начала цуга. С учетом оговоренных особенностей способа внесения воздействия начальная амплитуда следующего цуга (см. рис. 2, в)

$$x_{n+1} = x_n \exp\left(-\frac{d}{N}\right) \cos \frac{2\pi}{N(1 + \beta x_n)} + A, \quad (4)$$

где  $A$  – амплитуда воздействия,  $N = T_1/T$  – нормированная частота воздействия,  $d = \delta T_1$  – коэффициент

<sup>2</sup> Поясним сказанное с помощью представлений пространства состояний. Для маятников, находящихся под периодическим внешним воздействием, его можно изобразить, например отложив вдоль трех ортогональных осей координат величины  $x$ ,  $\dot{x}$  и фазы воздействия  $\Phi$  (например,  $\Phi = \sin(2\pi t/T)$ , где  $t$  – время от конца импульса воздействия до рассматриваемого момента). Образом периодического колебательного процесса в таком пространстве является замкнутая кривая, похожая на нитку, концы которой связаны, – предельный цикл. Различные циклы отличаются формой получившейся нитяной петли. При бифуркации удвоения периода цикл теряет устойчивость: нитка расслаивается на две, а получившиеся две петли разрываются и перезамыкаются в одну двойную петлю. Она оказывается в непосредственной близости от петли потерявшего устойчивость цикла, поэтому исходное периодическое движение почти не меняется по форме, но полностью повторяется через раз. Переход к хаосу означает, что многократно раздвоившаяся нитка фазовой траектории не замкнулась, а образовала структуру, называемую странным аттрактором. Такой аттрактор похож на спутанный клубок мулине с начинкой из петель различных неустойчивых, расщепившихся ранее циклов внутри. В результате эволюции различных исходных циклов формируются различные варианты странных аттракторов (видов хаотических колебаний).

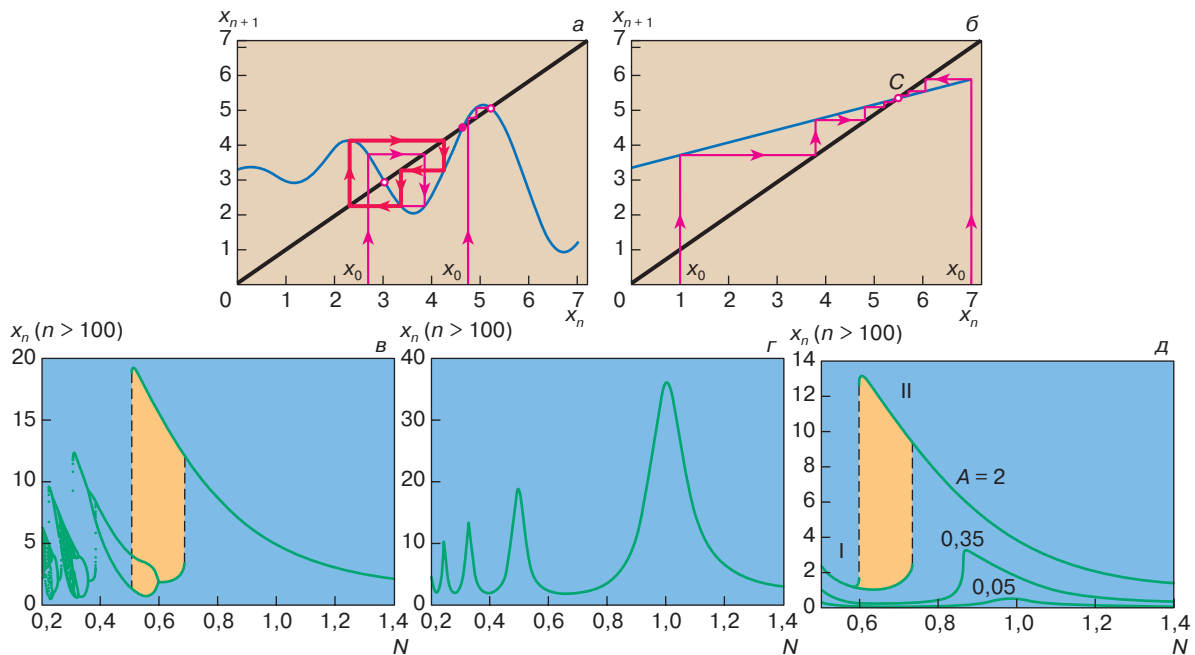


линейной диссипации,  $\beta$  – коэффициент нелинейности. График отображения (4) имеет вид изменяющейся по амплитуде и частоте синусоиды (рис. 3, а), ограниченной сверху и снизу прямыми, наклоненными под углами  $\pm \arctg(\exp(-d/N))$  к горизонтальной оси.

## ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ. МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ

Изменение параметров  $A$ ,  $N$ ,  $d$ ,  $\beta$  приводит к перемещению графика отображения (4) по вертикали и его деформации, к изменению числа, места и характера его пересечения с диагональю  $x_n = x_{n+1}$ . Например, при  $\beta = 0$  график превращается в прямую (рис. 3, б) и имеет одно пересечение в точке  $C$ . Изображающая точка попадает в  $C$  из любого начального значения  $x_0$  (см. рис. 3, б), то есть эта точка является единственным аттрактором [3, 4]. Она соответствует колебаниям маятника, повторяющимся через один период внешнего воздействия (циклу периода  $1T$ ). В общем случае точек пересечений может быть несколько. Например, на рис. 3, а их три, из которых одна (правая) является аттрактором, а две другие неустойчивы. Аттракторы, соответствующие

устойчивым колебаниям, можно найти последовательно вычисляя по (4) значение  $x_{n+1}$ . Начальное значение  $x_n = x_0$  выбирается произвольно. Это можно сделать и графически с помощью диаграммы Ламерея (см. рис. 3, а). Через достаточно большое число шагов (например,  $n > 100$  или 500) устанавливается колебательный режим с определенным повторяющимся набором или постоянными усредненными значениями переменных. Повторение значений  $x_n$  через раз означает установление цикла периода 2. В циклах периода  $M$  значения  $x_n$  повторяются через  $M$  шагов дискретного времени. Например, при значениях параметров, соответствующих рис. 3, а, в зависимости от  $x_0$  в модели устанавливаются колебания периода 3 или 1. Такая ситуация называется бистабильностью, а если возможных видов колебаний несколько, говорят о мультистабильности. Выбор одного из мультистабильных видов колебаний определяется заданием начальных условий. Неустойчивые циклы не реализуются в эксперименте, но оказывают существенное влияние на динамику маятника.

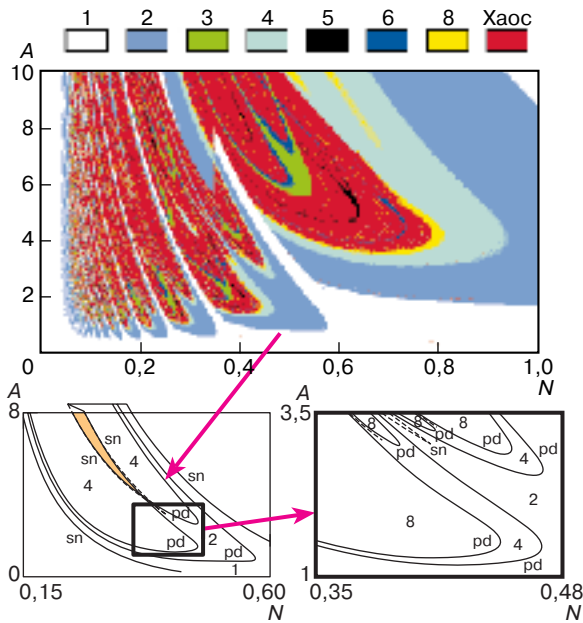


**Рис. 3.** Результаты расчетов по формуле (4). Графики отображения (синяя линия) и диаграммы Ламерея (красная), построенные при  $A = 3,4$ ;  $N = 0,1$ ;  $d = 0,1$  и значениях  $\beta = 0,05$  (а) и  $\beta = 0$  (б). Черная прямая – диагональ  $x_{n+1} = x_n$ . Из начального положения  $x_0$  изображающая точка в итоге притягивается к одному из аттракторов. Бифуркационные диаграммы  $x_n(N)$ ,  $n > 100$ , построенные при  $A = 3,4$ ;  $N = 0,1$ ;  $d = 0,1$  для случаев  $\beta = 0,05$  (в) и  $\beta = 0$  (г). Участки однозначности соответствуют колебаниям периода 1, раздвоение линий означает удвоение периода, размазанные участки – хаос, д – резонансные кривые при различных значениях  $A$ . Цветом выделена область бистабильности и гистерезиса

## КАРТЫ РЕЖИМОВ. ПОДОБИЕ

Для описания множества типов колебаний маятника используем подходы, разработанные в нелинейной динамике. Наглядное представление о колебаниях, которые устанавливаются в системе после затухания переходного процесса, дают: 1) бифуркационные диаграммы — зависимости значений  $x_n$ , получающихся после достаточно большого числа шагов счета, от величин параметров (рис. 3, *в–д*); 2) карты режимов — на плоскостях параметров цветом или с помощью линий выделяются области значений, при которых устанавливается тот или иной колебательный режим (рис. 4).

Рассмотрим карту (см. рис. 4), построенную на плоскости параметров воздействия. Бросаются в глаза цветные языки, структуры которых качественно подобны. Это области сложных колебаний на базе различных субгармонических циклов. В крайней правой области эволюционирует цикл Г: при этих значениях параметров существуют колебания периода 2, 4, 8, ... и



**Рис. 4.** Карта режимов модели (4) на плоскости параметров  $A-N$ . Цветом выделены области колебаний, период которых указан цифрами около образцов под рисунком. Одному цвету могут соответствовать движения одинакового периода или хаос на базе разных циклов. На границах областей происходят бифуркации. Цветная картина плохо передает ситуацию в областях би- и мультистабильности, которую отражает фрагмент в середине рисунка. Здесь использован способ изображения области существования и эволюции определенного цикла на отдельном листе: *sn* — границы листов, *pd* — линии бифуркаций удвоения периода. Область наложения двух листов соответствует бистабильности и гистерезису, нескольких листов — мультистабильности

хаос на его базе. Левее располагаются области режимов на базе циклов  $\Gamma_{1/2}$ ,  $\Gamma_{1/3}$  и т.д. Эти области имеют качественно одинаковую структуру — они подобны друг другу и самоподобны. Самоподобие означает устройство по типу матрешки: основной конструктивный элемент, представленный на черно-белых фрагментах рисунка, дублируется во все более мелких масштабах; он просматривается во всех цветных языках и их фрагментах. Но в отличие от матрешки, границы составляющих элементов которой не пересекаются, области существования различных видов колебаний на плоскости параметров маятника при достаточно малых уровнях затухания накладываются друг на друга (см. рис. 4). При значениях параметров, соответствующих областям пересечения цветных языков, в системе могут установиться несколько различных видов колебаний — имеет место мультистабильность.

## НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС. ГИСТЕРЕЗИС

Результат раскачивания маятника внешней силой зависит от временных масштабов воздействия. Это хорошо иллюстрируют зависимости установившихся значений  $x_n$  от нормированной частоты  $N$  импульсов воздействия при неизменной величине  $A$  (см. рис. 3, *в–д*). Оказывается, при некоторых частотах следования импульсов подталкивание маятника наиболее эффективно — наблюдается увеличение амплитуды колебаний (резонанс). Этот феномен более заметен, когда амплитуды колебаний незначительны  $|x| \ll 1$  или  $\beta = 0$ . В этом (линейном) случае существуют лишь регулярные колебания периода воздействия, установившееся значение  $x_n$  единственно, и график  $x_n(N)$  имеет вид линии — резонансной кривой (см. рис. 3, *з*). Максимумы кривой соответствуют различным резонансам: основной,  $N = 1$ , наблюдается при равенстве периодов воздействия и собственных колебаний. Максимумы на частотах  $N < 1$  (субрезонансы) соответствуют ситуациям, когда внешние толчки следуют точно через 2, 3, 4, ... периода собственных колебаний<sup>1</sup>. При наличии нелинейности ( $\beta \neq 0$ ) явление резонанса сохраняется, но из-за бифуркаций и хаоса линии графиков  $x_n(N)$  раздваиваются или размываются (см. рис. 3, *в*). Качественное различие резонанса при малых и больших амплитудах колебаний (линейного и нелинейного) удобно проследить наблюдая за одним из максимумов резонансной кривой при увеличении  $A$  (см. рис. 3, *д*). С ростом амплитуды кривая изгибается, резонансная частота уменьшается, а затем линия разрывается на ветви. Ветви соответствуют разным нелинейным видам колебаний. Например, на рис. 3, *д* при  $A = 2$  верхняя ветвь принадлежит циклу  $\Gamma_1$ , а нижняя —  $\Gamma_{1/2}$ .

<sup>1</sup> При гармоническом воздействии на линейный маятник субрезонансы отсутствуют.

На частотах воздействия, соответствующих закрашенной области резонансной кривой на рис. 3, *в*, *д* и соответственно в выделенной цветом области черно-белого фрагмента на рис. 4, имеет место бистабильность. Изменение параметров при переходе через эту область сопровождается гистерезисом. Греческое слово “гистерезис” (отставание, запаздывание) используется физиками в ситуациях, когда величина, характеризующая состояние объекта наблюдения, неоднозначно зависит от внешних условий. Например, намагниченность образца ферромагнетика может быть разной при одной и той же индукции внешнего магнитного поля. У нас с этим словом связано то, что при попадании в область бистабильности на рис. 3, *в*, *д* слева устанавливается один цикл, а справа – другой. Другими словами, при увеличении  $N$  реализуется нижняя ветвь резонансной кривой, а при уменьшении – верхняя. В областях мультистабильности можно встретить более сложные варианты гистерезиса.

## ХАОС

При достаточно больших  $\beta$ , когда амплитуда колебаний с ростом  $A$  становится значительной, в системе устанавливаются различные виды хаотических колебаний. Кроме беспорядочности такие движения обладают большой чувствительностью к изменению начальных условий. В этом можно убедиться, если, не меняя значений параметров, повторить расчеты  $x_n(n)$  после сколь угодно малого изменения начальных условий  $x_0$ . В результате обнаруживается быстрое нарастание расхождения между новой и старой реализациями с течением времени, хотя вначале они почти совпадают. Этот факт очень важен для понимания феномена динамического хаоса [3]. Он был осознан научным сообществом сравнительно недавно, и открытие его признано одним из важнейших достижений науки в XX веке. Хаос занимает большую часть плоскости параметров (см. рис. 4). Двигаясь по карте режимов (рис. 4) из области периодических колебаний к хаосу, не пересекая границ листов (см. черно-белый фрагмент), можно убедиться, что хаосу предшествует последовательность бифуркаций удвоений периода некоторого цикла.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассказанное про маятники на примере модели с нелинейностью типа мягкой пружины в той или иной степени присуще различным диссипативным системам, совершающим вынужденные колебания около положения равновесия. Об этом говорит сравнение с результатами численных исследований дифференциальных уравнений различных нелинейных осцилляторов и данными физических экспериментов. Так, универсальные элементы приведенной на рис. 4 структуры при-

сутствуют на аналогичных плоскостях параметров маятников с жесткой пружиной и наблюдаются при других способах внесения воздействия.

В то же время приведенная картина не исчерпывает многообразия возможных вариантов нелинейного поведения маятников. Например, если смоделированный нами маятник подталкивать не в одну сторону от положения равновесия, а симметрично – в одну и другую, то перед удвоениями периода колебаний происходит так называемая бифуркация потери симметрии. При этом вместо одного симметричного движения в системе рождаются два зеркально-симметричных движения-близнеца. Естественно, что поведение более сложной колебательной системы может быть еще более изощренным. Поэтому, разглядывая переплетение цветов и линий на рис. 4, невольно задумываешься о сложности мироустройства, если примитивный груз на стержне ведет себя столь непросто.

Не так давно в журнале “В мире науки” вышла статья о хаотических колебаниях в контуре с диодом, где отмечалась доступность нелинейного электрического маятника и говорилось, что он “должен стоять в каждом доме на подоконнике”. Каждому дому навряд ли, но физическим кабинетам и практикумам он действительно очень подходит (практические рекомендации можно найти в [5]). Что же касается простых модельных отображений, то их исследования вполне по силам каждому студенту или сильному ученику-старшекласснику. Запрограммируйте формулу (4) и с помощью карты режимов отправляйтесь в увлекательную прогулку по просторному зоопарку нелинейных колебаний маятника.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трубецков Д.И. Колебания и волны для гуманитариев. Саратов: ГосУНЦ “Колледж”, 1997. 392 с.
2. Данилов Ю.А. Нелинейность // Знание – сила. 1982. № 11. С. 34.
3. Анищенко В.С. Детерминированный хаос // Соросовский Образовательный Журнал. 1997. № 6. С. 70–76.
4. Белых В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Там же. № 1. С. 115–121.
5. Безручко Б.П., Жалнин А.Ю., Прохоров М.Д., Селезнёв Е.П. Дискретные нелинейные модели периодически возбуждаемой RL-диод цепи // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2/3. С. 48–62.

Рецензент статьи В.П. Крайнов

\* \* \*

Борис Петрович Безручко, доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов – теория колебаний и волн, нелинейная динамика, электроника сверхвысоких частот. Автор более 100 научных публикаций.