

чаются от автономных лишь фазой — происходит принудительное фазирование колебаний. При жестком возбуждении автоколебаний внешний одиночный стимул может приводить к срыву автоколебаний.

При хаотических автоколебаниях воздействие одиночного импульса приводит к существенным изменениям колебательного процесса. После воздействия хаотические автоколебания непредсказуемо отличаются от наблюдающихся при автономном режиме.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
2. Фомин Н.Н. Синхронизированные полупроводниковые генераторы в диапазоне СВЧ. М.: Связь, 1979.
3. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
5. Железовский Е.Е., Кальянов Э.В. Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978.
6. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
8. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
9. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986, Т. 29, № 9. С. 1050.
10. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.
11. Кальянов Э.В., Старков С.О. // Письма в ЖТФ. 1988, Т. 4, № 11. С. 961.
12. Уинфри А.Т. Время по биологическим часам. М.: Мир, 1990.
13. Гласс О., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. / Пер. с англ. М.: Мир, 1991.
14. Ehgelmann W., Karlsson H.G., Johnson A. // Internat. J. Chronobiology. 1973. V. 1. № 1. P. 147.

Поступила в редакцию 30.04.92

УДК 530.18

© 1993 г. В.В. Астахов, Б.П. Безручко, О.Б. Пудовочкин, Е.П. Селезнев

### ФАЗОВАЯ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ И УСТАНОВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Экспериментально на примере  $LR$ -диод цепи исследованы процессы установления колебаний в системах, демонстрирующих переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Выделены типичные зависимости времени установления от начальных условий, показана их связь с фазовой мультистабильностью. Проведено численное моделирование на квадратичном точечном отображении.

1. Мультистабильность — существование нескольких устойчивых состояний системы при фиксированных значениях ее параметров. Если колебательные мультистабильные состояния различаются только сдвигом во времени (фазами), то говорят о фазовой мультистабильности. В данной работе исследуются системы, демонстрирующие с изменением параметра неравновесности переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода: экспериментально-радиотехнический осциллятор с варакторным диодом<sup>1</sup>, на который действует внешняя пе-

<sup>1</sup> Данная система подробно рассматривалась как генератор субгармоники с фазовой би-стабильностью (параметрон на диоде [1]) и предлагалась в качестве одного из базовых элементов цифровых устройств с фазовым представлением информации. В настоящее время она привлекает к себе внимание как доступный объект с хаотической динамикой [2], упоминается в связи с поиском новых принципов оптической обработки информации [3].



риодическая электродвижущая сила, а численно — одномерное квадратичное точечное отображение.

Рассматривается время установления  $\tau$  динамических состояний системы в широком интервале начальных условий  $X_0$ . Показано, что немонотонный характер зависимости  $\tau(X_0)$  определяется наличием фазовой мультистабильности и связан со структурой разбиения пространства состояний системы на области притяжения различных аттракторов. Выделены три качественно отличающихся вида зависимости  $\tau(X_0)$ , соответствующие нулевому, отрицательному и положительному значениям мультипликатора предельного цикла. Число мультистабильных состояний неограниченно возрастает при стремлении параметра к критическому значению, соответствующему переходу к хаосу. Это сопровождается усложнением зависимостей  $\tau(X_0)$ , в которых проявляются закономерности подобия, характерные для систем с удвоением периода.

2. В эксперименте последовательный колебательный контур, образованный катушкой индуктивности и полупроводниковым диодом с  $p-n$ -переходом, возбуждался периодическим сигналом амплитуды  $V$  от источника с малым выходным сопротивлением. Исследовались зависимости времен установления колебаний от начальных условий при различных значениях параметра неравновесности  $V$  и фиксированных значениях других параметров. Частота возбуждающего сигнала равнялась частоте линейного резонанса контура (18 кГц). Начальные условия задавались с помощью специальной схемы, содержащей электронный коммутатор, который отключал диод в момент времени  $t = 0$  от регулируемого источника постоянного напряжения  $U_0$  и включал его в контур. Управление коммутатором осуществлялось при фиксированной фазе сигнала внешнего воздействия. Время установления оценивалось по осциллограмме напряжения на диоде; критерием установления было совпадение формы и размаха колебаний через период с заданной точностью (порядка 10%).

Экспериментальная неавтономная система рассматривалась в расширенном фазовом пространстве (пространстве состояний) с координатами: напряжение на диоде  $U$ , ток в цепи  $I$  и время  $t$ , нормированное на период внешнего воздействия. Анализировались проекции траекторий изображающей точки на плоскости  $U - I$ ,  $I - t$ ,  $U - t$  при различных начальных напряжениях и токах диода. Исходным состояниям системы ( $t = 0$ ) соответствовали точки на плоскости  $U - I$ , расположенные вблизи оси  $I = 0$  (на линии, соответствующей обратной ветви статической вольт-амперной характеристики диода), поэтому в дальнейшем для характеристики начальных условий используется только напряжение  $U_0$ .

3. При малых  $V$  в контуре устанавливаются квазигармонические колебания периода воздействия (с периодом 1). С увеличением параметра  $V$  спектр установившихся колебаний обогащается высшими гармониками, а после первой бифуркации удвоения периода — субгармониками.

При дальнейшем увеличении параметра в установившихся состояниях наблюдается каскад удвоений периода, заканчивающийся при  $V_K$  хаосом, окна различной периодичности в хаосе, жесткие переходы на предельные циклы периодов  $N > 2$  и их эволюции к хаосу. Если значения параметра таковы, что в системе устанавливаются колебания периода  $N$ , где  $N = 2, 3, 4, \dots$ , то в зависимости от начальных условий они могут быть реализованы  $N$  способами, которые отличаются друг от друга сдвигом проекций траекторий изображающей точки на плоскости  $U - t$  и  $I - t$  вдоль оси  $t$  на  $1, 2, \dots, N$  периодов воздействия. При этом проекции на плоскость  $U - I$  одинаковы, т.е. колебательные состояния отличаются только фазами. Фазовая мультистабильность не сопровождается при изменении параметров жесткими переходами и явлением гистерезиса. Она проявляет себя в эксперименте только при введении в рассмотрение начала отсчета времени или опорного сигнала, относительно которого определяется фаза колебаний. Бассейны притяжения мультистабильных состояний представляют собой совокупность чередующихся



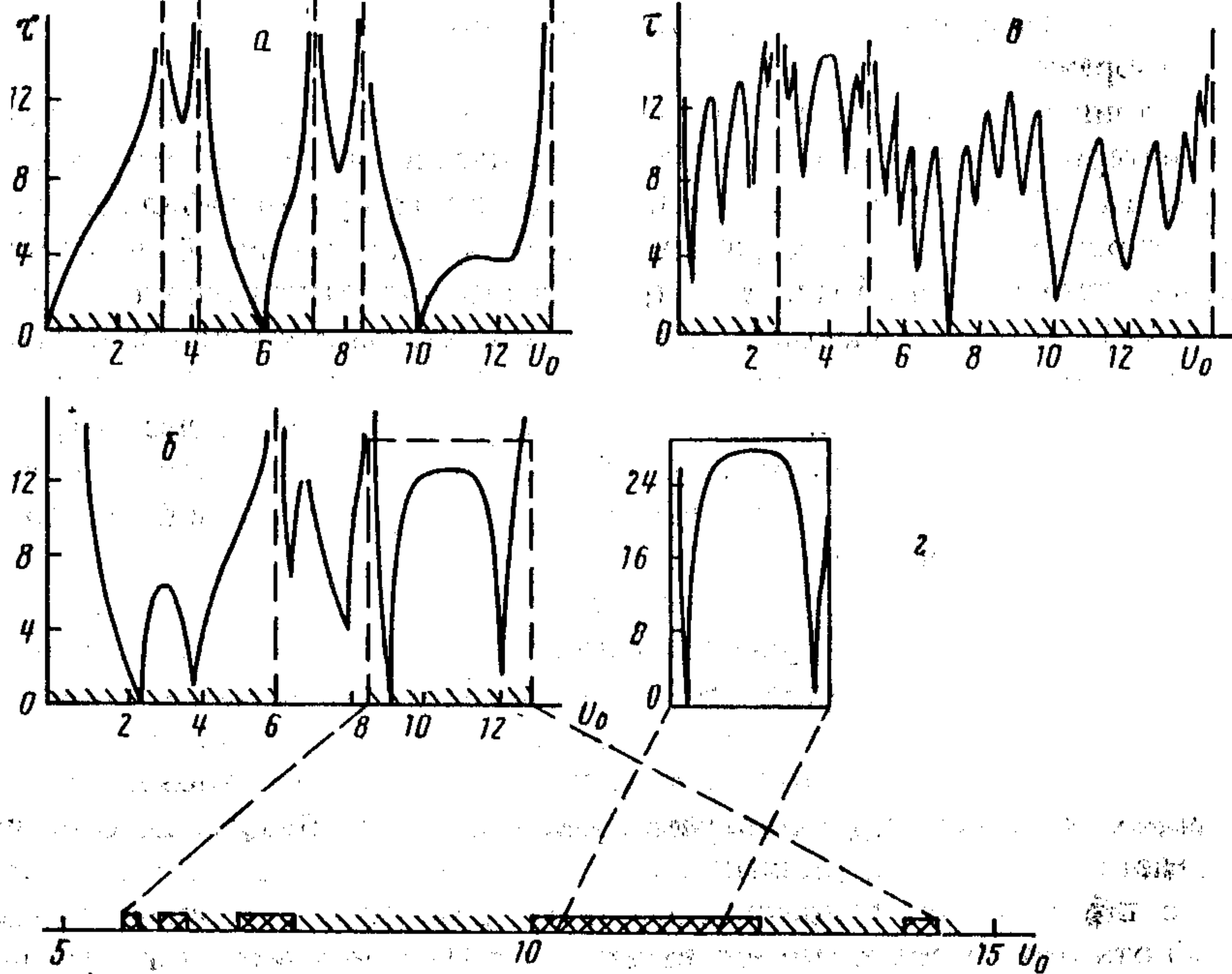


Рис. 1. Зависимости времени установления колебаний от начальных условий, полученные экспериментально при различных значениях параметра неравновесности:  $V = 0,607$  (а);  $0,516$  (б),  $0,675$  (в);  $0,726$  в (г)

областей, сложная форма которых в трехмерном пространстве состояний не обсуждается в рамках данного сообщения, а одномерное сечение представлено на рисунках различной штриховкой.

Очевидно, что если изображающая точка в пространстве состояний в начальный момент времени оказывается на аттракторе, длительность переходного процесса равна 0. В других случаях время установления колебаний отлично от 0 и определяется положением начальной точки в бассейне притяжения, а также значением параметра неравновесности. При задании начальной точки на границах бассейнов притяжения, длительность процесса установления наиболее велика и определяется точностью задания, а также уровнем естественных и технических флуктуаций.

Типичный вид экспериментальных зависимостей от начальных условий времени установления колебаний, период которых больше 1, приведен на рис. 1, где внизу отмечены и бассейны притяжения различных колебательных состояний. Рисунок отражает три характерных конфигурации зависимости  $\tau(U_0)$ . Первая (рис. 1, а) соответствует такому значению  $V_0$  параметра неравновесности, при котором рассматриваемый нелинейный цикл максимально устойчив (о чем в эксперименте можно было судить по реакции системы на специально вводимое небольшое внешнее возмущение). Зависимость времени установления от начальных условий в этом случае имеет вид "клювов" с краями, монотонно возрастающими к границам раздела областей бассейнов притяжения различных мультистабильных состояний. При уменьшении  $V$  в некоторой окрестности  $V_0$  зависимость времени установления вблизи границ бассейнов остается монотонной, а внутри областей, появляется локальный максимум — "горб" (рис. 1, б). Время установления колебаний на "горбах" может достигать достаточно больших значений (превышающих время наблюдения, ограниченное техническими возможностями экспериментальной установки).

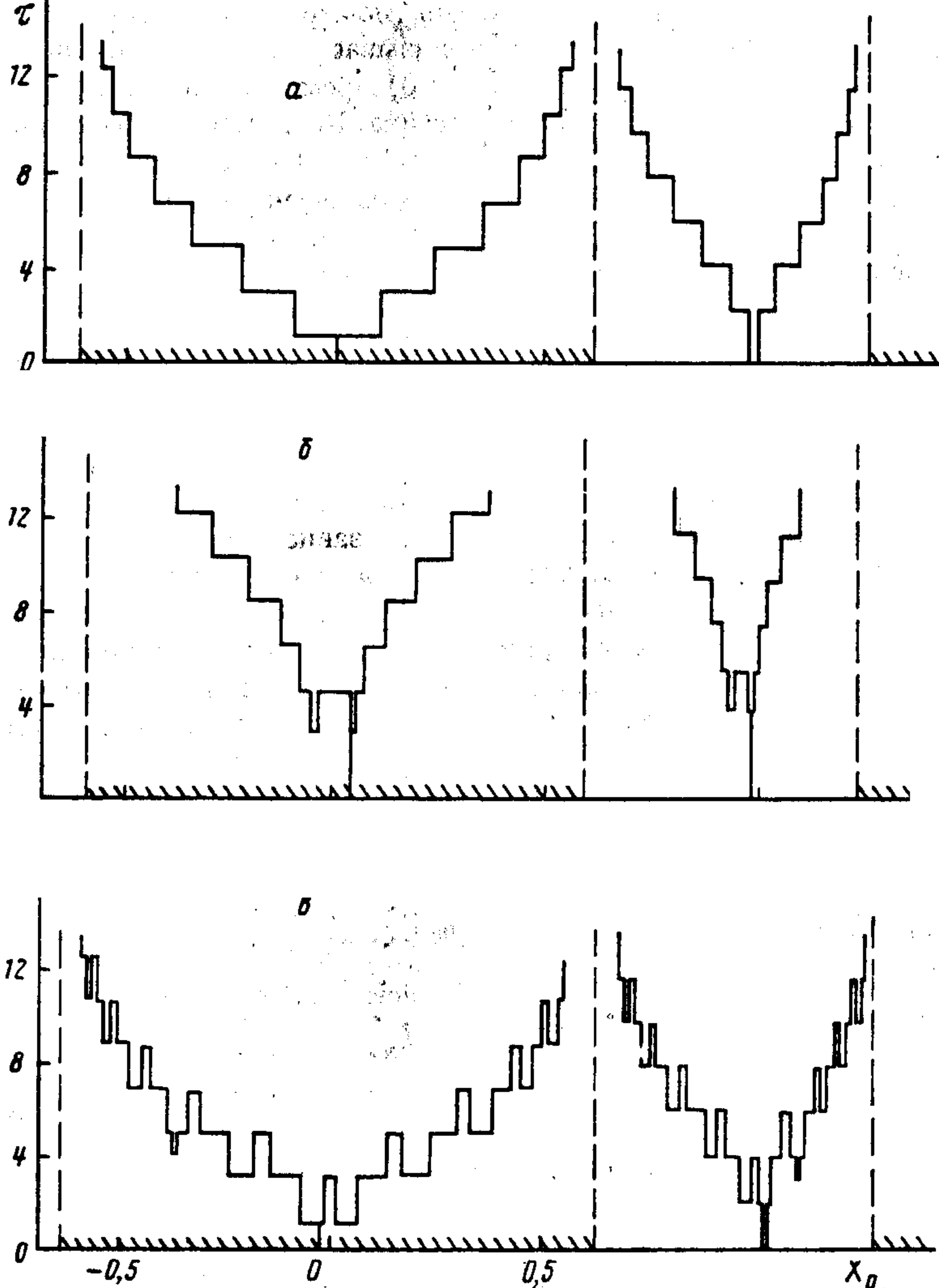


Рис. 2. Расчетные зависимости времени установления колебаний от начальных условий для значений параметра  $A = 1$  (а),  $0,95$  (б);  $1,05$  (в)

Для  $V > V_0$  характер зависимости  $\tau(U_0)$  отличается от рассмотренных случаев большей изрезанностью и имеет характерный вид, представленный на рис. 1, в. Следует отметить, что в первых двух рассмотренных случаях в переходном процессе с течением времени идет монотонное нарастание или уменьшение размаха колебаний, а в случае рис. 1, в приближение размаха к установившемуся уровню происходит немонотонно (колебательно). Увеличение периода колебаний в результате бифуркации удвоения или жесткого перехода приводит к возрастанию числа возможных мультистабильных состояний, но сохраняет внутри областей бассейнов притяжения описанные характерные варианты зависимостей  $\tau(U_0)$ . После каждой следующей бифуркации удвоения все области бассейна притяжения потерявшего устойчивость колебательного состояния дробятся на совокупность областей двух мультистабильных состояний удвоенного периода (см. рис. 1, в, г).

4. Столь нетривиальное поведение зависимостей времен установления от начальных условий и параметра неравновесности отражается простой моделью:

$$(1) \quad X_{n+1} = f(X_n) = A - X_n^2,$$



где  $X_n$  — координата,  $n$  — дискретное время (номер шага итерации),  $A$  — параметр неравновесности. Проведенный анализ показывает, что при существовании суперустойчивого цикла (мультипликатор равен 0) время установления постепенно нарастает от точек решения к границам бассейна. Например, в области существования колебаний с периодом 2 это наблюдается при  $A = 1,0$ , когда локальный минимум для  $X_{n+2} = f(f(X_n))$  совпадает с одной из точек решения (рис. 2, а, ему наиболее близок в эксперименте олучай рис. 1, а). Если мультипликатор положителен, в зависимости  $\tau(X_0)$  при достаточной точности счета можно наблюдать появление характерного для рис. 1, б "горба" (см. рис. 2, б). Если мультипликатор отрицателен, зависимость времен установления от начальных условий становится "изрезанной" (см. рис. 2, в и 1, в).

5. Известно, что вблизи порога перехода к хаосу система (1) подчиняется закономерностям подобия [4] с соответствующими масштабными коэффициентами. Эти закономерности касаются как установившихся динамических состояний, так и переходных процессов, поэтому вид зависимостей, представленных на рис. 2, универсален для циклов последовательности 2, где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Оценив по трем бифуркационным значениям параметра неравновесности  $V_i$  величину постоянной  $\delta = (V_{i+1} - V_i)/(V_i - V_{i-1})$  можно экспериментально проиллюстрировать универсальность зависимостей рис. 1. Так, сравнив рис. 1, в (фрагмент, выделенный пунктиром) и рис. 1, г, значения параметров для которых находятся в следующем соответствии:  $V_K - V_B = \delta (V_K - V_T)$ , а масштабы по осям  $U_0$  и  $T$  соотносятся как 1/2,5 и 1/2, можно убедиться в их схожести.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каясу и др. // Параметроны. М.: Изд-во ИЛ, 1962. С. 164.
2. Linsay P.S. // Phys. Rev. Letters. 1981. V. 47. № 19. P. 1349.
3. Ахманов С.А., Белинский Л.В., Чиркин А.С. // Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 83.
4. Фейгенбаум М. // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. № 2. С. 343.

Поступила в редакцию  
17.04.92