

УДК 517.9

## ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ, КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОМЕРОВ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ В СВЯЗАННЫХ ФЕЙГЕНБАУМОВСКИХ СИСТЕМАХ

*В. В. Астахов, Б. П. Безручко, В. И. Пономаренко*

Рассмотрены механизмы формирования мультистабильности в связанных фейгенбаумовских системах, проведена классификация возможных видов колебаний, прослежены закономерности в росте числа изомеров с увеличением количества ячеек и периода цикла, исследована их эволюция при изменении параметров системы.

Для исследования свойств и закономерностей пространственно-временного хаоса в качестве простейших моделей часто используются системы, представляющие собой большое количество однородных элементов, связанных между собой в цепочку [1-4]. Элементом цепочки выбирают какую-либо из хорошо изученных нелинейных систем с низкой размерностью фазового пространства, демонстрирующих типичные переходы к хаосу. Одной из таких широко распространенных моделей является цепочка из фейгенбаумовских элементов. На наш взгляд, в выявлении характерных особенностей сложного пространственно-временного поведения таких цепочек могут помочь исследования связанных систем с небольшим числом элементов. Следует подчеркнуть, что это относится не непосредственно к пространственно-временным процессам, а к механизму формирования мультистабильности и классификации возможных видов колебаний. Дело в том, что еще до порога возникновения хаоса в таких системах наблюдается большое количество одновременно сосуществующих устойчивых состояний. Процесс их образования и классификация возможных видов состояний, как будет показано ниже, являются общими для цепочек с различным числом элементов. Детальное исследование связанных систем с небольшим числом элементов носит не только вспомогательный характер, но имеет и самостоятельное значение из-за наличия в них мультистабильности. Системы же с мультистабильностью привлекают к себе интерес в связи с возможностью их использования в качестве элементов памяти [1]. В работе исследуются механизмы формирования мультистабильности в связанных фейгенбаумовских системах с дискретной группой симметрии по отношению к временному сдвигу, проводится классификация возможных видов колебаний, прослеживаются закономерности в росте числа видов колебаний с увеличением количества ячеек и периода цикла, исследуется их эволюция при изменении параметров системы.

Обратимся к исследованию трех связанных в цепочку фейгенбаумовских систем. Численно изучалась система отображений вида

$$\begin{aligned} X_1(n+1) &= A - X_1^2(n) + K_1(X_1^2(n) - X_2^2(n)), \\ X_2(n+1) &= A - X_2^2(n) + K_2(2X_2^2(n) - X_1^2(n) - X_3^2(n)), \\ X_3(n+1) &= A - X_3^2(n) + K_3(X_3^2(n) - X_2^2(n)), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A$  - параметр нелинейности,  $K_1, K_2, K_3$  - коэффициенты связи. Там, где специально не оговариваемся, будем полагать  $K_1 = K_2 = K_3 = K$ . Экспериментально исследовались три резистивно связанных

колебательных контура с нелинейностью в виде  $p$ - $n$ -перехода, синфазно возбуждаемых гармоническим сигналом при значениях параметров, соответствующих фэйгенбаумовскому переходу к хаосу\*. Параметру  $A$  в отображениях (1) соответствует амплитуда внешнего воздействия, коэффициенту связи  $K$  соответствует величина, обратная сопротивлению связи. Система (1) обладает симметрией по отношению к замене

$$(X_1, X_2, X_3) \longleftrightarrow (X_3, X_2, X_1) . \quad (2)$$

В пределе нулевой связи каждый из элементов цепочки с увеличением параметра нелинейности демонстрирует последовательность удвоений периода, что иллюстрирует хорошо известная бифуркационная диаграмма ("дерево Фейгенбаума"), представленная на рис. 1 (см. на вклейке). Так как фэйгенбаумовская система имеет характерную структуру временной реализации, т. е. значения динамической переменной изменяются во времени в определенной закономерности, каждый режим периода  $2^n T$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $T$  - шаг итераций или период внешнего воздействия) может быть записан последовательностью  $2^n$  символов, каждый из которых соответствует конкретной ветви бифуркационной диаграммы (отсчет будем начинать с максимального значения последовательности, которому присвоим номер 1 (рис. 1)). Теперь состояние каждого элемента цепочки в фиксированный момент времени будет характеризоваться одним из этих символов.

Каждый временной режим колебаний с периодом  $2^n T$  может быть реализован с различным пространственным распределением состояний по цепочке. Конкретный временной режим с определенным пространственным распределением будем обозначать  $2^n T^{i,j,k}$ , где  $i, j, k$  соответствуют конкретным символам указанной последовательности. Отсчет будем проводить начиная с максимального значения в первом осцилляторе, что соответствует  $i=1$ ,  $j$  и  $k$  принимают значения от 1 до  $2^n$ . Таким образом, данная классификация характеризует поведение системы как в пространстве, так и во времени. Режимы с одинаковым временным периодом будем называть изомерами, как было предложено в [6]. Очевидно, что число изомеров зависит от числа ячеек в цепочке и периода цикла. Так, в цепочке из трех ячеек с каждым последующим удвоением число изомеров будет возрастать в четыре раза, для четырех - в восемь раз, для пяти - в шестнадцать раз и т. д. В общем виде для  $N$  ячеек и режима периода  $2^n T$  будет  $(2^n)^{N-1}$  изомеров.

Для исследования их эволюции при изменении параметров системы полезно построить эволюционную схему в пределе нулевой связи с ростом параметра нелинейности. Поскольку в соответствии с бифуркационной диаграммой отдельной фэйгенбаумовской системы (рис. 1) при удвоении периода  $2^n T$  каждая ветвь  $S$  на "дереве Фейгенбаума" порождает две ветви  $S$  и  $S + 2^n$ , то схема эволюции изомеров для трех элементов в пределе нулевой связи будет иметь вид, представленный на рис. 2. Ясно, что нетрудно построить подобную схему эволюции и для большего числа элементов.

Остановимся подробнее на исследовании динамики системы (1). Указанные для вырожденного случая виды изомеров имеют место и при конечной связи. На рис. 3 показана схема эволюции изомеров с ростом параметра нелинейности при фиксированном значении связи  $K=0,005$ . При  $A < 0,75$  в системе имеется синфазный изомер  $T^{111}$ . С ростом  $A$  наблюдается последовательность бифуркаций удвоения синфазных изомеров, завершающаяся возникновением синфазного стохастического

\* В работе [5] было показано, что динамика подобной экспериментальной системы из двух контуров хорошо описывается двумя квадратичными отображениями с таким же типом связи, как в [1].



режима. Значения, при которых происходят бифуркации удвоения, точно совпадают с соответствующими бифуркационными значениями одиночной системы. Последовательность мягких бифуркаций с удвоением периода синфазных номеров образует основную ветвь А эволюционной схемы (рис. 3). Синфазный изомер  $T^{111}$  порождает помимо  $2T^{111}$ , сменяющего его мягким образом, изомеры  $2T^{121}$ ,  $2T^{112}$  и  $2T^{122}$ , которые становятся основаниями новых ветвей мягких переходов между колебательными режимами схемы эволюции изомеров\*. Изомеры  $2T^{111}$  и  $2T^{121}$  являются самосимметричными в том смысле, что замена переменных (2) переводит точки на цикле в точки того же цикла. Изомеры  $2T^{112}$  и  $2T^{122}$  являются взаимосимметричными: при замене (2) точки на одном изомере переходят в соответствующие точки на другом изомере. Каждый цикл в цепочке удвоений синфазных режимов, так же как для  $T^{111}$ , порождает помимо самосимметричного синфазного цикла с удвоенным периодом самосимметричный несинфазный цикл и два взаимосимметричных цикла, образующих основания новых ветвей эволюционной схемы. Так, например, кроме  $4T^{111}$  еще наблюдается самосимметричный  $4T^{131}$  и два взаимосимметричных  $4T^{113}$ ,  $4T^{133}$  и т. д. (см. рис. 3а). Рассмотрим эволюцию самосимметричных несинфазных циклов на примере изомера  $2T^{121}$  (см. рис. 3б). С ростом параметра нелинейности наблюдается цепочка мягких переходов с удвоением периода  $2T^{121}$ ,  $4T^{121}$ ,  $8T^{161}$ ,  $16T^{1,14,1}$  (ограничимся изомерами периода  $16T$ ). Каждый из циклов в перечисленной цепочке удвоений, помимо указанных, образующих ветвь Б мягких переходов, порождает еще один самосимметричный и два взаимосимметричных цикла (см. рис. 3б). Каждый из самосимметричных циклов эволюционирует аналогичным образом. Эволюцию взаимосимметричных изомеров рассмотрим на примере эволюции циклов  $2T^{112}$  и  $2T^{122}$ . С ростом параметра А на базе каждого из циклов наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода (ветви Б' и Б'' на рис. 3в). Следует отметить, что циклы одинакового периода на каждой из ветвей являются взаимосимметричными в смысле замены (2). Помимо циклов, образующих ветви Б' и Б'', возникают еще по три цикла с одинаковым периодом. Например, помимо  $4T^{112}$  существуют изомеры  $4T^{114}$ ,  $4T^{132}$ ,  $4T^{134}$ , порожденные изомером  $2T^{112}$ . Изомер  $2T^{122}$ , помимо  $4T^{144}$ , порождает взаимосимметричные перечисленным изомеры  $4T^{122}$ ,  $4T^{124}$ ,  $4T^{142}$ . Пара изомеров, симметричных друг другу, порождает изомеры, также обладающие взаимной симметрией. При обратном движении по параметру А самосимметричный и взаимосимметричные циклы жестко сменяются самосимметричным циклом с тем же периодом, как показано на рис. 3а, б стрелками. Жесткий переход с самосимметричного цикла на самосимметричный происходит при большем значении параметра, чем для соответствующих взаимосимметричных режимов, исчезающих одновременно. Изомеры, изображенные на рис. 3в, при обратном движении по параметру А также жестко переходят на режимы, образующие ветви мягких переходов. Так, например, режим  $4T^{134}$  вначале жестко сменяется режимом  $4T^{114}$ , после чего происходит жесткий перескок на  $4T^{112}$ . Изомер  $4T^{132}$  жестко сменяется изомером  $4T^{112}$ . Предсказанные в пределе нулевой связи изомеры существуют не при всех значениях К. Часть из них наблюдается

\* Порождаются эти виды изомеров из предшествующего синфазного в пределе нулевой связи. Задача о выяснении конкретных типов бифуркаций при конечной значении К, приводящих к указанным несинфазным циклам, в рамках данной работы не ставилась.



только при очень малых значениях коэффициента связи. С его увеличением происходит их постепенное исчезновение. С целью более детального исследования динамики системы в зависимости от коэффициента связи проведем разбиение плоскости параметров  $\lambda$ - $K$  на характерные режимы.

На рис. 4 показана структура плоскости параметров  $\lambda$ - $K$ , построенная экспериментально для системы трех резистивно связанных в цепочку нелинейных колебательных контуров, синфазно возбуждаемых гармоническим сигналом. Динамика этой экспериментальной системы в интересующей нас области значений параметров хорошо описывается системой отображений (1). Структуру плоскости параметров удобно представлять в виде листов, соответствующих эволюции различных колебательных режимов. На рис. 4а показана эволюция синфазного изомера  $T^{111}$ , что соответствует ветви  $A$  на рис. 3. Независимо от коэффициента связи при увеличении параметра  $\lambda$  наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся возникновением режима синфазных стохастических колебаний. На рис. 4б, в показана эволюция изомеров  $2T^{121}$  и  $2T^{112}$  (ветви  $B$  и  $B'$  на рис. 3). Эволюция изомера  $2T^{122}$  аналогична  $2T^{112}$ . Области существования исходных изомеров  $2T^{121}$ ,  $2T^{112}$  ограничены снизу линиями  $l$ . При перемещении по плоскости параметров вверх наблюдается также последовательность мягких переходов, что и в численных экспериментах. Изомеры, показанные на схеме эволюции на рис. 3, наблюдаются также и в физическом эксперименте, однако на рис. 4 показаны только те из них, которые образуют цепочки мягких переходов. Из рис. 4б, в видно, что линии бифуркационных переходов для несинфазных режимов с увеличением коэффициента связи поднимаются вверх. Поэтому при фиксированном значении  $\lambda$  с увеличением коэффициента связи  $K$  число одновременно сосуществующих изомеров будет уменьшаться и начиная с некоторого значения  $K$  в системе будет существовать только синфазный изомер.

В системе трех диссипативно связанных фейгенбаумовских элементов все существующие изомеры с увеличением параметра нелинейности эволюционируют к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Возникновение квазипериодического режима и перехода к хаосу через разрушение тора при численном и экспериментальном исследовании не наблюдалось. Однако уже при небольшой деформации системы эволюция тех же самых изомеров качественно меняется. Так, в системе (1) при  $K_1=K_3=K$  и  $K_2=K/2$ , что

дает частичную невзаимность связи между элементами, изомер  $2T^{121}$  с увеличением параметра  $\lambda$  претерпевает бифуркацию рождения тора. С ростом надкритичности тор увеличивается в размерах, затем происходит потеря гладкости и образование тор-аттрактора. Изомеры  $2T^{112}$  и  $2T^{122}$  по-прежнему эволюционируют к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Динамика синфазных режимов также остается прежней. Переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений происходит в цепочках и со взаимной связью типа (1), но это зависит от количества элементов цепочки. При нечетном количестве квазипериодические движения не возникают, при четном возникают. Причем рождение тора происходит из самосимметричных изомеров, имеющих вид: для цепочки из двух элементов  $2T^{12}$ , из четырех -  $2T^{1221}$ , из шести -  $2T^{122112}$ , из восьми -  $2T^{12211221}$ , из шестнадцати -  $2T^{1221122112211221}$  и т. д. Квазипериодические движения возникают также из изомеров с большим периодом  $4T$ ,  $8T$ ,  $16T, \dots$  и с соответствующей пространственной структурой  $4T^{13}$ ,  $4T^{1331}, \dots$ ,  $8T^{15}$ ,  $8T^{1551}$ ,  $8T^{155115}, \dots$ . Все они обладают самосимметричностью и возникли из соответствующих синфазных изомеров. Отличия в динамике цепочек из четного и нечетного

количества элементов имеются только при небольших  $N$ , когда еще не проявляются пространственно-временные процессы.

Предложенная классификация изомеров и естественным образом связанный с ней механизм формирования мультистабильности в пределе нулевой связи не зависят от количества фейгенбаумовских элементов в цепочке и позволяют предсказать какие виды изомеров, в принципе, могут существовать в системе. С увеличением связи все многообразие изомеров не сохраняется. Для систем с диссипативной связью дольше всех существуют изомеры, возникшие непосредственно из синфазных режимов с небольшим периодом. Начиная с некоторых значений  $K$  остается только ветвь  $A$  синфазных режимов.

На наш взгляд, полученные результаты могут оказаться полезными как для анализа систем с мультистабильностью, которые могут быть использованы в качестве элементов памяти, так и при изучении пространственно-временных процессов в цепочках из большого числа фейгенбаумовских элементов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. - Singapore: World Scientific, 1986.
2. Анищенко В. С., Арансон И. С. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1120.
3. Кузнецов С. П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 8. С. 883.
4. Alstrom P., Ritala R.K. // Phys.Rev.A. 1987. V.35. N 1. P.300.
5. Астахов В. В., Безручко Б. П. и др. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. № 3. С. 60.
6. Ikeda K., Matsumoto K. // Physica. 1987. V. 29D. N 1-2. P.223.

Саратовский филиал  
Института радиотехники  
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию  
30 ноября 1989 г.

## MULTISABILITY FORMATION, GLASSIFICATION OF ISOMERS AND THEIR EVOLUTION IN COUPLED FEIGENBAUM SYSTEMS

V.V.Astakhov, B.P.Bezruchko, V.I.Ponomarenko

Multistability formation mechanisms in coupled Feigenbaum systems are investigated, the classification of possible oscillation types is carried out, relationships in growth of isomers number with the increased cell number and cycle period, isomer evolution by system parameter variation is studied.

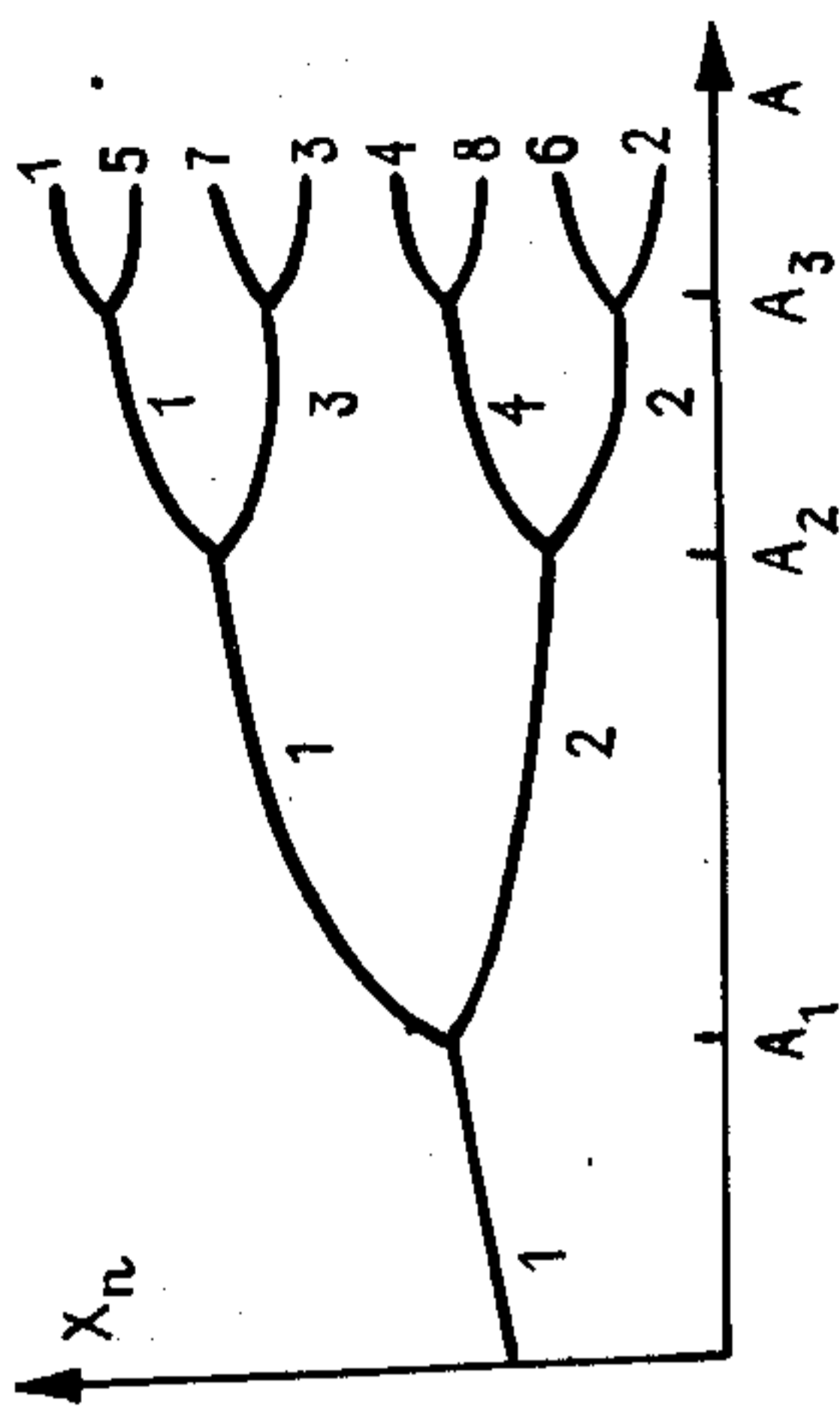
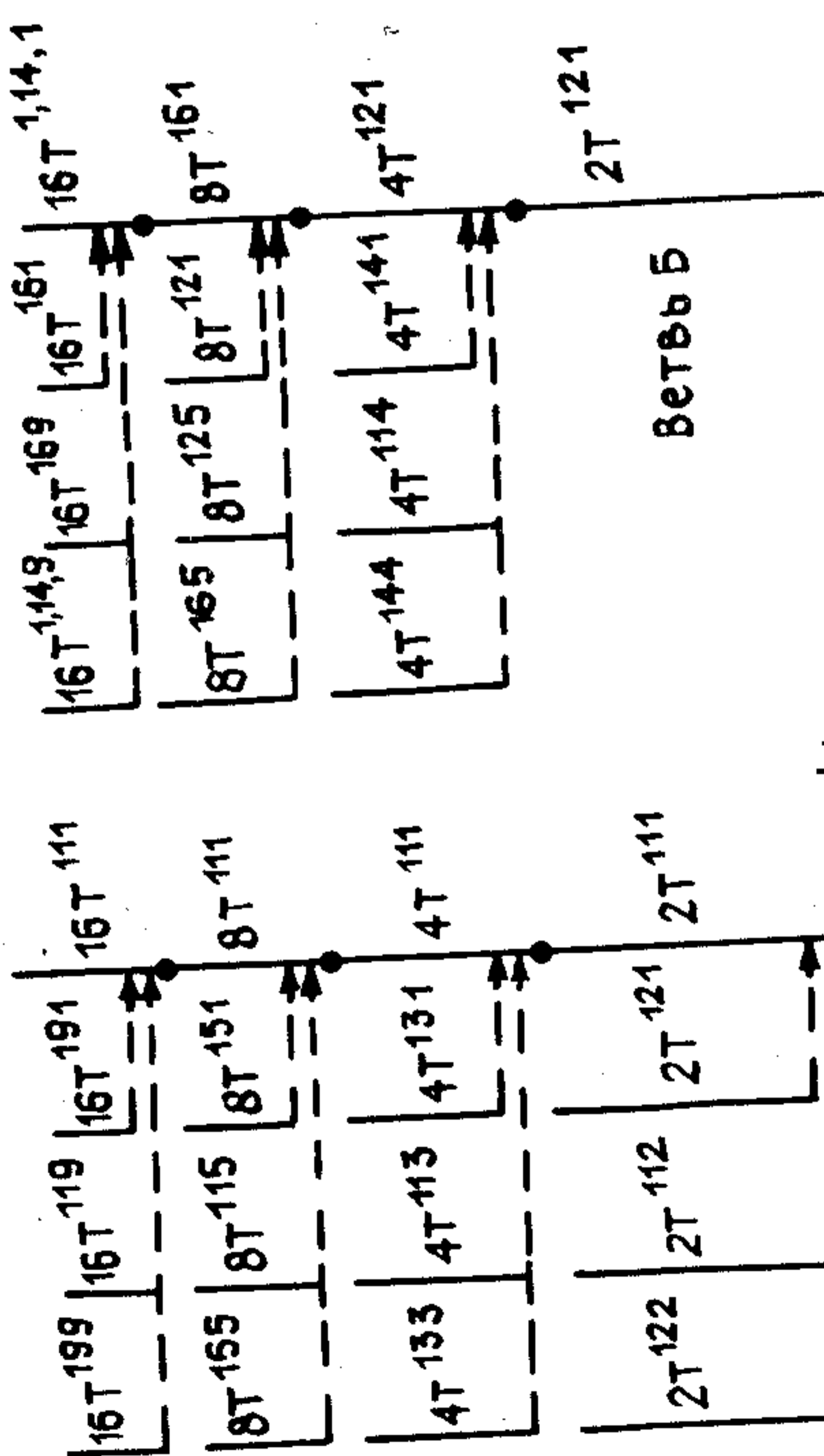
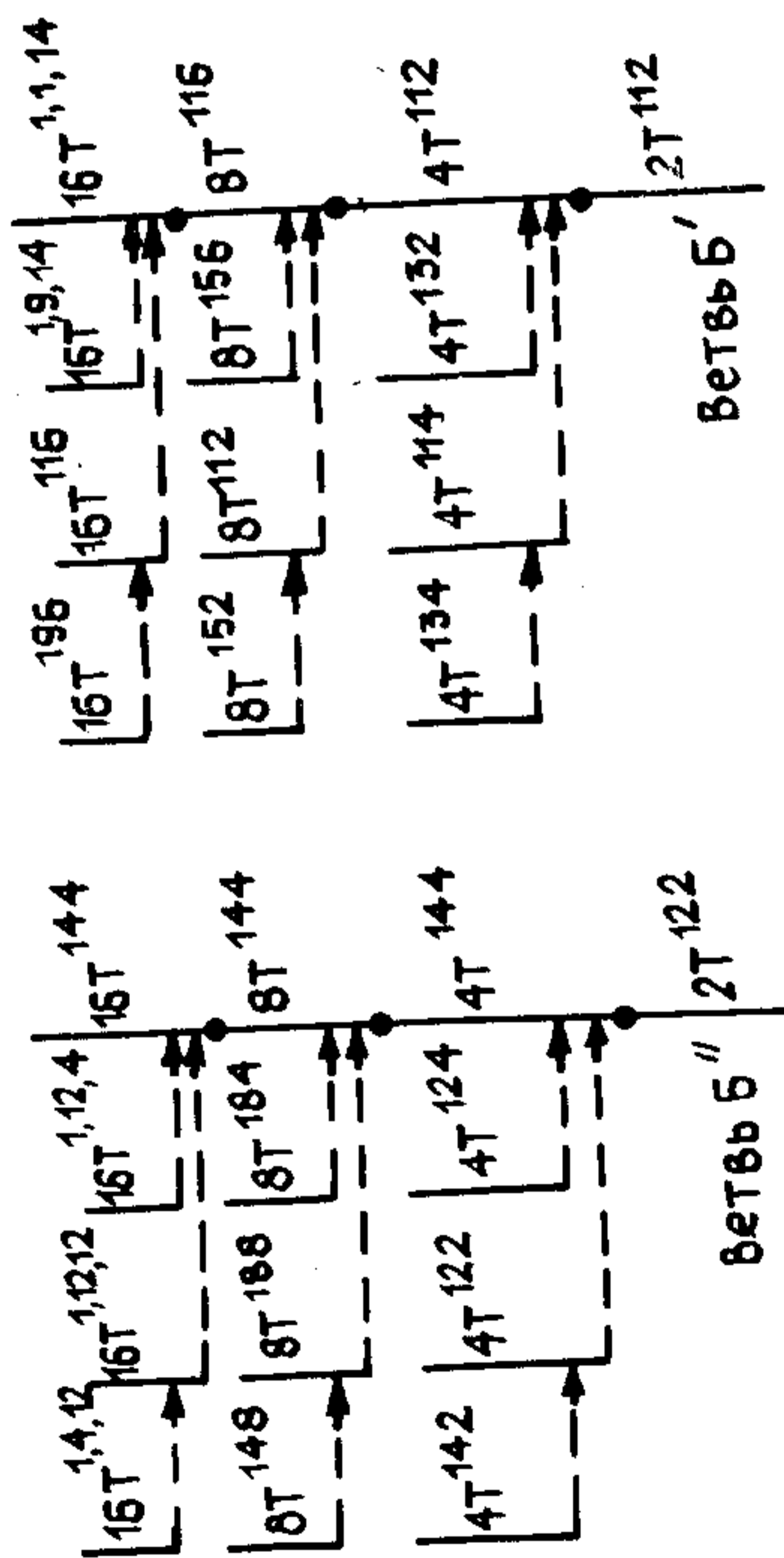


Рис. 1



б)



б)

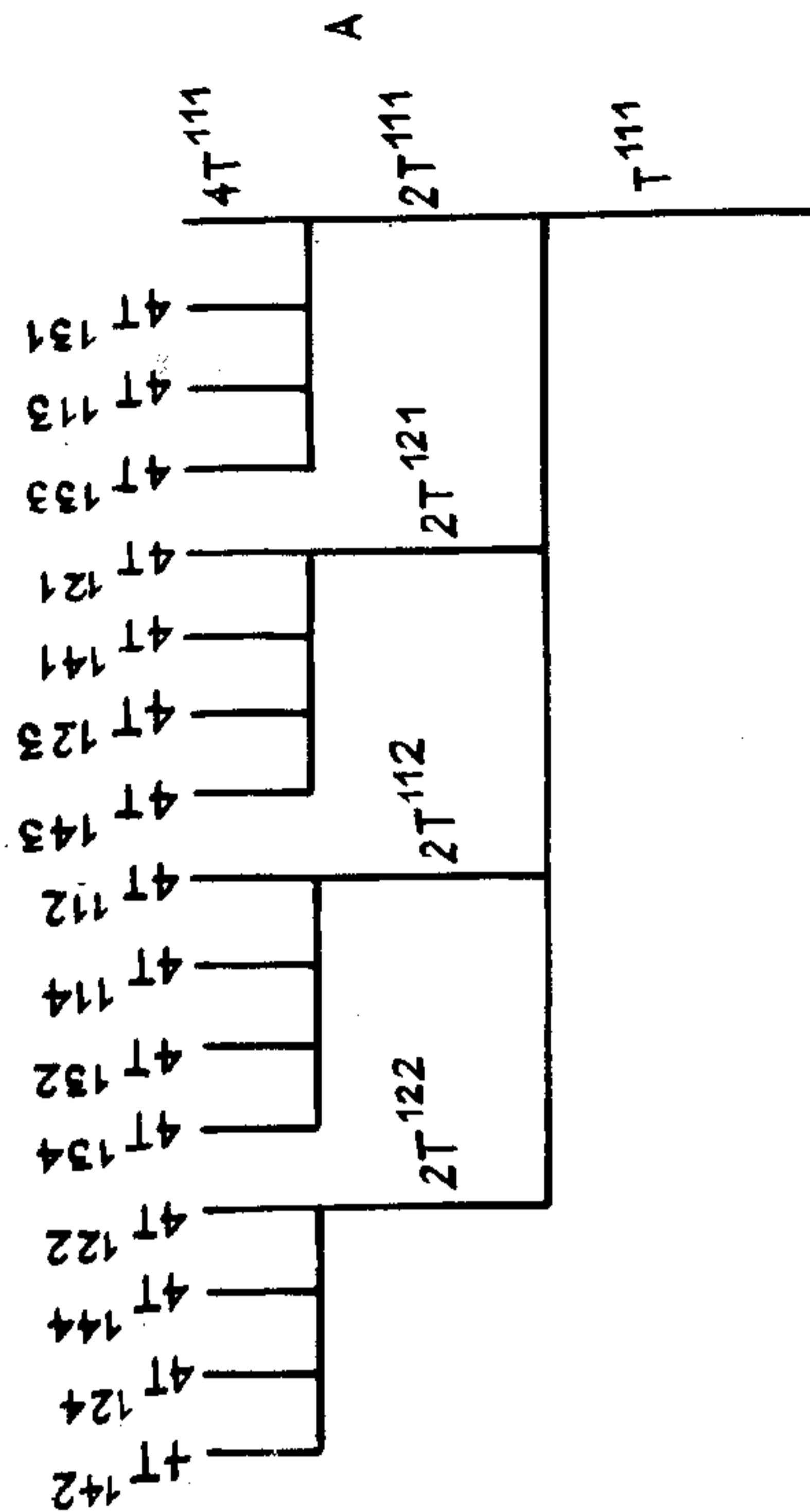


Рис. 3.

Рис. 2.

