

© Б.П. БЕЗРУЧКО, академик Ю.В. ГУЛЯЕВ,
О.Б. ПУДОВОЧКИН, Е.П. СЕЛЕЗНЕВ

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА И ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ СВЯЗЬЮ

1. Исследование нелинейных явлений — одно из актуальных направлений современного этапа развития науки. Важным элементом этого процесса является формирование универсальных нелинейных моделей. К таким моделям относится и рассматриваемая система, состоящая из двух подсистем, каждая из которых демонстрирует с изменением параметра переход к хаосу через последовательность удвоения периода колебаний, а связь обеспечивает воздействие только первой подсистемы на вторую. Объекты с выделенными для подсистем свойствами [1] весьма распространены в природе, а выбранный тип связи привлекает внимание, в частности, при моделировании турбулентности, развивающейся "вниз по потоку" [2, 3]. Универсальность критических явлений на пороге перехода к хаосу в рассматриваемой системе изучалась в [4]. Настоящая работа затрагивает еще одну важную сторону модели — наличие, при фиксированном значении параметров, нескольких возможных устойчивых движений (мультистабильность). Кроме того, что описание модели подразумевает знание всех разрешенных движений, исследование мультистабильности представляет и практический интерес в связи с проблемой создания запоминающих элементов и устройств для обработки информации.

2. Рассмотрение ограничено системами с дискретной симметрией относительно временного сдвига. Объектом численных исследований являются связанные рекуррентные отображения:

$$X_{n+1} = \lambda_1 - X_n^2, \quad Y_{n+1} = \lambda_2 - Y_n^2 - k X_n^2,$$

где X_n , Y_n — динамические переменные, характеризующие соответственно состояние первой и второй подсистем; λ_1 , λ_2 — параметры нелинейности подсистем; k — коэффициент связи.

Экспериментально исследовалась система, состоящая из двух одинаковых нелинейных радиотехнических осцилляторов (колебательных контуров), образованных катушками индуктивности и нелинейными емкостями p - n -переходов транзисторов КТ-908 Б. Оба контура возбуждались от внешнего генератора синфазно синусоидальными сигналами, амплитуды которых можно было регулировать независимо. Связь между контурами осуществлялась с помощью дифференциального усилителя с гасящим сопротивлением или катодного повторителя. Параметрами нелинейности в экспериментальной системе являются амплитуды гармонических эдс Λ_1 и Λ_2 , возбуждающих контуры, а параметром связи — коэффициент передачи элемента связи K ; в качестве динамических переменных использовались значения напряжений на нелинейных элементах. Частота возбуждающего сигнала, уровень диссипации и другие параметры, влияющие на вид колебательного режима в отдельном контуре, были фиксированы в интервале значений, где изолированные подсистемы с изменением Λ ведут себя в соответствии с закономерностями [1]. Для удобства описания примем период внешнего воздействия в экспериментальной системе за 1.

3. При рассмотрении в широкой области параметров и начальных условий исследуемая система* демонстрирует столь большое количество колебательных состояний, что для их описания и классификации необходимо ввести разграничения по некоторому определяющему признаку. В качестве такового будем использовать значения периодов колебаний в подсистемах (N — в первой, M — во второй) и "сдвига фаз" между колебаниями подсистем n ** . При $k = 0$ достаточность этого набора для классификации всех возможных движений очевидна: по определению подсистемы колеблются с периодами 2^m , где $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$, а временной сдвиг между ними может быть равен $0, 1, 2, \dots, 2^{m-1}$; в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ период и амплитуда колебаний подсистем одинаковы ($N = M$). При $k \neq 0$ подсистемы неравноправны, и в них даже для одинаковых значений параметров $\lambda_1 = \lambda_2$ могут быть реализованы колебательные режимы, периоды которых различны, а полнота предложенного набора (N, M, n) и возможность реализации того или иного колебательного режима требуют подтверждения. Введем индекс реализуемого периодического колебательного режима T (периодического решения); $N - MT^n$, где N, M и n измеряются: для экспериментальной системы в единицах периода внешнего воздействия; для (1) числом шагов итераций; n будем называть номером вида колебаний. $N \leq M$, так как во второй подсистеме обязательно присутствует периодичность сигнала воздействия колебания первой. Обозначение $N - MX^n$ будем использовать, если вторая подсистема находится в состоянии хаоса, в то время как колебания первой периодичны.

4. Каждый колебательный режим занимает определенную область в пространстве параметров $(\lambda_1, \lambda_2, k)$ связанной системы. О структуре этого пространства можно составить представление, рассматривая его сечение — плоскости двух параметров при фиксированном третьем (рис. 1а–г). На рис. 1а по результатам численного исследования (1) представлен фрагмент картины разбиения плоскости параметров λ_1, λ_2 на области существования различных колебательных режимов при $k = 0,1$. Так, в интервале значений $\lambda_1 < 0,75$, где в первой подсистеме существуют колебания периода $N = 1$, возможен набор регулярных и хаотических движений, номер n которых равен только 0 ***. Но уже при значениях λ_1 , соответствующих $N = 2$, возможны два варианта возбуждения колебаний с заданным M , различающиеся сдвигом временных реализаций X_n, Y_n на период ($n = 0$ и 1); а при $N = 2^m$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, в принципе возможно 2^m способов реализаций колебаний с заданным M ($n = 0, 1, 2, 3 \dots (2^m - 1)$). На базе каждого из видов с увеличением λ_2 формируется хаотический аттрактор. При движении по плоскости параметров в сторону меньших λ_2 области существования отдельных видов ограничены: для $n = 0$ линией $\lambda_2 = -0,25$, а для $n \neq 0$ соответствующей линией жесткого перехода.

Совокупность бифуркационных линий $N - MT^n$ на рис. 1а, б образует на плоскости λ_1, λ_2 структуру, похожую на "дерево Фейгенбаума" [1], обрываясь после потери устойчивости режимом $N - NT^n$. Раздваиваясь в бифуркационных точках, каждая ветвь этой структуры порождает две новые; убывающую (бифуркационные значения λ_2 уменьшаются с ростом λ_1) и возрастающую; одна из них соответствует верхней границе области существования колебательного режима

* Здесь и в дальнейшем при совпадении результатов численных и экспериментальных исследований объект, на котором они получены, не конкретизируется.

** Подобный подход использовался в [5] для случая симметричной связи, под сдвигом фаз мы понимаем сдвиг во времени между максимальными значениями в характерных временных реализациях колебаний подсистем.

*** Требования дискретной симметрии не разрешают произвольного сдвига во времени колебаний подсистем друг относительно друга, а для $N = 1$ при сдвиге на любое число периодов характер колебаний подсистем не изменится.

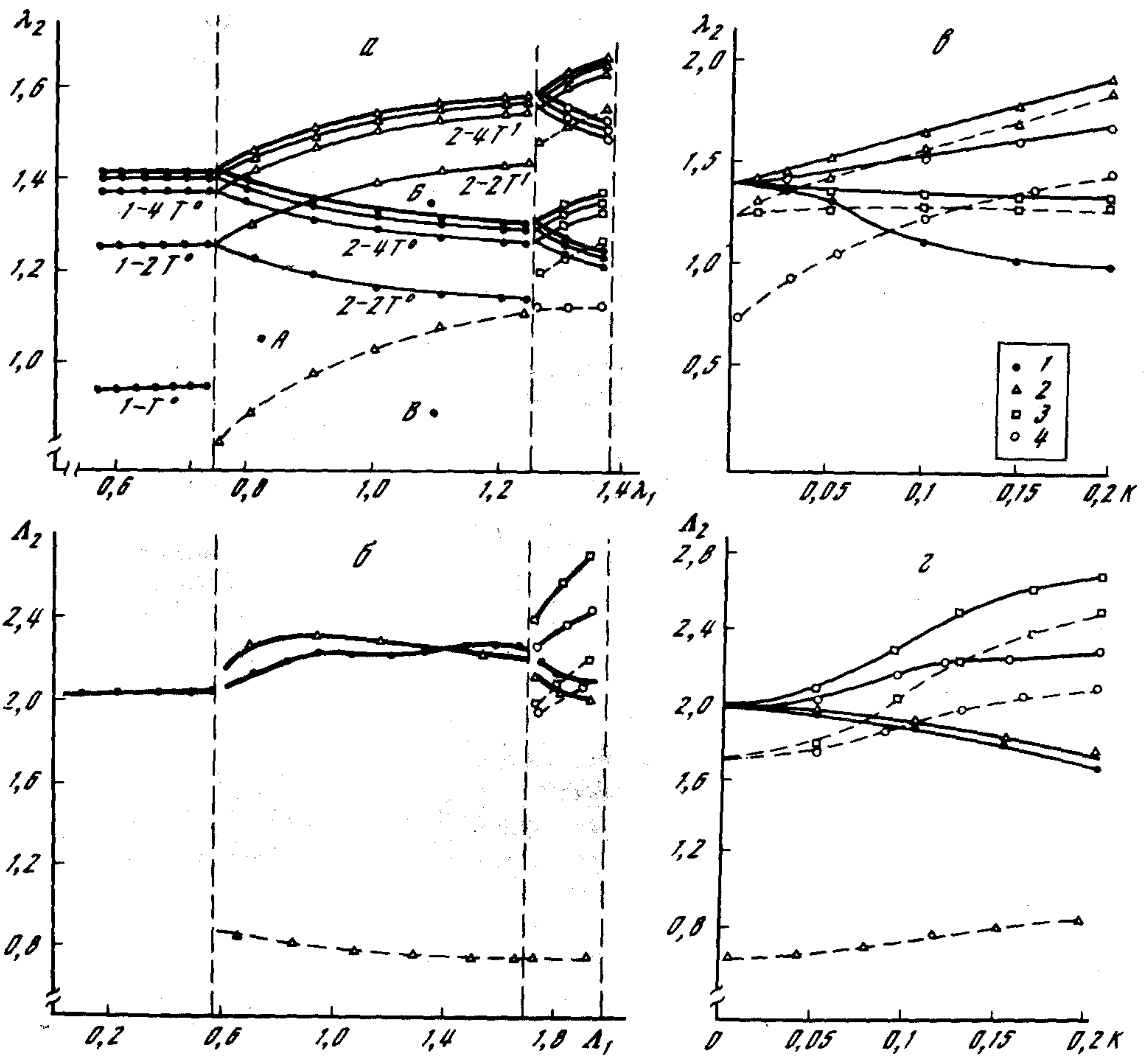


Рис. 1. Разбиение плоскостей параметров на области существования характерных колебательных режимов. Вертикальные линии соответствуют бифуркационным значениям, при которых происходит удвоение периода колебаний в первой подсистеме: сплошные линии – верхние границы областей существования колебательных режимов, индекс которых, где возможно, указан ниже; штриховые – нижние границы (соответствуют жестким переходам к колебаниям другого вида при уменьшении λ_2, Λ_2); жирные линии – критические линии, соответствующие переходу к хаосу; одинаковыми значками выделены линии одного вида: $n = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4). *a* – Плоскость $\lambda_1 - \lambda_2$ ($k = 0,1$) для системы (1); *б* – плоскость $\Lambda_1 - \Lambda_2$ ($K = 0,1$) для экспериментальной системы: показаны только линии перехода к хаосу для видов с заданным номером n и их нижние границы областей существования; *в, г* – области существования колебательных режимов $4-4T^n$ ($n = 0, 1, 2, 3$) на плоскости $\lambda_2 - k, \lambda_1 = 1,31$ (*в*), плоскости $\Lambda_2 - K, \Lambda_1 = 1,95$ (*г*)

$N-MT^n$, для которого воздействие первой подсистемы на вторую поддерживает существующие в ней колебания, а другая – противоположной ситуации. Причем образовавшаяся после расщепления линии $N-MT^n$ на рис. 1*a* линия $2N-MT^n$ сохраняет характер поведения прародительницы, оставаясь убывающей или возрастающей, а линия $2N - MT^{(n+N/2)}$ меняет его. Можно предположить, что критическая линия бесконечно расщепляется вплоть до значений λ_1 , соответствующих переходу к хаосу в первой подсистеме, что будет означать существование множества бикритических точек [4], в которых система переходит к хаосу при бесконечно малом уве-

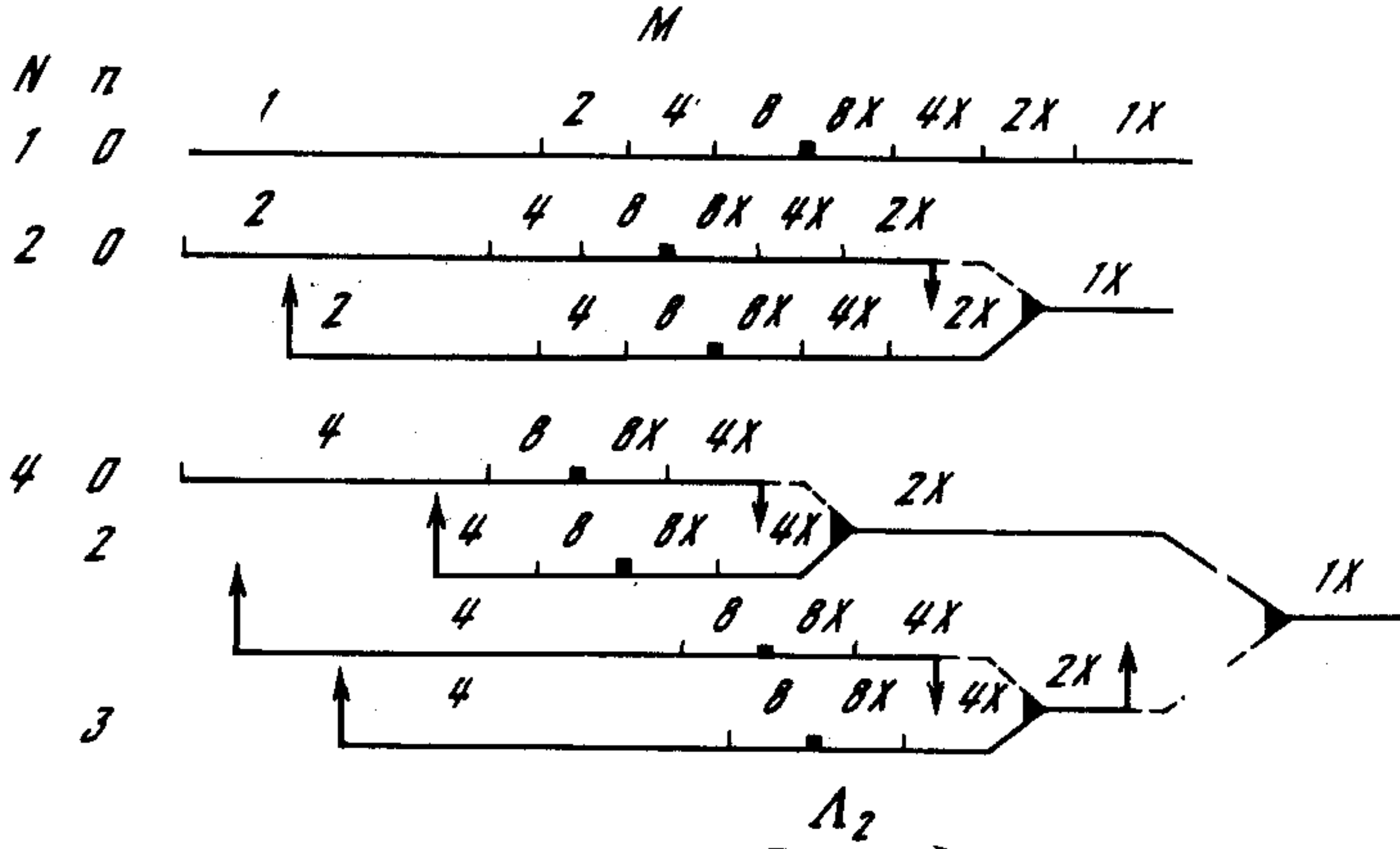


Рис. 2. Схема эволюции колебательных режимов при изменении Λ_2 для $K = 0,1$, $\Lambda_1 = 0,3; 1,2; 1,95$. Цифры над линиями – период колебаний во второй подсистеме: цифры с индексом X – число лент хаотического аттрактора; стрелками указаны жесткие переходы; закрашены области перемежаемости хаос–хаос

личении параметров λ_1 и λ_2 (на рис. 1а, б им бы соответствовало пересечение критических ветвей и линии $\lambda_1 = \lambda_{1кр}$).

Возможности экспериментальной установки позволяли наблюдать в системе несимметрично связанных контуров все отмеченные колебательные режимы, вплоть до значений N и M , равных 16. Разбиение плоскости параметров $\Lambda_1 - \Lambda_2$ (рис. 1б) в области, близкой к критической, сохраняло качественные особенности рассмотренной на рис. 1а картины, несмотря на неизбежную в эксперименте неидентичность элементов и при технических изменениях подсистем и элемента связи. Существующая в эксперименте при малых N немонотонная зависимость бифуркационных значений от параметра Λ_1 исчезает при значениях параметров, близких к критическим, так что поведение экспериментальной системы все больше соответствует модели (1). В эксперименте конкретный элемент связи определяет как взаимное расположение областей существования, так и характер поведения (убывание или возрастание) видов колебаний с заданным n , что, по всей видимости, связано с его конечной инерционностью.

Структуру пространства параметров однонаправленно связанной системы в сечении $\lambda_1, \Lambda_1 = \text{const}$ ($N = 4$) иллюстрируют рис. 1в, г, где приведено разбиение плоскостей $\lambda_2, k; \Lambda_2, K$ на области существования четырех видов колебаний $4 - 4T^n$. При $k = 0$ верхние границы областей существования для всех видов совпадают и соответствуют бифуркационным значениям λ_2 , при которых в изолированной подсистеме с ростом параметра теряют устойчивость колебания периода $4T$. Нижние границы для видов с $n = 1, 2$ при $k \rightarrow 0$ стремятся к точке потери устойчивости колебаний периода 2: для $n = 3$ – колебаний периода 1, а для $n = 0$ – к минимальным значениям параметра, при которых существуют колебания во второй подсистеме: $\lambda_2 = -0,25, \Lambda_2 = 0$. При введении связи границы областей существования "расходятся" (рис. 1в), причем для видов колебаний, для которых воздействие первой подсистемы на вторую приводит к увеличению бифуркационных значений параметра λ_2 , они "поднимаются", а в противном случае смещаются в сторону меньших λ_2 . Указанная закономерность в поведении границ областей существования при достаточно малых k выполняется для экспериментальной системы (рис. 1г) с точностью до изменения номера n . Увеличение связи существенно влияет

на условия возбуждения выделенных колебательных режимов, усложняя представленную картину.

5. Возбуждение того или иного вида колебаний определяется начальными условиями и траекторией движения на плоскости параметров. Так, например, в т. *А* рис. 1*а* возможны периодические режимы $2-2T^0$ и $2-2T^1$; в т. *Б* — периодический $2-2T^1$ — хаотический $2-X^0$. В то же время в т. *В* рис. 1*а* существует только один колебательный режим. Возможность реализации переходов от режима к режиму при изменении Λ_2 для нескольких значений N иллюстрирует схема, представленная на рис. 2. Для примера рассмотрим эволюцию колебательных режимов с $N = 4$. С ростом Λ_2 возникает последовательность удвоения периода колебаний, завершающаяся рождением хаотического движения. В закритической области развитие хаоса идет по классическому сценарию слияния лент аттрактора и с появлением окон устойчивости периодических режимов (на схеме не показаны). Четырехленточный аттрактор с $n = 0$ при некотором значении Λ_2 становится непритягивающим, и система жестко переходит на движение по аттрактору с $n = 2$. Дальнейшая эволюция хаотических движений характеризуется формированием двухленточного аттрактора, включающего в себя аттракторы с $n = 2$ и $n = 0$, чему предшествует режим перемежаемости хаос—хаос. Аналогичным образом формируется двухленточный аттрактор с $n = 1$ и 3 и одноленточный хаотический аттрактор, содержащий элементы всех четырех множеств на основе видов с $n = 0, 1, 2, 3$. Описанные переходы между видами колебаний имеют место и при других N .

Выражаем признательность С.П. Кузнецову и А.П. Кузнецову за полезное обсуждение работы.

Институт радиотехники и электроники
Академии наук СССР
Саратовский филиал

Поступило
14 XII 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгенбаум М. — УФН, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343–374.
2. Анищенко В.С., Арanson И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. — ДАН, 1986, т. 286, № 5, с. 1120.
3. Канеко К. Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative systems. Singapore: World Sci., 1986. 264 p.
4. Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. — ДАН, 1986, т. 287, с. 619–622.
5. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П. — Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 3, с. 60–65.