

с тем при  $\gamma=2$ ,  $\delta=7$  размерность квазипериодического движения была меньше размерности фазового пространства. Наличие аналогичной ситуации можно показать аналитически при  $\gamma \gg 1$ . В этом случае движения в первом элементе приближенно описываются уравнением  $\Phi_1=\gamma t$ , т. е.  $\Phi_1=\gamma t$ . Тогда уравнение для второго элемента имеет вид

$$\Phi_2=\gamma - \sin \Phi_2 - \delta \sin \gamma t.$$

Как известно [9], у этого уравнения существуют как рациональные, так и иррациональные числа вращения. В первом случае имеет место периодическое движение — аттрактор имеет размерность, меньшую, чем размерность фазового пространства.

В заключение заметим, что нетипичный для динамических систем аттрактор — многомерное (больше трех) квазипериодическое движение — существует в системе (2), по-видимому, в силу ее специфики — сильной диссипативности и периодичности по всем фазовым переменным.

Автор выражает благодарность М. И. Рабиновичу и В. Д. Шалфееву за постановку задачи и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.—Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, вып. 12, с. 561.
2. Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М.—ЖЭТФ, 1986, 90, вып. 5, с. 1707.
3. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.—ДАН СССР, 1986, 286, № 5, с. 1120.
4. Кузнецов С. П., Пиковский А. С.—Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 3, с. 308.
5. Афраймович В. С., Рабинович М. И., Сбитнев В. И.—Письма в ЖТФ, 1985, 11, вып. 6, с. 338.
6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
7. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1985. — 432 с.
8. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна и Л. Н. Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982. — 288 с.
9. Лихарев К. К., Ульрих Б. Г. Системы с джозефсоновскими контактами. — М.: Гос. ун-т, 1978. — 446 с.
10. Grassberger P., Procaccia I.—Physica D, 1983, 9, p. 189.
11. Bondeson A., Ott E., Antonsen T. M.—Phys. Rev. Lett., 1985, 55, № 20, p. 2103.

Научный совет АН СССР  
по комплексной проблеме  
«Кибернетика»

Поступила в редакцию  
4 января 1987 г.

УДК 530.1

## КВАЗИОДНОРОДНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РАЗРУШЕНИЕ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

B. B. Астахов, B. P. Безручко, V. I. Пономаренко, E. P. Селезнев

1. Диссипативно связанные нелинейные динамические системы со странным аттрактором (СА) могут демонстрировать в зависимости от степени их идентичности полностью или почти одинаковые (однородные или квазиоднородные) стохастические движения [1—3]. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования колебательных режимов системы двух связанных нелинейных осцилляторов. Показана возможность существования в ней стохастических колебаний различной степени однородности. Изучена структура разбиения плоскости управляемых параметров на области характерных движений и переходы между ними, рассмотрено влияние неидентичности подсистем.

2. Исследуемая система представляла собой два радиотехнических колебательных контура с нелинейной емкостью и проводимостью, характерными для  $p-n$ -перехода [4]. Подсистемы возбуждались синфазно через развязывающие усилители гармоническим сигналом от общего внешнего генератора. Взаимная диссипативная связь осуществлялась с помощью резистора с регулируемым сопротивлением  $R$ , включенным между идентичными точками контуров. Подробная информация о динамике одиночного контура, подобного контурам, исследуемым в экспериментальной системе, имеется

в [3], где проведен анализ его поведения в пространстве трех параметров: амплитуды  $U$ , частоты  $f_0$  внешнего гармонического воздействия и уровня диссипации. Динамика связанный системы исследовалась нами при фиксированном значении  $f_0$ , близком к частоте линейного резонанса, в зависимости от  $U$  и коэффициента связи  $K=1/R$ . Полная идентичность подсистем в эксперименте невозможна, поэтому, кроме подбора элементов контура с близкими параметрами, при необходимости производилась подстройка уровня диссипации в одном из контуров. Критерием идентичности служила близость временных реализаций в бифуркационных значениях  $U$  в первом и втором контурах ( $U_1$  и  $U_2$ ) в отсутствие связи. Например, после подстройки критических значений  $U_1^c = U_2^c = U^c$ , соответствующих переходу к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний, бифуркационные значения  $U$ , при которых появляются субгармоники  $f_0/8$ , отличались для подсистем не более чем на 2%. В эксперименте регистрировались временные реализации, спектры мощности, проекции фазовых портретов и стробоскопические сечения колебаний в подсистемах  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и на элементе связи ( $x_1 - x_2$ ). Режимы, для которых  $x_1 \approx x_2 \approx 0$ , а проекция фазового портрета на плоскость  $x_1, x_2$  близка к биссектрисе, классифицировались как квазиднородные, другие колебательные режимы — как неоднородные. Примеры квазиднородного и неоднородных режимов для случая колебаний с периодом  $8T_0$  ( $T_0 = 1/f_0$  — период внешнего воздействия) приведены на рис. 1а и рис. 1б—г.

3. На рис. 2 изображена структура разбиения плоскости параметров  $U - K$  на характерные колебательные режимы. Ее удобно представить состоящей из нескольких листов: А, Б, В, Г, ... (рис. 2). Лист А соответствует различным регулярным и стохастическим квазиднородным режимам. Здесь с ростом амплитуды внешнего воздействия наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся на линии  $I^c$  возникновением квазиднородного хаоса. Области периодических колебаний отмечены на рис. 2 цифрами, соответствующими их периоду в единицах  $T_0$ . В закритической области значений параметров ( $U > U^c$ ) на этом листе квазиднородный хаос эволюционирует в соответствии с закономерностями фейгенбаумовского СА. При удалении от линии  $I^c$  на листе А имеются «окна устойчивости» квазиднородных регулярных режимов\*. Области хаоса на рисунке заштрихованы. С уменьшением  $K$  при закритических  $U > U^c$  на линии  $I_b$  происходит разрушение квазиднородного хаоса. Степень неоднородности нарастает мягким образом: при неизменном спектре плавно расширяется линия «биссектрисы» проекции фазового портрета (рис. 1д), увеличивается размах выбросов в реализации  $x_1 - x_2$ . Дальнейший уход по параметрам от линии  $I_b$  приводит к перескоку с края листа А на один из листов Б, В или Г в зависимости от местонахождения исходной точки на листе А.

Листы Б, В и Г (рис. 2б—г) соответствуют неоднородным колебательным режимам. На них наблюдаются регулярные и стохастические движения. Переход от периодических колебаний к хаосу происходит через последовательность удвоений, однако наименьший из периодов циклов в этой последовательности на поверхности Б равен  $2T_0$ , на В —  $4T_0$ , на Г —  $8T_0$ , и сами циклы, на базе которых происходят удвоения и рождается СА, качественно отличаются по своему виду (см., соответственно, рис. 1б—г). С правого и нижнего края листов Б, В, Г, отмеченных на рис. 2а штриховыми линиями, система пересекает на лист А. При увеличении  $U$  происходит жесткий переход с Г на В и с В на Б. Кроме отмеченных режимов и переходов в узких интервалах параметров вблизи линии удвоения цикла периода 2 на листе Б, 4 — на В и 8 — на Г (области М на рис. 2б—г) имели место квазипериодические движения. На листах, соответствующих неоднородным колебаниям в закритической области, наблюдаются режимы, которые по фазовым портретам, реализациям и спектрам можно классифицировать как перемежаемость хаос — хаос (двойная штриховка).

Сравнение  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  показывает, что колебания в подсистемах сдвинуты друг относительно друга на листе Б на  $T_0$ , на В —  $2T_0$  и на Г —  $4T_0$ . С увеличением времени сдвига уменьшаются размеры области параметров существования колебаний данного вида. Однако можно предположить, что при совершенствовании эксперимента или использовании численного моделирования в структуре разбиения плоскости параметров исследуемой системы обнаружится еще множество листов, на которых временные сдвиги между колебаниями подсистем равны  $8T_0$ ,  $16T_0$  и т. д., а минимальный период цикла последовательности удвоений —  $16T_0$ ,  $32T_0$  и т. д.

4. Рассмотрим, как изменяется разбиение плоскости параметров, если проводить подстройку идентичности колебаний в контурах при  $K=0$  для каждого  $U$ . После такой процедуры система приближается к идеализированной ситуации идентичных подсистем. Дополнительная подстройка приводит к следующим изменениям картин на рис. 2, полученной для  $U_1^c = U_2^c = U^c$ : 1) исчезают зоны нарушения однородности периодических колебаний при  $U < U^c$  и малых  $K$ , выделенные на рис. 2а штриховкой; 2) «окна устойчивости» в закритической области квазиднородных колебаний продолжаются влево и простираются узкими полосами далеко за отмеченный на рис. 2а край на листе А, наблюдаемое их число увеличивается. В результате граница листа А и линия  $I_b$  становится сильно изрезанными, а структура листа А — качественно более схожей с полученной для связанных одномерных отображений в работе [3]; 3) зона М квазипериодических движений на листе Б (рис. 2б) расширяется и разделяет

\* Наблюданная картина в общих чертах аналогична описанной в теоретической работе [3].

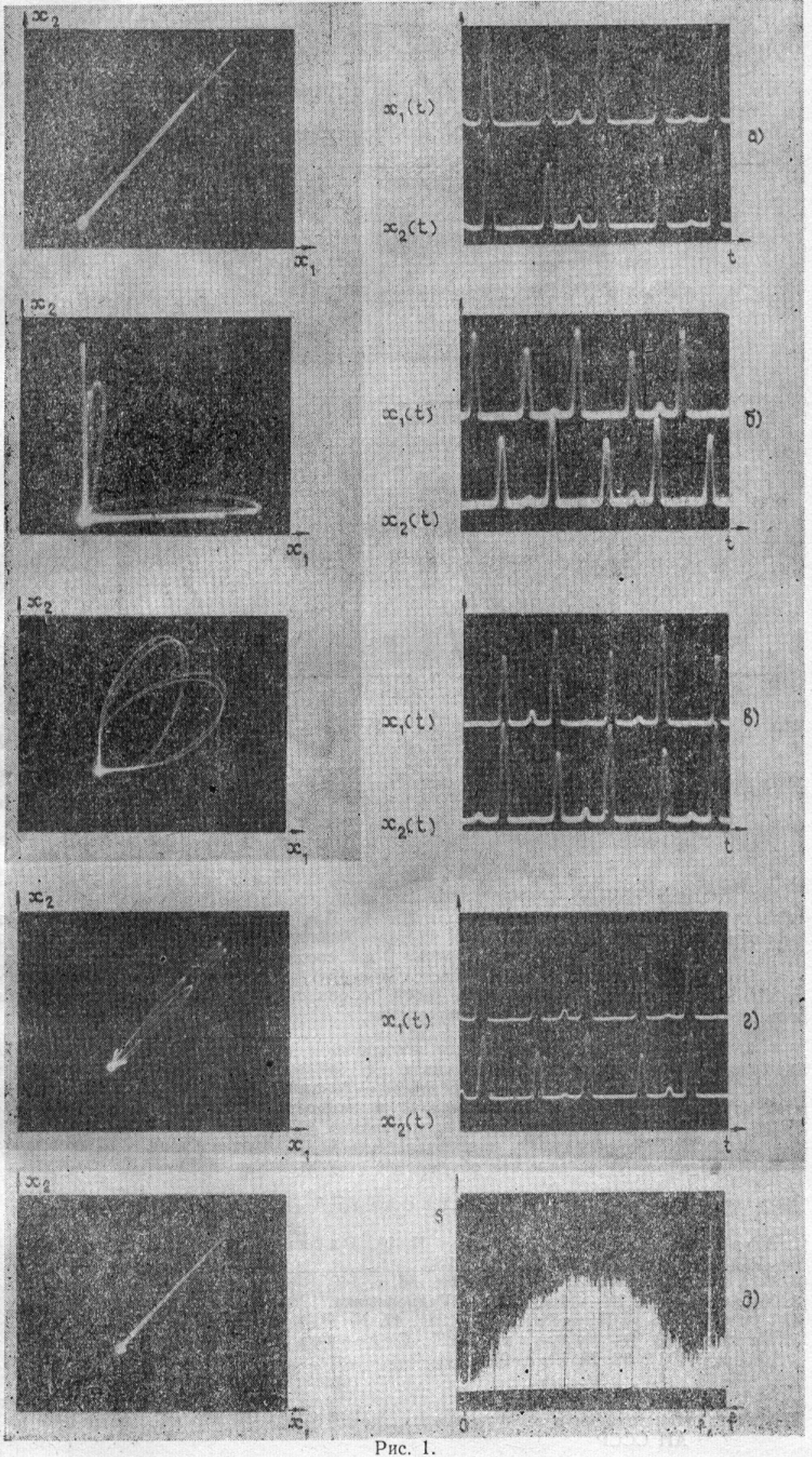


Рис. 1.

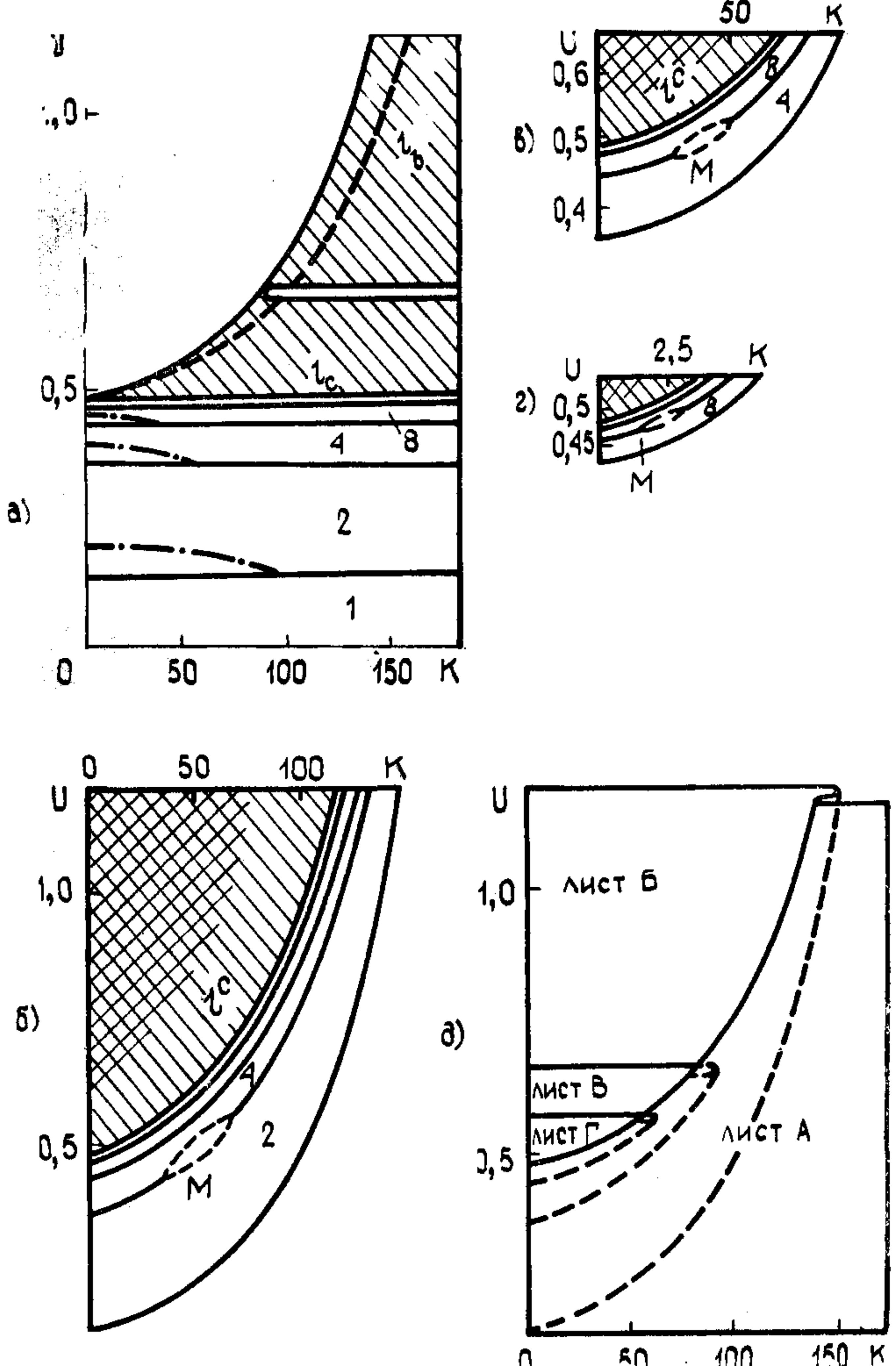


Рис. 2.

области существования циклов периода 2 и 4. При этом цикл периода 4 возникает в результате синхронизации движения на торе. Аналогичные области возникают при удвоении циклов периода 4 и 8 на листах В и Г соответственно.

Что касается общих закономерностей в структуре пространства параметров системы, а также сценариев перехода к хаосу, то они оказываются достаточно грубыми и не меняются при дополнительной подстройке.

5. Проведенное экспериментальное исследование расширяет существующие представления о поведении диссипативно связанных систем; это, в первую очередь, касается неоднородных колебательных режимов — динамики на листах Б, В, Г пространства параметров. Полученная информация, в частности, позволяет предположить наличие скейлинговых закономерностей неоднородных режимов.

В заключение выражаем признательность С. П. Кузнецovу, А. С. Пиковскому и В. С. Афраймовичу за полезное обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1986, 29, № 9, с. 1050.
2. Pikovsky A. S. — Z. Phys. B, 1984, 55, p. 149.
3. Кузнецов С. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1985, 28, № 8, с. 991.
4. Lindsay R. S. — Phys. Rev. Lett., 1981, 47, № 19, p. 1349.
5. Астахов В. В., Безручко Б. П., Селезнев Е. П. — Радиотехника и электроника, 1987, 32, № 12, с. 2558.