

**ДИАГНОСТИКА СВЯЗАННОСТИ ПО
ХАОТИЧЕСКИМ СИГНАЛАМ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ: РЕШЕНИЕ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ**

учебное пособие для студентов и аспирантов вузов

И. В. Сысоев

Саратов, 2019

УДК 621.396.1, 519.6
ББК 32.811, 22.19
С95

Рецензенты:

Безручко Б.П.,

д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н.Г. Чернышевского,

Пономаренко В.И.,

д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Сысоев И.В.

С95 Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач – Учебное пособие для студентов и аспирантов вузов. – ООО Издательство «КУБиК», 2019. – 46 с.

ISBN 978-5-91818-639-8

УДК 621.396.1, 519.6
ББК 32.811, 22.19

Учебное издание

Сысоев И.В.

**Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем:
решение обратных задач**

Подписано в печать 22.11.19 г. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Шрифт Times New Roman. Усл. печ. л. 2,67.

Тираж 100 экз. Заказ № 2323.

ООО Издательство «КУБиК»

410056, г. Саратов, ул. Чернышевского, 94 а

тел.: (8452) 60-33-20

ISBN 978-5-91818-638-1 © Сысоев И.В., 2019

Оглавление

Введение	4
1 Линейная причинность по Грейнджеру	7
1.1 Идея метода причинности	7
1.2 Оригинальный алгоритм Грейнджера	9
1.3 Вычисление коэффициентов линейных моделей	10
1.4 Вычисление остатков и улучшения прогноза	12
1.5 Тестирование алгоритма, задания	13
2 Нелинейная адаптивная причинность по Грейнджеру	16
2.1 Нелинейная причинность с полиномиальными функциями	17
2.2 Тестирование нелинейного метода	21
3 Условная причинность по Грейнджеру	23
3.1 Постановка задачи о выявлении опосредованных связей . .	24
3.2 Расчёт условной причинности	27
4 Частная направленная когерентность	30
4.1 Описание метода	30
4.2 Численная реализация метода частной направленной коге- рентности	32
4.3 Тестирование методики	34
Приложение А. Тестовые системы	37
Список литературы	43

Введение

В настоящее время задача диагностики связанности встаёт в приложении к объектам и данным самой различной природы. Развивается всё больше методов, а существующие всё чаще получают реализацию, встроенную в математические пакеты и библиотеки алгоритмов. Как правило, идея состоит в том, что изучаемая система представляется в виде совокупности взаимодействующих объектов, например, системы радиодатчиков, связанных структур мозга, взаимодействующих процессов в атмосфере. Важно, что от каждого или почти каждого из таких объектов можно получить измеренные значения, как правило, в виде временных рядов (последовательностей некоторой физической величины, измеренной в последовательные моменты времени), характеризующие её динамику. Тогда ставится задача по этим временным рядам диагностировать структуру связей между объектами и выявить степень влияния этих связей на динамику отдельных объектов.

Способов решения этой задачи существует множество, но следует понимать, что ни один из них не даёт гарантированных результатов даже в самых простых случаях. Фундаментальная причина заключается в том, что мы имеем дело с обратной задачей, решение которой в общем случае всегда некорректно и может быть получено на практике только если предусмотреть большое число дополнительных ограничений, принять во внимание априорную информацию и сделать ряд приближений. Тем не менее, во многих практически важных случаях получить полезные результаты с использованием современных подходов к диагностике связанности вполне реально.

Данное пособие, не претендуя на полноту и всеобъемлющий характер, имеет целью помочь студентам и аспирантам вузов, специализирующимся в области радиофизики вообще и обработки сигналов, в частности,

освоить ряд наиболее популярных и востребованных в современной науке подходов к детектированию связей на основе построения эмпирических прогностических моделей по экспериментальным временным рядам, в том числе в условиях наличия помех измерений и дефицита данных (короткие ряды, редкая выборка).

Пособие разделено на 4 части, причём они непосредственно связаны друг с другом. В части 1 излагается оригинальная методика причинности по Грейнджеру, предложенная в работе [1]. Эта методика в настоящее время непосредственно почти не используется, но её понимание и более того, освоение, необходимо для того, чтобы уметь пользоваться более продвинутыми подходами. В главе 2 даётся описание более современного метода, основанного на работах [2—4]. Этот нелинейный алгоритм позволяет при грамотном учёте всех параметров прогностических моделей добиться хороших результатов даже при применении к сложным зашумлённым хаотическим временным рядам сравнительно небольшой длины. Преимущества нелинейного подхода — более высокая *чувствительность* (способность определять реально существующие связи), в том числе к слабым и параметрическим воздействиям, вследствие использования сложных нелинейных функций, и более высокая *специфичность* (способность игнорировать отсутствующие связи) вследствие использования неравномерного вложения и учёта временных масштабов рассматриваемых сигналов. Такой метод называют *адаптивным*. Поскольку его реализация требует ряда дополнительных усилий, метод излагается с рядом упрощений. Обе главы 1 и 2 рассматривают только попарный анализ.

В главах 3 и 4 рассматривается более сложная задача детектирования связанности в системах из более чем двух объектов. В главе 3 метод, описанный в главе 2, обобщается на случай 3-х систем. Такой подход получил в литературе название *условной причинности по Грейнджеру*. В данном пособии мы ограничились только частным случаем однонаправленного распространения сигнала, как это было исследовано в [5]. Более общий случай требует существенно большей сложности моделей, что не только технически затруднительно, но и часто неприменимо на практике, поскольку для оценки всех коэффициентов эмпирических моделей не

достанет данных. К тому же, многие более сложные случаи можно свести к рассмотренному, если просто переставить объекты местами и провести несколько тестирований вместо одного, либо разделить все объекты на тройки и тестировать взаимодействия на опосредованность по одному, привлекая каждый раз только одну дополнительную систему.

В главе 4 рассматривается методика, получившая название *частной направленной когерентности*. Хотя изначально эта мера строилась как обобщение классической функции когерентности, она по сути является вариантом линейной условной причинности по Грейнджеру, обобщённой на случай сразу многих объектов. Дело в том, что частная направленная когерентность рассчитывается также путём решения обратной задачи — реконструкции по временным рядам авторегрессионных моделей для сигналов каждого из объектов, а затем преобразования коэффициентов этих моделей в частотную область с помощью Z -преобразования. Таким образом, хотя результаты методики интерпретируются в частотной области, сама она относится к методам решения обратных задач и эмпирического моделирования, а не к методам Фурье-анализа.

Глава 1

Линейная причинность по Грейнджеру

1.1 Идея метода причинности

Второй подход был впервые сформулирован Винером [6] и затем формализован Грейнджером [1]. Его идея состоит в том, что если прошлое ведущей системы влияет на динамику ведомой в настоящем, то учёт сигнала ведущей системы при прогнозе сигнала ведомой должен вести к уменьшению неопределённости. Если этот подход реализуется путём построения авторегрессионных моделей, он называется *методом причинности по Грейнджеру* [1]. Если речь идёт о статистических предсказательных моделях (уменьшении энтропии), этот подход называется *энтропия переноса* [7]. Ещё один известный метод также опирается на линейные авторегрессионные модели, коэффициенты которых интерпретируются в частотной области, он называется *частная направленная когерентность* [8]. Если рассматриваются фазовые системы (амплитуда колебаний не имеет значения), можно использовать специализированные индексы, полученные в [9] и улучшенные в [10] (этот метод получил название *моделирование фазовой динамики*). В ряде простейших случаев, например, для коррелированных нормальных шумов часть этих подходов полностью взаимозаменяемы [11], но в более общем случае связь между построенными этими методами мерами неочевидна.

Итак, идея метода причинности по Грейнджеру заключается в том,

что если система Y воздействует на систему X , то значения временного ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$ системы Y , являются причиной изменений временного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$ системы X . Следовательно, учёт данных от системы Y должен помочь в предсказании будущих значений временного ряда $\{x_n\}_{n=1}^N$. На первом этапе строится собственная модель (1.1), предсказывающая следующее значение во временном ряде $\{x_n\}_{n=1}^N$ по D_s предыдущим:

$$x_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, \mathbf{c}_s) + \xi_{n,s}, \quad (1.1)$$

где f — аппроксимирующая функция, τ — дальность прогноза, l — лаг модели, D_s — собственная размерность модели, \mathbf{c}_s — неизвестные коэффициенты, а $\xi_{n,s}$ — остатки. Коэффициенты \mathbf{c}^s оцениваются на основе одного из распространённых статистических критериев, чаще всего — методом наименьших квадратов, среднеквадратичная ошибка прогноза ε_s^2 равна дисперсии остатков $\{\xi_{n,s}\}_{n=1}^N$.

Следующим шагом строится совместная модель (1.2), использующая для предсказания $\{x_n\}_{n=1}^N$ также D_a значений из ряда $\{y_n\}_{n=1}^N$:

$$x_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, y_n, y_{n-l}, \dots, y_{n-(D_a-1)l}, \mathbf{c}_j) + \xi_{n,j}, \quad (1.2)$$

где D_a — размерность добавки, \mathbf{c}_j — коэффициенты совместной модели, f и g — полиномы общего вида степени P . Ошибка прогноза модели (1.2) ε_j^2 равна дисперсии остатков $\{\xi_{n,j}\}_{n=1}^N$.

Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы X . В таком случае говорят, что система Y действует на систему X по Грейнджеру. В качестве количественной меры воздействия используется величина PI — улучшение прогноза, определяемое по формуле (1.3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}. \quad (1.3)$$

Формулы (1.1, 1.2) хороши с теоретической точки зрения, но на практике гораздо удобнее оперировать прогностическими моделями, исключая остатки, поскольку на них никак невозможно влиять непосредственно. Поэтому формулы (1.1) и (1.2) переписывают следующим образом:

$$x'_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, \mathbf{c}_s), \quad (1.4)$$

$$x''_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, y_n, y_{n-l}, \dots, y_{n-(D_a-1)l}, \mathbf{c}_j), \quad (1.5)$$

где x'_n и x''_n суть предсказанные с помощью соответственно индивидуальной и совместной моделей значения, соответствующие истинному (измеренному) значению x_n . В таких обозначениях остатки можно выразить через измеренные и рассчитанные значения по формулам (1.6, 1.7).

$$\xi_{n,s} = x_n - x'_n, \quad (1.6)$$

$$\xi_{n,j} = x_n - x''_n. \quad (1.7)$$

1.2 Оригинальный алгоритм Грейнджера

Первоначально метод причинности по Грейнджеру был основан на построении по наблюдаемым временным рядам только линейных регрессионных эмпирических прогностических моделей с единичным лагом l и единичною же дальностью прогноза τ . Это естественное ограничение было вызвано следующими факторами:

1. для линейных моделей проще всего организовать вычисления, что было важно в эпоху, когда вычислительная техника была ещё весьма примитивна;
2. предполагалось, что при необходимости учесть значения, далеко отстоящие от прогнозируемого, всегда можно выбрать достаточно большую размерность D_s , причём рост числа коэффициентов с ростом D_s будет линейным, а это значит, что их количество не станет слишком велико, чтобы значимо испортить статистические свойства их оценки, поэтому значения l и τ , отличные от 1, не рассматривались;
3. отпадала необходимость выбирать функциональный базис для аппроксимации возможных нелинейных зависимостей, а таких базисов может быть сколько угодно, например, на основе полиномиальных [2; 12], радиальных [13] и ядерных [14] базисных функций.

Таким образом, в оригинальном варианте модели (1.4) и (1.5) выглядели следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= c_0^s + \sum_{i=1}^{D_s} c_i^s x_{n-(i-1)}, \\ x''_{n+1} &= c_0^j + \sum_{i=1}^{D_s} c_i^j x_{n-(i-1)} + \sum_{i=D_s+1}^{D_s+D_a} c_i^j y_{n-(i-D_s-1)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

В такой записи число коэффициентов моделей (1.8) составляет $Z_s = D_s + 1$ для индивидуальной модели и $Z_j = D_s + D_a + 1$ для совместной, то есть просто пропорционально их размерности.

1.3 Вычисление коэффициентов линейных моделей

Построить модели (1.6, 1.7) — значит вычислить значения функций f и g для всех предсказываемых значений $x_{n+\tau}$. В случае использования формы (1.8) задача переформулируется и существенно упрощается: достаточно вычислить все c_i^s и c_i^j . Для этого как правило используют метод наименьших квадратов. Проще всего переформулировать задачу в матричной форме:

$$\hat{\Phi} \mathbf{c} = \mathbf{x}, \quad (1.9)$$

где $\hat{\Phi}$ — матрица значений базисных функций (для совместной и индивидуальной моделей матрицы будут, конечно, разные), \mathbf{c} — вектор значений искомых коэффициентов (в нашем случае он состоит из значений либо c_i^s , либо c_i^j), а \mathbf{x} — вектор аппроксимируемых (предсказываемых) значений, представляющий собою по сути немного обрезанный наблюдаемый ряд $\{x_n\}$. Далее разберём подробнее, какие размеры имеют \mathbf{x} и $\hat{\Phi}$ и как их составить для индивидуальной и совместной моделей.

Сначала создадим вектор \mathbf{x} . По смыслу это наблюдаемый и аппроксимируемый ряд $\{x_n\}$, но так как для нескольких начальных значений предсказание построить невозможно в силу отсутствия в исходном ряде соответствующих значений, по которым строить прогноз, этот ряд обрезан: вектор \mathbf{x} начинается со значения x_{D_s} (при нумерации с нуля),

если считать, что $D_s \geq D_a$, что является естественным предположением почти во всех случаях. Таким образом, для обеих индивидуальной и совместной моделей получаем уравнение (1.10).

$$\mathbf{x} = (x_{D_s}, x_{D_s+1}, \dots, x_{N-2}, x_{N-1}) \quad (1.10)$$

Матрица $\hat{\Phi}$ создаётся по столбцам, каждый столбец соответствует своему коэффициенту c_s или c_j , причём фактически в столбцах содержатся одни и те же данные — исходный ряд $\{x_n\}$, сдвинутый во времени на различное число значений, а для совместной модели — также $\{y_n\}$. Сдвиг соответствует номеру i в формуле (1.8). Дополнительно нулевой столбец матрицы $\hat{\Phi}$ задаётся состоящим из единиц, так как этот столбец соответствует коэффициенту c_0 . Матрицу можно заполнять от последнего, ближнего к предсказываемому, или от нулевого значения, в общем случае это не важно, нужно только помнить, как способ использован.

Для индивидуальной модели матрица $\hat{\Phi}$ может выглядеть следующим образом, если считать, что элементы в ряде $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ нумеруются от нуля:

$$\hat{\Phi}_s = \begin{bmatrix} 1 & x_{D_s-1} & x_{D_s-2} & \cdots & x_0 \\ 1 & x_{D_s} & x_{D_s-1} & \cdots & x_1 \\ 1 & x_{D_s+1} & x_{D_s} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{D_N-2} & x_{D_N-3} & \cdots & x_{D_N-D_s} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Для совместной модели добавляются дополнительные D_a столбцов с зависимостью от y_n :

$$\hat{\Phi}_a = \begin{bmatrix} 1 & x_{D_s-1} & x_{D_s-2} & \cdots & x_0 & y_{D_s-1} & \cdots & y_{D_s-D_a} \\ 1 & x_{D_s} & x_{D_s-1} & \cdots & x_1 & y_{D_s} & \cdots & y_{D_s-D_a+1} \\ 1 & x_{D_s+1} & x_{D_s} & \cdots & x_2 & y_{D_s+1} & \cdots & y_{D_s-D_a+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N-2} & x_{N-3} & \cdots & x_{N-D_s} & y_{D_N-3} & \cdots & y_{D_N-2} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Очевидно, что матрица $\hat{\Phi}_s$ представляет собою часть матрицы $\hat{\Phi}_a$. Это можно и нужно использовать при их составлении. Более того, поскольку матрицы представляют собою фактически комбинации смещённых различным образом векторов, построенных из исходных временных

рядов $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$, следует использовать для их построения в программе срезы, сечения, методы копирования и иные встроенные средства работы с массивами целиком, если их предоставляет язык программирования. Например, в Питоне это могут быть срезы для списков и массивов `numpy`, аналогично можно поступить на Фортране. Также срезы доступны в Go и D, но там они могут быть сделаны только по строке, поэтому иногда может иметь смысл строить не матрицы $\hat{\Phi}_s$ и $\hat{\Phi}_a$, а их транспонированные версии, тем более, что многие алгоритмы вроде QR -разложения работают лучше именно с транспонированными матрицами. В Паскале есть функция `copy`, которую тоже можно использовать для цели заполнения массивов в транспонированной матрице.

После того, как матрицы (1.11) и (1.12) и вектор (1.10) сформированы, необходимо дважды (для индивидуальной и совместной моделей) использовать метод наименьших квадратов для получения массивов коэффициентов \mathbf{c}_s и \mathbf{c}_j соответственно.

1.4 Вычисление остатков и улучшения прогноза

Для задачи оценки связанности само по себе построение моделей — промежуточный, служебный этап. В реальности ничего прогнозировать мы не собираемся и коэффициенты сами по себе не нужны. А нужны нам среднеквадратичные ошибки аппроксимации, чтобы подставить их в формулу (1.3) для вычисления улучшения прогноза.

Чтобы получить невязки значения прогноза, следует использовать формулы (1.6) и (1.7). Если язык поддерживает операцию скалярного умножения (например, как язык D) и, ещё лучше, операцию матричного умножения (как Питон с использованием `numpy` и Фортран), их следует обязательно использовать: это сократит код и сделает его существенно лаконичнее и, возможно, даже немного быстрее. К тому же такие методы, как правило, используют способы суммирования действительных чисел, приводящие к меньшим ошибкам, чем суммирование с накоплением. В матричной форме формулы (1.6) и (1.7) переписываются следующим

образом:

$$\xi_s = \mathbf{x} - \hat{\Phi}_s \mathbf{c}_s, \quad (1.13)$$

$$\xi_j = \mathbf{x} - \hat{\Phi}_j \mathbf{c}_j. \quad (1.14)$$

Тогда ошибки прогноза ε_s и ε_j можно получить по формулам:

$$\varepsilon_s^2 = \frac{1}{N - D_s} \sum_{n=0}^{N-D_s-1} \xi_{n,s}^2, \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_j^2 = \frac{1}{N - D_s} \sum_{n=0}^{N-D_s-1} \xi_{n,j}^2, \quad (1.16)$$

В принципе, деление на $(N - D_s)$ в формулах (1.15) и (1.16) можно не производить, потому сами ошибки нам не нужны, а нормировка всё равно сократится в итоговой формуле (1.3).

1.5 Тестирование алгоритма, задания

Для тестирования построенного алгоритма нам необходимо сгенерировать такие временные ряды от систем X и Y , которые вписывались бы в формулу (1.8). При этом нужно понимать, что формула (1.8) не описывает динамику y и потому система Y может быть какою угодно.

На практике при первом тестировании алгоритма лучше всё же использовать в качестве систем X и Y одинаковые по сути линейные авторегрессионные процессы, например, 2-го порядка. Использование процессов 1-го порядка не даст выявить некоторые возможные ошибки алгоритма, поскольку для прогноза будет использовано только одно предыдущее значение. Использовать в качестве Y нелинейную систему не рекомендуется, поскольку тогда затруднительно будет проверить связанность в обратную сторону, переставив X и Y местами. Плюс использования линейных процессов 2-го порядка ещё и в том, что они соответствуют решению методом Эйлера уравнения линейного осциллятора с затуханием (1.17) с достаточно малым шагом выборки, например, $\Delta t = 0.002$, из которого можно получить коэффициенты c_i для обеих систем X и Y , в том числе коэффициентов связи. Коэффициенты диссипации γ_x и γ_y следует при этом выбирать положительными, но небольшим (подойдут значения

в диапазоне $[0.05; 0.2]$), чтобы несвязанные осцилляторы демонстрировали медленно затухающие колебания. Временной ряд нужно брать такой длины, чтобы на нём было несколько колебаний 3–20 штук.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma_x \frac{dx}{dt} + \omega_x^2 x = k_{yx}y \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma_y \frac{dy}{dt} + \omega_y^2 y = k_{xy}x \quad (1.18)$$

$$(1.19)$$

Как правило, первое тестирование проводят на однонаправленно связанных системах: $Y \rightarrow X$. Для этого при генерации данных в уравнении (1.17) нужно занулить k_{xy} . Причём обязательно следует сделать два теста: сначала в правильном порядке, затем, поменяв X и Y местами. В первом случае должно получиться значение PI очень близкое к 1, во втором случае — к нулю. Если использовались для генерации данных связанные линейные осцилляторы, размерности нужно выбрать $D_s = 2$, $D_a = 2$. Затем можно увеличить размерности, в том числе выбрав неравные значения D_s и D_a , чтобы получить дополнительные нулевые значения коэффициентов.

Задания

Реализуйте метод линейной причинности по Грейнджеру в виде модуля. Модуль должен содержать процедуры и функции для составления матриц базисных функций $\hat{\Phi}_s$ и $\hat{\Phi}_j$, для расчёта ошибок прогноза ε_s^2 и ε_j^2 и для вычисления улучшения прогноза PI .

Протестируйте полученный модуль, для чего напишите программу для генерации тестовых данных от следующих систем:

1. двух связанных линейных осцилляторов (1.17) — однонаправленно, двунаправленно, а также несвязанных;
2. двух связанных систем авторегрессии третьего порядка — однонаправленно, двунаправленно, а также несвязанных;

3. связанных однонаправленно нелинейного осциллятора ван дер Поля (система Y , (1.20)), используйте положительные значения параметра r) и линейного осциллятора (система X).

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (r - y^2)\frac{dy}{dt} + \omega_y^2 y \quad (1.20)$$

Глава 2

Нелинейная адаптивная причинность по Грейнджеру

Как вы поняли при рассмотрении линейного метода причинности по Грейнджеру, его возможности весьма ограничены. Как только встречается существенное несоответствие между оператором эволюции исходных объектов X и Y и моделью (1.8), метод начинает давать довольно малые значения улучшения прогноза PI , хотя в действительности связанность может вносить огромный вклад в динамику ведомой системы. К сожалению, когда реально присутствующие связи не находятся — это только одна причина, которая в литературе получила название ошибок второго рода или недостаточной чувствительности. Ещё более существенна другая проблема — недостаточная специфичность, когда в реальности отсутствующие связи обнаруживаются методом. Изучению этого явления на конкретных примерах и классах систем посвящено множество работ, например, [3; 4; 12; 15–19], и этот список далеко не исчерпывающий. Как правило, основные проблемы с линейными моделями с параметрами $l = 1$ и $\tau = 1$ заключаются в следующем:

- при однонаправленных в реальности связях обнаруживаются обратные;
- при общей частоте основных колебаний вообще несвязанные систе-

мы детектируются как связанные;

- при малой (менее 10 значений на характерный период колебаний) частоте выборки метод начинает путать направление взаимодействия;
- при слишком большой частоте выборки, когда на каждое колебаний приходится тысячи отсчётов, используемая в моделях размерность D_s не может покрыть ни одного периода колебаний, что ведёт к недоучёту реальных временных масштабов и, как следствие, случайным и заниженным выводам о связях.

Поэтому настройка моделей, выбор адекватного временного лага и дальности прогноза, а также выбор типа и числа нелинейных функций — ключевой компонент успеха при использовании подхода в реальной практике. К сожалению, универсального решения в данном вопросе не предвидится, поэтому следует рассчитывать на собственные силы и разум, поэтому задача детектирования связанности всё ещё рассматривается как более исследовательская, нежели прикладная [20]. Для некоторых классов систем, тем не менее, определённые рекомендации существуют [4; 16].

2.1 Нелинейная причинность с полиномиальными функциями

Далее мы будем производить изложение для специализированной адаптивной модели, предложенной в работах [3; 18], которая записывается

уравнениями (2.1).

$$x'_{n+\tau} = \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+k}^k} c_i^s \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^s} + c_{Z_s+1} x_{n-l_T}, \quad (2.1a)$$

$$\forall k = 0, \dots, P \sum_{m=1}^{D_s} w_{k,m}^s = k$$

$$x''_{n+\tau} = \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+D_a+k}^k} c_i^j \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^j} \prod_{m=1}^{D_a} y_{n-(m-1)l}^{w_{k,(m+D_s)}^j} + \quad (2.1b)$$

$$+ c_{Z_j+1} x_{n-l_T} + c_{Z_j+2} y_{n-l_T}$$

$$\forall k = 0, \dots, P \sum_{m=1}^{D_s+D_a} w_{k,m}^j = k,$$

где $Z_s = (P + D_s)! / (P! D_s!)$ есть число коэффициентов в собственной модели (2.1a), $Z_j = (P + D_s + D_a)! / (P! (D_s + D_a)!)$ — число коэффициентов в совместной модели (2.1b), $C_{D_s+k}^k$ есть число сочетаний из $D_s + k$ по k , P — порядок полинома, а l_T — дополнительный лаг, обеспечивающий при прогнозировании учёт значения, отстоящего от прогнозируемого значения на характерный временной масштаб T . Такой подход известен как неравномерное вложение (см. [21]) и был реализован в [22]. Вместе с определением размерности собственной модели D_s и степени полинома P , основываясь на критерии Шварца [23], введение неравномерного вложения призвано уменьшить число коэффициентов моделей Z_s и Z_j , чтобы улучшить статистические характеристики их оценок в сравнительно коротком временном окне.

Модель включает в себя полиномы общего вида от D_s и $D_s + D_a$ переменных, построенные координатам, полученным методом эквидистантных задержек с лагом l , а также отдельные линейные слагаемые с лагом l_T для учёта динамики на основном временном масштабе колебаний (этот метод называется «неравномерным вложением» и был впервые предложен в [24]). Схема, иллюстрирующая выбор l , l_T и τ в типичном случае, приведена на рис. 2.1 Использование отличного от l параметра дальности прогноза τ также является элементом дополнительной адаптации модели с целью учесть больше временных масштабов наблюдаемых сигналов $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$.

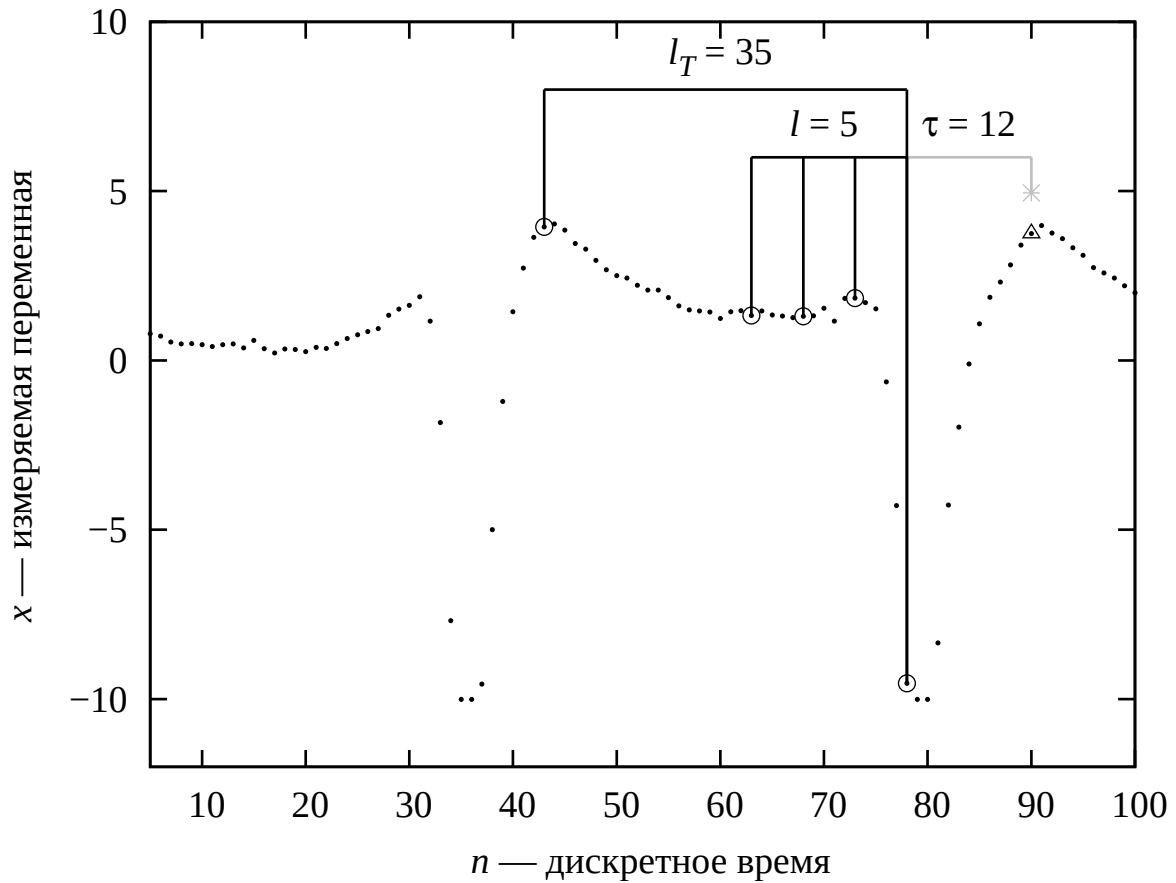


Рис. 2.1: Учёт временных масштабов при построении индивидуальной адаптированной нелинейной предсказательной модели. Треугольником показано предсказываемое значение, серую звездой — предсказанное, чёрными кругами — значения, использованные для прогноза, всего их на рисунке $D_s = 4$ и ещё одно дополнительное значение на расстоянии 1 характерного периода колебаний от предсказанного. Серый отрезок показывает дальность прогноза τ , чёрные отрезки показывают стандартный лаг l и дополнительный лаг l_T .

Пренебрежём пока членами с лагом l_T , как это сделано в [4]. Вектор \mathbf{x} теперь переписется в виде:

$$\mathbf{x} = (x_{(D_s-1)l+\tau}, x_{(D_s-1)l+\tau+1}, \dots, x_{N-1}). \quad (2.2)$$

Для примера запишем матрицы $\hat{\Phi}_s$ и $\hat{\Phi}_j$ для почти самого простого случая, когда $D_s = 2$, $D_a = 1$ и порядок полинома $P = 2$:

$$\hat{\Phi}_s = \begin{bmatrix} 1 & x_l & x_l^2 & x_l x_0 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_{l+1} & x_{l+1}^2 & x_{l+1} x_1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N_1} & x_{N_1}^2 & x_{N_1} x_{N_1-l} & x_{N_1-l} & x_{N_1-l}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где для краткости введено обозначение $N_1 = N - \tau - 1$.

Отметим, что при использовании генерации полиномов обходом дерева рекурсивно, в совместной матрице столбцы теперь расположены таким образом, что в отличие от линейного случая их уже нельзя разделить чётко на две половины: столбцы, содержащие компоненты с y перемешаны со столбцами, происходящими непосредственно из матрицы $\hat{\Phi}_s$.

$$\hat{\Phi}_j = \begin{bmatrix} 1 & x_l & x_l^2 & x_l x_0 & x_l y_l & x_0 & x_0^2 & x_0 y_l & y_l & y_l^2 \\ 1 & x_{l+1} & x_{l+1}^2 & x_{l+1} x_1 & x_{l+1} y_{l+1} & x_1 & x_1^2 & x_1 y_{l+1} & y_{l+1} & y_{l+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N_1} & x_{N_1}^2 & x_{N_1} x_{N_1-l} & x_{N_1} y_{N_1} & x_{N_1-l} & x_{N_1-l}^2 & x_{N_1-l} y_{N_1} & y_{N_1} & y_{N_1}^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Использование обобщённых полиномов позволяет учесть как силовое, так и параметрическое воздействие, каково бы оно ни было в исходной системе. Построение такой модели достаточно технически сложно, поскольку расчёт полинома от произвольного числа переменных в общем случае — нетривиальная операция, решаемая только с привлечением рекурсивных функций. Далее будем считать, что с решением этой задачи вы справитесь, используя методику построения дерева, либо выпишите решение напрямую для случая некоторых конечных D_s , D_a и P , как это сделано выше в формулах (2.3, 2.4).

2.2 Тестирование нелинейного метода

Для тестирования нелинейного метода необходимо использовать нелинейные модели. Самый простой и удобный инструмент для тестирования — связанные отображения Эно:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda_x x_n^2 - b_x x_{n-1} + k_{yx} y_n \\y_{n+1} &= 1 - \lambda_y y_n^2 - b_y y_{n-1} + k_{xy} x_n\end{aligned}\quad (2.5)$$

Для тестирования этого примера можно воспользоваться матрицами (2.3, 2.4), но в такой ситуации удастся протестировать только случай $l = \tau = 1$. Если вы освоили более общую форму, можно переписать уравнения (2.5) так, чтобы в них входила зависимость от давно прошедших значений, например, выразив x_n и y_n через x_{n-1} и x_{n-2} (y_{n-1} и y_{n-2} соответственно) из самих уравнений (2.5), для чего заменив в них n на $n-1$ и подставив результат обратно в (2.5). Для простоты сделаем это далее для случая однонаправленной связи, когда $k_{xy} = 0$:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda_x(1 - \lambda_x x_{n-1}^2 - b_x x_{n-2} \\&\quad + k_{yx} y_{n-1})^2 - b_x x_{n-1} + k_{yx}(1 - \lambda_y y_{n-1}^2 - b_y y_{n-2}) \\y_{n+1} &= 1 - \lambda_y(1 - \lambda_y y_{n-1}^2 - b_y y_{n-2})^2 - b_y y_{n-1}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные в (2.6), можно получить модель, которая сводится к виду (2.1) с использованием параметров $\tau = 2$ и $P = 4$.

Модель Эно при реконструкции в виде (2.1) может приводить к ошибкам из-за линейной взаимозависимости ряда столбцов матриц $\hat{\Phi}_s$ и $\hat{\Phi}_j$, особенно при большом порядке полинома, $\tau > 1$ или использовании размерности $D_s > 2$. Это связано с неоднозначностью описания, так как в формулах (2.6) одни и те же члены могут быть записаны как через два предыдущих значения, так и через предпредыдущие. Чтобы решить эту проблему, в динамику отображений добавляют очень маленький, например, с дисперсией $\sigma^2 \sim 10^{-6}$, шум с нулевым средним. Можно использовать как нормальный, так и равномерный шум — при таких амплитудах это практически безразлично.

Задания

Реализуйте нелинейный метод причинности по Грейнджеру с полиномиальными функциями одним из следующих способов (расположены в порядке возрастания сложности):

1. явным образом выписав формулы для матриц базисных функций при $D_s = 2$, $D_a = 1$ и $P = 2$, т. е. используя матрицы (2.3,2.4);
2. явным образом выписав формулы для матриц базисных функций при $D_s = 3$, $D_a = 1$ и $P = 3$ — этот случай сложнее предыдущего и содержит его в себе, матрица $\hat{\Phi}_s$ будет содержать 20 строк, а матрица $\hat{\Phi}_j$ — 35 строк;
3. написав общий для произвольных D_s , D_a и P алгоритм с обходом дерева рекурсивно;
4. написав общий для произвольных D_s , D_a и P алгоритм с обходом дерева рекурсивно с добавлением дополнительных линейных слагаемых, как это показано в формуле (2.1).

Протестируйте написанный алгоритм на отображении Эно с шумом и без, в том числе переписав отображение, как это показано в формуле (2.6). Протестируйте этот же алгоритм на двух однонаправленно и двунаправленно связанных осцилляторах ван дер Поля (1.20).

Глава 3

Условная причинность по Грейнджеру

В предыдущих двух главах рассматривались только попарно связанные объекты X и Y . На практике часто нужно оценить взаимодействия между более чем двумя объектами. Если это можно сделать на основе попарного анализа, то совершенно нельзя гарантировать, что связи, являющиеся в действительности опосредованными, не будут учтены как прямые. В результате полученная архитектура связей будет чрезвычайно избыточна. Для того, чтобы решить эту проблему, неоднократно предлагались различные подходы, общим свойством которых является включение в модель информации не только о двух системах, связь между которыми исследуется, но и о возможных промежуточных системах, через которые может передаваться взаимодействие.

В данном пособии мы рассмотрим два из предложенных алгоритмов: условную нелинейную причинность по Грейнджеру [2] в простейшей постановке, когда связь исследуется между только двумя системами и в заданном направлении, как это описано в работе [5], и частную направленную когерентность [8] — линейный метод, который, однако, позволяет в идеале восстановить архитектуру всех связей в ансамбле. Хотя эти подходы ограничены, даже их непосредственное применение может быть весьма эффективно на практике. Построение более сложных методов для оценки нелинейных опосредованных связей в больших по размеру, чем три системы, ансамблей также возможно, но встречает значимые пре-

пятствия, основным из которых является быстрый рост числа коэффициентов нелинейных моделей с увеличением количества вовлечённых в анализ систем, что ведёт к необходимости использовать очень длинные стационарные ряды, которых во многих практических задачах может не быть.

Дополнительно всегда следует иметь в виду, что методы вроде частной направленной когерентности или условной причинности существенно превосходят попарный анализ только в том случае, когда измерению доступны сигналы всех подсистем, значимо участвующих во взаимодействии. Если часть таких переменных не измеряется, они могут исказить результаты и полученное деление связей на прямые и опосредованные окажется недостоверным.

3.1 Постановка задачи о выявлении опосредованных связей

Пусть в нашем распоряжении имеются скалярные временные ряды $\{x_n\}_{n=1}^N$, $\{y_n\}_{n=1}^N$ и $\{z_n\}_{n=1}^N$ от трёх систем X , Y , Z все одинаковой длины по N отсчётов каждый. При этом система X считается ведомою и предполагается, что она не может воздействовать ни на Y , ни на Z . Система Y (промежуточная система) может воздействовать только на X , а система Z — на X как непосредственно, так и опосредованно через Y или даже не воздействовать вообще. Далее используя термин «цепочка», мы в первую очередь подразумеваем, что не может быть обратных связей вида $X \rightarrow Y$ или $Y \rightarrow Z$ или $X \rightarrow Z$, то есть воздействие если и распространяется, то в одну сторону. Если анализ обратных связей необходим, нужно просто поменять системы X и Z местами и повторить описанную далее процедуру. Всего, таким образом, возможны восемь случаев взаимодействия:

1. $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ без непосредственного воздействия Z на X (опосредованная связь);
2. $Z \rightarrow X$ и $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ — случай прямой и опосредованной связей одновременно;

3. $Z \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow X$, но без воздействия Y на X , то есть только прямая связь;
4. $Z \rightarrow X$ и $Y \rightarrow X$ – при отсутствии опосредованного взаимодействия;
5. отсутствие связи между Z и X , но наличие связи $Y \rightarrow X$;
6. $Z \rightarrow X$ – прямая связь, без искажения сигнала системы Y сигналом системы Z ;
7. отсутствие связи между Z и X , но наличие связи $Z \rightarrow Y$ (система X изолирована);
8. отсутствие каких-либо связей — все системы изолированы.

Такая постановка задачи может соответствовать системе беспроводных сенсоров, передающих информацию о напряжении свода здания или уровне задымления по цепочке [25], или соображениями анатомии, когда существуют восходящие связи от органов чувств к глубоким структурам мозга и далее в кору.

Поскольку тест на причинность по Грейнджеру может ответить только на вопрос, есть ли значимая связь между системами в заранее заданном направлении или нет, чтобы определить, какой из восьми рассмотренных случаев имеет место, нужно провести как минимум $\log_2(8) = 3$ тестирования на связанность. Для исследования связи $Z \rightarrow Y$, $Z \rightarrow X$ и $Y \rightarrow X$, наиболее очевидный подход — построить прогностические модели вида (3.1) и затем рассчитать улучшение прогноза по формулам (3.2):

$$\begin{aligned}
 x'_{n+\tau} &= f_x(\vec{x}_n), \\
 x'_{n+\tau|Y} &= f_{xy}(\vec{x}_n, \vec{y}_n), \\
 x'_{n+\tau|Z} &= f_{xz}(\vec{x}_n, \vec{z}_n), \\
 y'_{n+\tau} &= f_y(\vec{y}_n), \\
 y'_{n+\tau|Z} &= f_{yz}(\vec{y}_n, \vec{z}_n),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
PI_{y \rightarrow x} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_x^2}, \\
PI_{z \rightarrow x} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_x^2}, \\
PI_{z \rightarrow y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y^2},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где \vec{x}_n , \vec{y}_n и \vec{z}_n суть реконструированные методом временных задержек [26] по скалярным временным рядам векторы состояния, функции f_x , f_{xy} , f_{xz} , f_y и f_{yz} — полиномы общего вида, как предложено в [2], τ — дальность прогноза, x'_n и др. — предсказанные значения, соответствующие измеренным значениям x_n , PI — показатели улучшения прогноза, ε^2 — среднеквадратичные ошибки аппроксимации.

Однако, такой подход не может в действительности решить поставленную задачу, потому что при наличии опосредованного воздействия $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ с его помощью будет обнаружена также связь $Z \rightarrow X$, так как X содержит информацию о динамике Z . А при воздействии $Z \rightarrow Y$ и $Z \rightarrow X$ может быть обнаружено воздействие $Y \rightarrow X$, поскольку Y может содержать часть информации от Z , что поможет предсказать X . Чтобы решить проблему, нужно вместо простой причинности по Грейнджеру, когда системы рассматриваются попарно, перейти к условной [2], построив модели вида (3.3) и рассчитав улучшение прогноза по формулам (3.4):

$$\begin{aligned}
x'_{n+\tau|Y} &= f_{xy}(\vec{x}_n, \vec{y}_n), \\
x'_{n+\tau|Z} &= f_{xz}(\vec{x}_n, \vec{z}_n), \\
x'_{n+\tau|Y,Z} &= f_{xyz}(\vec{x}_n, \vec{y}_n, \vec{z}_n), \\
y'_{n+\tau} &= f_y(\vec{y}_n), \\
y'_{n+\tau|Z} &= f_{yz}(\vec{y}_n, \vec{z}_n),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
PI_{y \rightarrow x|z} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xyz}^2}{\varepsilon_{xz}^2}, \\
PI_{z \rightarrow x|y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{xyz}^2}{\varepsilon_{xy}^2}, \\
PI_{z \rightarrow y} &= 1 - \frac{\varepsilon_{yz}^2}{\varepsilon_y^2}.
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Результаты, которые должны получиться с использованием такой методики в «идеальной» ситуации, показаны в таблице 3.1. Видно, что для каждого из восьми выбранных случаев возможного взаимодействия, существует только одна комбинация результатов методики, то есть достигается взаимно однозначное соответствие.

Таблица 3.1: Соответствие искомой архитектуры связей и выводов о наличии связи при идеальной чувствительности и специфичности предложенной методики. Белый фон ($PI = 1$) соответствует значимым выводам о наличии связи, серый ($PI = 0$) — об её отсутствии.

№ п/п	направление взаимодействия	$PI_{z \rightarrow y}$	$PI_{y \rightarrow x z}$	$PI_{z \rightarrow x y}$
1	$Z \rightarrow Y \rightarrow X$	1	1	0
2	$Z \rightarrow X \wedge Z \rightarrow Y \rightarrow X$	1	1	1
3	$Z \rightarrow Y \wedge Z \rightarrow X$	1	0	1
4	$Z \rightarrow Y \wedge Y \rightarrow X$	0	1	1
5	$Y \rightarrow X$	0	1	0
6	$Z \rightarrow X$	0	0	1
7	$Z \rightarrow Y$	1	0	0
8	нет связей	0	0	0

3.2 Расчёт условной причинности

Для расчёта условной причинности воспользуемся моделями в виде (2.1) с полиномиальными функциями: их можно использовать в 4-х из 5-и уравнений системы (3.3), для уравнений с f_{xy} и f_x непосредственно

в виде (2.1b) и (2.1a) соответственно, для f_{xz} заменив в (2.1b) y на z , и для f_{yz} , заменив x на y и y на z . Для уравнения, содержащего функцию f_{xyz} модель следует дополнить функциями от z , как это показано в (3.5). Для простоты мы использовали одинаковые значения D_a для компонент, зависящих от Y и Z , что в общем случае оправдано.

$$\begin{aligned}
x'_{n+\tau|Y,Z} &= \sum_{k=0}^P \sum_{q=1}^{C_{D_s+2D_a+k}^k} c_i^j \prod_{m=1}^{D_s} x_{n-(m-1)l}^{w_{k,m}^{xyz}} \prod_{m=1}^{D_a} y_{n-(m-1)l}^{w_{k,(m+D_s)}^{xyz}} \prod_{m=1}^{D_a} z_{n-(m-1)l}^{w_{k,(m+D_s+D_a)}^{xyz}} \\
&\quad + c_{Z_{xyz}+1} x_{n-l_T} + c_{Z_{xyz}+2} y_{n-l_T} + c_{Z_{xyz}+3} z_{n-l_T} \\
&\quad \forall k = 0, \dots, P \sum_{m=1}^{D_s+2D_a} w_{k,m}^{xyz} = k,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

где Z_{xyz} — общее число коэффициентов в полиномиальной части модели.

Записать матрицу $\hat{\Phi}_{xyz}$ в явном виде, как в формуле (2.4) для совместной модели, для метода условной причинности довольно затруднительно, так как она будет слишком велика за счёт большого числа перекрёстных членов. Поэтому ограничимся тем, что перечислим, какие значения будут стоять в нулевой строчке этой матрицы для $P = 2$, $D_s = 2$, $D_a = 1$:

$$\hat{\Phi}_{xyz,0} = \left(1, x_l, x_l^2, x_l x_0, x_l y_l, x_l z_l, x_0, x_0^2, x_0 y_l, x_0 z_l, y_l, y_l^2, y_l z_l, z_l, z_l^2 \right) \tag{3.6}$$

Всего в матрице $\hat{\Phi}_{xyz}$ будет $N - \tau - (D_s - 1)l$ строк, которые можно получить из строки $\hat{\Phi}_{xyz,0}$ увеличением индексов всех компонент на номер строки, если считать, что номера идут от 0 до $N - \tau - (D_s - 1)l$ не включительно.

После построения всех матриц, необходимо пять раз решить задачу наименьших квадратов, чтобы получить ошибки ε_x^2 , ε_{xy}^2 , ε_{xz}^2 , ε_{yz}^2 и ε_{xyz}^2 , по которым, используя формулы (3.4), рассчитать три улучшения прогноза $PI_{z \rightarrow x|y}$, $PI_{y \rightarrow x|z}$ и $PI_{z \rightarrow y}$. По ним можно сделать вывод об архитектуре связей, используя таблицу 3.1 и имея в виду, что во многих реальных случаях вместо 1 могут получиться меньшие значения как из-за наличия шумов, так и из-за несовершенства моделей (2.1), а вместо нулей тоже получатся ненулевые положительные значения PI , которые, однако, должны быть много меньше значений, соответствующих истинным связям.

Задания

Реализуйте метод условной причинности по Грейнджеру для 3 связанных в цепочку систем с полиномиальными функциями одним из следующих способов (расположены в порядке возрастания сложности):

1. явным образом выписав формулы для матриц базисных функций при $D_s = 2$, $D_a = 1$ и $P = 2$, т. е. используя матрицы (2.3, 2.4, 3.6);
2. явным образом выписав формулы для матриц базисных функций при $D_s = 3$, $D_a = 1$ и $P = 3$ — этот случай сложнее предыдущего и содержит его в себе, матрица $\hat{\Phi}_x$ будет содержать 20 строк, матрицы $\hat{\Phi}_{xy}$, $\hat{\Phi}_{xz}$ и $\hat{\Phi}_{yz}$ — 35 строк, а матрица $\hat{\Phi}_{xyz}$ — 56 коэффициентов;
3. написав общий для произвольных D_s , D_a и P алгоритм с обходом дерева рекурсивно;
4. написав общий для произвольных D_s , D_a и P алгоритм с обходом дерева рекурсивно с добавлением дополнительных линейных слагаемых, как это показано в формулах (2.1) и (3.5).

Протестируйте написанный алгоритм на трёх связанных отображениях Эно (3.7) и системах из приложения А.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda_x x_n^2 - b_x x_{n-1} + k_{yx} y_n + k_{zx} y_n \\y_{n+1} &= 1 - \lambda_y y_n^2 - b_y y_{n-1} + k_{zy} x_n \\y_{n+1} &= 1 - \lambda_y y_n^2 - b_y y_{n-1} x_n\end{aligned}\tag{3.7}$$

Для этого сгенерируйте временные ряды от системы (3.7) при всех возможных восьми, описанных в таблице 3.1, комбинациях нулевых и ненулевых коэффициентов k_{yx} , k_{zx} и k_{zy} .

Глава 4

Частная направленная когерентность

Частная направленная когерентность представляет собою с одной стороны обобщение классической функции когерентности, как это показано в ([8]), а с другой стороны может рассматриваться как обобщение линейного метода причинности по Грейнджеру, поскольку для её расчёта необходимо построить линейные авторегрессионные модели вида, очень близкого к (1.8), только сразу от нескольких переменных. То есть по построению методика ближе к задачам реконструкции, а не Фурье-анализа. Методика претендует на то, чтобы уметь различать прямые и опосредованные взаимодействия, примеры чего показаны в оригинальной работе [8] для авторегрессионных систем 3-го и 5-го порядка.

4.1 Описание метода

Теоретическое обоснование методики дано в [8], поэтому далее сосредоточимся на её реализации. Пусть у нас в распоряжении имеются временные ряды D различных систем. Поскольку в случае произвольного D обойтись обозначениями вроде X , Y или Z уже не удастся, будем обозначать их X_i . Для удобства, чтобы не запутаться в нижних индексах, номер момента времени будем писать не внизу, как ранее, а в круглых скобках; таким образом, система X теперь будет у нас обозначаться как X_1 , а её временной ряд — $\{x_1(n)\}_{n=0}^{N-1}$, система Y получит обозначение

X_2 , а её временной ряд — $\{x_2(n)\}_{n=0}^{N-1}$ и так далее.

Теперь представим имеющиеся D скалярных временных рядов в виде одного векторного (4.1):

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ \dots \\ x_D(n) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(n). \quad (4.1)$$

Тогда линейная авторегрессионная модель эволюции вектора $\mathbf{x}(n)$ будет иметь вид (4.2).

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{r=1}^d \hat{A}_r \mathbf{x}(n-r) + \mathbf{w}(n), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{w}(n)$ — вектор ошибок модели (невязок) в n -ный момент времени, который также рассматривают как динамический шум, а d — параметр модели, определяющий число предыдущих значений вектора \mathbf{x} , учитываемых при прогнозе следующего.

Чтобы рассчитать коэффициенты $a_{i,j}(r)$ матрицы \hat{A} , модель (4.2) представляется в форме (4.3).

$$x_i(n) = \sum_{r=1}^d \sum_{j=1}^D a_{i,j}(r) x_j(n-r) + w_i(n). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) даёт возможность оценить i -тые строчки всех матриц \hat{A}_r сразу, оценку нужно проводить для всех компонентов сигнала $i = 1, \dots, D$.

$$\hat{A}(f) = \sum_{r=1}^d \hat{A}_r z^{-r} \Big|_{z=e^{-i2\pi f}}. \quad (4.4)$$

Для удобства вводится матрица $\overline{\hat{A}}(f) = \hat{E} - \hat{A}(f)$, где \hat{E} — единичная матрица. С её помощью частная направленная когерентность выражается следующим образом:

$$\text{PDC}_{ij}(f) = \frac{\overline{a}_{i,j}(f)}{\sqrt{\overline{\mathbf{a}}_j^{H*}(f) \Sigma^{-1} \overline{\mathbf{a}}_j(f)}} \quad (4.5)$$

где H^* — операция эрмитова сопряжения (взятие комплексного сопряжения элементов и транспонирование), $\overline{\mathbf{a}}_j$ — векторы-столбцы матрицы $\overline{\hat{A}}(f)$.

4.2 Численная реализация метода частной направленной когерентности

Всю численную реализацию подхода следует разбить на две части: построение авторегрессионных моделей и расчёт функции PDC по уже известным коэффициентам моделей. Реализацию подхода следует начать именно со второй части: по уже известным коэффициентам рассчитать функцию когерентности и построить её. Поскольку в результате расчётов получится фактически трёхмерная матрица $\hat{A}(f)$, результат очень сложно осознать без построения графика. Причём графиков придётся строить D^2 штук для каждой пары i и j . Хотя ряд авторов утверждают, что значения меры при $i = j$ бессмысленны, стоит их на первых порах оставить, потому что это полезно для сопоставления с результатами, известными в литературе. Только после того, как вы получили нужные кривые по известным коэффициентам, можно приступать к следующему шагу — оценивать эти коэффициенты по временным рядам.

Авторегрессионные модели (4.3) отличаются от рассмотренных нами ранее моделей (1.8) тем, что в них, во-первых, размерность вектора состояния от каждого ряда одна и та же: $D_s = D_a = d$, во-вторых, следует сразу строить модели для рядов всех объектов X_i . Из формулы (4.4) видно, что для расчёта меры необходимы сразу модели для всех рядов. То есть провести тестирование по отдельности влияния объекта X_i на объект X_j , как это было возможно методом причинности, не получится. Аналогично, при $D > 3$ нельзя отдельно ставить вопрос о том, является ли связь между объектами X_i и X_j прямою или опосредованною по средствам некоторого третьего объекта X_k . Таким образом, построение индивидуальной модели не требуется, а нужно сразу строить совместную модель, причём по аналогии с (3.5) с компонентами сразу от нескольких (всех) других рядов.

В программе набор матриц \hat{A}_r удобнее всего представить в виде трёхмерного массива, если только такое представление поддерживается используемым языком программирования. Например, поддержка таких массивов имеется в `numpy` для Питона, в Фортране в самом ядре языка, в библиотеке `mir.ndslice` для языка D. Преимущество таких массивов в

том, что можно заполнять и выбирать элементы сечениями по любому направлению. Это важно, так как при построении авторегрессионных моделей у вас получится матрица $\hat{\Phi}$ размера $((N-d) \cdot D \cdot d) \times (N-d)$ элементов, содержащая предыдущие, сдвинутые во времени значения всех D систем на каждый из d ($r = 1, \dots, d$) шагов во все $N-d$ моментов времени. На этом этапе придётся все зависимости от всех D систем сгрудить линейно в одну строку, иначе метод наименьших квадратов применить не удастся. В результате решения задачи на наименьшие квадраты вы получите массив длиной dD коэффициентов модели, который можно будет преобразовать в прямоугольную матрицу размером $d \times D$ построчно, разделив зависимость по объектам X_i . Этот массив отражает зависимость i -того объекта от всех (от 1 до d) прошлых состояний всех D объектов X_j . Однако для расчёта PDC нужна совсем другая матрица \hat{A}_r , соответствующая только временному моменту r , но отражающая зависимость всех D объектов от всех D объектов. Нетрудно видеть, что эти две матрицы можно представить как сечения одного и того же трёхмерного массива по разным направлениям. Поэтому заполнение массива придётся производить слоями по i , а выбирать из него значения — слоями по r .

Обратите внимание: матрица $\hat{\Phi}$ будет *одна и та же* для всех D моделей! Различаться будет только вектор аппроксимируемых значений (4.6).

$$\mathbf{x}_i = (x_i(d), x_i(d+1), \dots, x_i(N-1)) \quad (4.6)$$

Таким образом, если вы используете методику расчётов, например, с помощью QR-разложения, или встроенные функции LAPACK (доступны также и в numpy), вы можете существенно сэкономить время вычислений, не преобразовывая одну и ту же матрицу в цикле много раз.

Получив трёхмерный массив $\hat{A}(r)$, преобразуйте его к трёхмерному же массиву $\hat{A}(f)$ по формуле (4.4). Обратите внимание, что формула $\hat{A}(f)$, как и последующее выражение (4.5), написана в предположении о том, что вы можете работать с комплексными числами так же легко, как с действительными. Это возможно, например, в Фортране, Питоне, D, Си++ при использовании некоторых дополнительных библиотек. В Паскале и некоторых других языках вам придётся организовывать дополнительные процедуры и функции. При этом сами значения PDC(f) являются также комплексными, но анализируется только их модуль.

Далее задайте произвольно массив частот. Смысл имеют частоты от 0 до частоты Найквиста (половина частоты выборки f_{samp}). Но сама мера построена исходя из предположения, что $f_{\text{samp}} = 1$. Поэтому ряд частот следует генерировать в диапазоне от 0 до 0.5 равномерно. Общее число частот можно сделать любое, но смысл будут иметь только $d_f = d + 1$ штука, остальные по сути будут результатом интерполяции. Генерировать больше $d + 1$ частоты можно только для гладкости получаемых зависимостей. Когда массив частот сформирован, можно вычислять $\hat{A}(\mathbf{f})$, поскольку это теперь не абстрактная зависимость, а просто трёхмерный массив $\hat{A}(f_r)$,

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/(2d_f) \\ 2/(2d_f) \\ 3/(2d_f) \\ \vdots \\ (d_f - 1)/(2d_f) \\ 1/2 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

После того, как $\text{PDC}(f)$ вычислена, необходимо для построения графиков перенормировать вектор частот (4.7), умножив все его значения на f_{samp} .

4.3 Тестирование методики

Возьмите коэффициенты исходных авторегрессионных моделей из оригинальной работы [8] — она находится в свободном доступе на сайте издательства Springer. Там рассмотрены несколько численных примеров, используйте те из них, где $D = 5$ (по всей видимости, в самом первом примере с $D = 3$ имеется ошибка). Сформируйте из этих коэффициентов трёхмерный массив $\hat{A}(r)$. Далее по формулам (4.4) и (4.5) рассчитайте частную направленную когерентность. Для рассчитанной таким образом меры постройте графики зависимости $\text{PDC}_{i,j}(f)$ для каждого $i, j \in (1, 2, \dots, D)$. Проще всего строить графики либо в виде отдельных файлов, либо разделить полотно по вертикали и по горизонтали на D частей. В результате у вас должны получиться зависимости, визуально

неотличимые от таковых в оригинальной работе [8]. Если это получилось, можно переходить к следующему этапу.

Для тестирования метода частной направленной когерентности нужно сгенерировать временные ряды от авторегрессионных моделей из работы [8]. Длину рядов можно ограничить, например, 1000 значений. При этом нужно понимать, что ряды генерируются обязательно с шумом, иначе колебания в отличие от колебаний в системе линейных осцилляторов с маленькими коэффициентами γ очень быстро затухнут и большая часть ряда будет представлять собою последовательность нулей. Дисперсия шумов в общем случае не играет роли, можно взять её ранюю 1, их среднее — обязательно нулевым, а сами случайные сила $w_i(n)$ следует выбирать из нормального распределения, что в данном случае достаточно принципиально.

Когда ряды готовы, следует по ним сформировать матрицу Φ и методом наименьших квадратов рассчитать все коэффициенты моделей. После этого коэффициенты следует сопоставить с исходными значениями (поскольку при генерации использовались случайные процессы, коэффициенты не будут в точности равны исходным значениям). Далее, если коэффициенты по порядку величины сходятся, следует увеличить длину ряда, например, в 4 раза и снова провести реконструкцию. Если вычислительные возможности позволяют, увеличивать длину ряда нужно несколько раз. С увеличением длины ряда ошибки определения коэффициентов должны постепенно уменьшаться по закону, близкому к $1/\sqrt{N}$.

Задания

Реализуйте метод частной направленной когерентности по изложенной выше методике в виде двух процедур или функций: пусть первая из них по известным коэффициентам авторегрессионных моделей (4.3) рассчитывает функцию когерентности и строит графики (построение графиков также можно вынести в отдельную функцию, если сами расчёты занимают много времени), а вторая — рассчитывает коэффициенты моделей (4.3) по векторным временным рядам. Проверьте, используя модели из оригинальной статьи [8] правильность работы вашего алгоритма.

Примените алгоритм к тестовым системам из приложения А: связанным линейным осцилляторам, связанным системам ФитцХью–Нагумо и связанным генераторам с жёстким возбуждением. Проведите первое тестирование на 3–4 системах, как это предложено в приложении А. Затем рассмотрите различные архитектуры связей в ансамбле 8 осцилляторов одного из предложенных в приложении А типов: каждый с каждым, на каждый влияют два произвольных, кольцо, цепочка, двунаправленная цепочка, звезда (все связи через центр). Сделайте выводы, какие связи восстанавливаются лучше, а какие плохо, в каких случаях метод показывает ложно положительные взаимодействия?

Приложение А. Тестовые системы

Системы для тестирования попарной связанности

Для тестирования метода можно воспользоваться тестовыми системами из работы [3]. Они подходят для проверки представленных в пособии методик попарного анализа — глав 1 и 2. Перечислим эти системы ниже.

1. Процессы авторегрессии первого порядка:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha x_n + k y_n + \xi_n \\ y_{n+1} &= \beta y_n + \eta_n,\end{aligned}\tag{4.8}$$

где $\alpha = 0.99$, $\beta = 0.98$.

2. Процессы авторегрессии второго порядка:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_{n-1} + k y_n + \xi_n \\ y_{n+1} &= \beta_1 y_n + \beta_2 y_{n-1} + \eta_n,\end{aligned}\tag{4.9}$$

где $\alpha_1 = \beta_1 = 1.99$, $\alpha_2 = \beta_2 = -0.99$.

3. Системы Фитцхью-Нагумо:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1(a - x_1)(x_1 - 1) - x_2 + I_a + k y_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b x_1 - \gamma x_2 \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1(a - y_1)(y_1 - 1) - y_2 + I_a \\ \frac{dy_2}{dt} &= b y_1 - \gamma y_2,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$a = 0.8$, $b = 0.008$, $\gamma = 0.0033$, $I_a = 0.84$. Уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом $h = 0.5$, поскольку в систему вводился динамический шум со среднеквадратичным отклонением $\sigma_n = 0.02\sigma_s$, где σ_s — среднеквадратичное отклонение сигнала. Устойчивость алгоритма тестировалась путём проверки на меньших шагах; далее временной ряд перевыбирался с шагом $\Delta t = 3h$, чтобы получить $\sim 10^2$ отсчётов на характерном периоде.

4. Системы Рёсслера:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(x_2 + x_3) + ky_1, & \frac{dy_1}{dt} &= -(y_2 + y_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + a_x x_2, & \frac{dy_2}{dt} &= y_1 + a_y y_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= b_x - x_3(x_1 - c_x), & \frac{dy_3}{dt} &= b_y - y_3(y_1 - c_y), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $a_x = 0.398$, $b_x = 2$, $c_x = 4$, $a_y = 0.2$, $b_y = 0.2$, $c_y = 5.7$ для хаотического режима и $a_x = 0.3$, $b_x = 0.2$, $c_x = 1.5$, $a_y = 0.25$, $b_y = 0.2$, $c_y = 2$ для периодического. В периодическом режиме система интегрировалась методом Эйлера с шагом $h = 0.0001$ и динамическим шумом ~ 2 , данные перевыбирались с интервалом $\Delta t = 500h$; в хаотическом — методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.005$ без динамического шума, и данные перевыбирались с шагом $\Delta t = 10h$.

5. Системы Лоренца:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_x(x_2 - x_1) + ky_1, & \frac{dy_1}{dt} &= a_y(y_2 - y_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(b_x - x_3) + x_2, & \frac{dy_2}{dt} &= y_1(b_y - y_3) + y_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - c_x x_3, & \frac{dy_3}{dt} &= y_1y_2 - c_y y_3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $a_x = 10$, $b_x = 46$, $c_x = 83$, $a_y = 10.01$, $b_y = 47$, $c_y = 83$ для хаотического режима. Система интегрировалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.001$ без динамического шума, и данные перевыбирались с шагом $\Delta t = 4h$.

Во всех случаях к сгенерированным временным рядам добавлялись реализации измерительного нормального некоррелированного шума со

среднеквадратичным отклонением $\sigma_m = 0.01\sigma_s$. От каждой системы записывались короткие временные ряды длиной 2000 отсчётов, или $\sim 20 - 30$ характерных периодов. Такая длина рядов была выбрана, поскольку она типична для разного рода физиологических данных, например, сигналов элетроэнцефалограмм, магнитоэнцефалограмм, электрокардиограмм и др.

Системы для тестирования связанности в ансамблях

Для тестирования связанности в ансамблях можно использовать тестовые системы, рассмотренные в работе [27].

Линейный осциллятор (линейная система с линейной связью)

Тестировать следует начать на примере системы, состоящей из линейных осцилляторов, связанных линейной связью (4.13):

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_i}{dt} + \omega_i^2 x_i = \xi_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{i,j} x_j \quad (4.13)$$

Частоту гармонических колебаний для четырёх осцилляторов следует немного варьировать. Например, можно взять значения из работы [27]: $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 0.99$, $\omega_3 = 0.98$, $\omega_4 = 0.96$. При воздействии i -того осциллятора на j -тый все значения $k_{i,j}$ для связей, присутствующих в соответствующей архитектуре, задавать следующим образом (для отсутствующих связей они были равны 0): $k_{1,j} = 0.65$, $k_{2,j} = 0.35$, $k_{3,j} = 0.45$, $k_{4,j} = 0.87$. Коэффициенты линейной диссипации нужно выбирать из соображений возможной устойчивой генерации колебаний в присутствии связей: $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 0.08$, $\gamma_3 = 0.03$, $\gamma_4 = 0.07$. Источником энергии колебаний будет выступать динамический белый нормальный шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением порядка

1, например, можно использовать значение $\sigma_n = 2.5$. При значительно меньших (например, в два раза) значениях γ_i , чем рассмотренные, добротность колебаний отдельных элементов ансамбля окажется столь велика, что из-за связей амплитуда сигнала может расти неограниченно (будет иметь место явление резонанса). При значительно больших величинах γ_i роль шума в динамике существенно возрастёт, а частота колебаний будет кратно меньше частоты гармонических колебаний ω_i , что может потребовать уменьшить частоту выборки (увеличить δt) при сохранении той же длины ряда N , либо увеличить N .

Уравнения следует интегрировать методом Эйлера с шагом $h = 0.01$, поскольку в систему вводится шум. Методы Рунге–Кутты высоких порядков (например, часто используемый метод 4-го порядка) в таком случае не имеют практического смысла, так как требуют дополнительных предположений о природе шума [28]. Шаг интегрирования придётся подбирать эмпирически: величина h уменьшалась до тех пор, пока временные реализации, полученные при двух отличающихся значениях h . Для приведённых выше значений приемлемыми являются значения $h = 0.01$ и $h = 0.005$.

Если использовать параметры из работы [27], связанные линейные осцилляторы будут находиться в режиме колебаний с несколькими модами (двумя или тремя) с сильно разнесёнными парциальными частотами, что обусловлено большим коэффициентом связи и высокой добротностью [29]. Ведомые осцилляторы при этом будут демонстрировать суперпозицию колебаний на собственной частоте и вынужденных колебаний. Уединённый осциллятор колеблется на собственной частоте.

Система ФитцХью-Нагумо (нелинейная система с линейной связью)

Усложним задачу и сконструируем систему, состоящую из нелинейных осцилляторов, связанных линейной связью. Например, систему из

4-х связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (4.14):

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= x_i(\alpha_i - x_i)(x_i - 1) - y_i + I_{a,i} + \xi_i(t) + \sum_{j \neq i} k_{i,j}x_j \\ \frac{dy_i}{dt} &= \beta_i x_i - \gamma_i y_i\end{aligned}\quad (4.14)$$

Параметры модели следующие: коэффициенты связи $k_{1,j} = 0.35$, $k_{2,j} = 0.38$, $k_{3,j} = 0.39$, $k_{4,j} = 0.37$, внешний стимул $I_{a,i} = 0.85$, коэффициент $\alpha_i = 0.8$, коэффициент β менялся от 0.15 до 0.17, а коэффициент γ — от 0.06 до 0.068. $\xi_i(t)$ — динамический белый нормальный шум с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_n = 2.5$. Параметры были в целом взяты из работы [30], где они подбирались таким образом, чтобы воспроизводить характеристики лимбических разрядов.

Все рассмотренные системы ФитцХью–Нагумо при таких параметрах будут находиться в режиме нелинейных колебаний (под режимом, близким к линейным колебаниям, мы понимаем режим, соответствующий назкоамплитудной, близкой к гармонической генерации), мощность была распределена в спектре в значительном диапазоне частот.

Генератор с жестким возбуждением и потенциалом Тоды (нелинейная система с нелинейной связью)

Ещё усложним задачу и введём систему, состоящую из нелинейных осцилляторов, связанных нелинейной связью (4.15). Данные осцилляторы можно назвать осцилляторами с жёстким возбуждением и потенциалом Тоды (далее сокращённо «ж/в – Тоды»).

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} - \left(r_i + \sum_{j \neq i} k_{i,j}x_j^2 - x_i^4 \right) \frac{dx_i}{dt} + \omega_i^2 (1 - e^{-x_i}) = \xi_i(t), \quad (4.15)$$

где i — номер текущего осциллятора, j — номер воздействующего осциллятора, коэффициент связи $k_{i,j} = 0.65$, коэффициенты нелинейности $r_1 = -0.05$, $r_2 = -0.08$, $r_3 = -0.06$, $r_4 = -0.07$, $\xi_i(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_s = 2.5$, частота гармонических колебаний $\omega_i = 1$ (одинаковая для всех

четырёх осцилляторов). Интегрировать следует методом Эйлера с шагом 0.01 или менее [30].

Связанные генераторы при используемых параметрах будут находиться в режиме сильно нелинейных релаксационных колебаний. Такой режим может рассматриваться как простейшая модель абсансов в [31].

Список литературы

1. *Granger C.* Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods // *Econometrica*. — 1969. — Vol. 37, no. 3. — P. 424–438.
2. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing Multiple Non-linear Time Series with Extended Granger Causality // *Physics Letters A*. — 2004. — Vol. 324, no. 1. — P. 26–35.
3. *Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // *Письма в ЖТФ*. — 2012. — Т. 38, № 3. — С. 103–110.
4. *Корнилов М. В., Безручко Б. П., Сысоев И. В.* Оптимальный подбор параметров прогностических моделей в методе нелинейной причинности по Грейнджеру в приложении к сигналам, характеризующим хорошо выраженными временными масштабами // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 3. — С. 279–295. — DOI: 10.20537/nd1403003.
5. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трёх однонаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру // *Письма в ЖТФ*. — 2018. — Т. 44, № 10. — С. 86–95.
6. *Wiener N.* The theory of prediction // *Modern Mathematics for the Engineer* / ed. by E. F. Beckmann. — New York : McGraw-Hill, 1956. — P. 514.
7. *Schreiber T.* Measuring Information Transfer // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 85. — P. 461.

8. *Baccala L., Sameshima K.* Partial directed coherence: a new concept in neural structure determination // *Biol. Cybern.* — 2001. — Vol. 84. — P. 463–474.
9. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 64. — 045202(R). — DOI: 10.1103/PhysRevE.64.045202.
10. *Smirnov D. A., Bezruchko B. P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Physical Review E.* — 2003. — Vol. 68. — P. 046209.
11. *Barnett L., Barrett A., Seth A.* Granger Causality and Transfer Entropy Are Equivalent for Gaussian Variables // *Physical Review Letters.* — 2009. — Vol. 103. — P. 238701.
12. *Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук.* — 2008. — Т. 178. — С. 323–329.
13. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Physical Review E.* — 2006. — Vol. 73. — P. 066216.
14. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Kernel-Granger causality and the analysis of dynamical networks // *Physical Review E.* — 2008. — Vol. 77. — P. 056215.
15. *Smirnov D. A., Bezruchko B. P.* Spurious causalities due to low temporal resolution: Towards detection of bidirectional coupling from time series // *Europhysics Letters.* — 2012. — Vol. 100. — P. 10005.
16. *Smirnov D.* Quantifying causal couplings via dynamical effects: A unifying perspective // *Physical Review E.* — 2014. — Vol. 90. — P. 062921.

17. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Исследование эффективности метода нелинейной причинности по Грейнджеру в случае сильной синхронизации систем // Известия вузов. ПНД. — 2014. — Т. 22, № 4. — С. 66–75. — DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-4-66-76.
18. *Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2015. — Vol. 309. — P. 9–19. — DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
19. *Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // Известия вузов. ПНД. — 2010. — Т. 18, № 4. — С. 81–87. — DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
20. *Bezruchko B. P., Smirnov D. A.* Extracting Knowledge From Time Series: (An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling). — New York : Springer, 2010. — P. 406. — (Springer Series in Synergetics).
21. *Judd K., Mees A.* Embedding as a modeling problem // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — Vol. 120. — P. 273–286.
22. *Faes L., Nollo G., Porta A.* Information-based detection of nonlinear Granger causality in multivariate processes via a nonuniform embedding technique. // Physical Review E. — 2011. — Vol. 83. — P. 051112.
23. *Schwarz G.* Estimating the Dimension of a Model // The Annals of Statistics. — 1978. — Vol. 6, no. 2. — P. 461–464. — DOI: 10.1214/aos/1176344136.
24. *Kougioumtzis D.* State space reconstruction parameters in the analysis of chaotic time series—the role of the time window length // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1996. — Vol. 91, no. 1. — P. 13–28.
25. *Yick J., Mukherjee B., Ghosal D.* Wireless sensor network survey // Computer Networks. — 2008. — Vol. 52, no. 12. — P. 2292–2330. — DOI: 10.1016/j.comnet.2008.04.002.

26. *Packard N., Crutchfield J., Farmer J., Shaw R.* Geometry from a Time Series // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Vol. 45. — P. 712–716. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.712.
27. *Д.И. А., Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Влияние нелинейности на оценки связанности осцилляторов методом частной направленной когерентности // *Известия вузов. ПНД.* — 2019. — Т. 27, № 6. — С. 8–24. — DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-6-8-24.
28. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. — Советское радио, 1977. — С. 488.
29. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — С. 560.
30. *Сысоева М. В., Медведева Т. М.* Оптимизация параметров метода причинности по Грейнджеру для исследования лимбической эпилепсии // *Известия вузов. ПНД.* — 2018. — Т. 26, № 5. — С. 39–62. — DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-6-8-24.
31. *Sysoeva M., Kuznetsova G., Sysoev I.* The modeling of rat EEG signals in absence epilepsy in the analysis of brain connectivity // *Biophysics (Russian Federation).* — 2016. — Т. 61, № 4. — С. 661–669.