Содержание

Предисловие **9**

Введение **12**

ЧАСТЬ I. МОДЕЛИ И ПРОГНОЗ

Глава 1. Понятие модели. Чем замечательны модели математические **15**
1.1. Что будем называть моделью и моделированием 15
1.2. Наука, научное знание, систематизации научных моделей 21
1.3. Обман чувств и интуиция. Спасение математикой 25
1.4. Сколько моделей может быть у одного объекта 29
1.5. Как рождаются модели 31
1.6. Структурная схема процесса математического моделирования 33
1.7. Выводы из исторической практики моделирования. Показательная судьба моделей механики 35

Глава 2. Два подхода к моделированию и прогноз **40**
2.1. Основные понятия и особенности динамического моделирования 41
2.1.1. Определение динамической системы 41
2.1.2. Нестрогий пример. Переменные и параметры 44
2.1.3. Фазовое пространство. Консервативные и диссипативные системы. Аттракторы, мультистабильность, бассейны притяжения 46
2.1.4. Характеристики аттракторов 50
2.1.5. Пространство параметров. Бифуркации. Комбинированные пространства, бифуркационные диаграммы 57
2.2. Основания для объявления процессов случайными 58
2.2.1. Теоретико-множественный подход 59
2.2.2. Признаки случайности, традиционные для физиков 70
2.2.3. Алгоритмический подход 71
2.2.4. Случайность как непредсказуемость 71
2.3. Концепция частичной детерминированности 72
2.4. Ляпуновские показатели и пределы предсказуемости 74
2.4.1. Практическая оценка дальности прогноза 74
2.4.2. Предсказуемость и ляпуновский показатель: случай малых возмущений 75
2.5. Масштабы рассмотрения: как они определяют оценку свойств процесса (сложная динамика или случайность) 80
2.6. Пример с монетой 82

Глава 3. Динамические модели эволюции **87**
3.1. Терминология 87
3.1.1. Оператор, отображение, уравнение, оператор эволюции 87
3.1.2. Функции, непрерывное и дискретное время 88
3.1.3. Отображение последования, итерация 89
3.1.4. Потоки и каскады, сечение и отображение Пуанкаре 89
3.1.5. Иллюстративный пример 90
3.2. Систематизация некоторых видов модельных уравнений 91
3.3. Явные функциональные зависимости 96
3.4. Линейность и нелинейность 99
3.4.1. Линейность и нелинейность функций и уравнений 99
3.4.2. Природа нелинейности 100
3.4.3. Иллюстрация на маятниках 101
3.5. Модели – обыкновенные дифференциальные уравнения 103

3.5.1. Виды решений ... 103
3.5.2. Популярный класс модельных уравнений – осцилляторы ... 106
3.5.3. «Стандартная форма» обыкновенных дифференциальных уравнений ... 109
3.6. Модели – точечные отображения ... 111
3.6.1. Введение ... 111
3.6.2. Эталонные нелинейные отображения ... 111
3.6.3. Место дискретных моделей ... 116
3.7. Модели пространственно развитых систем ... 122
3.7.1. Решетки связанных отображений ... 123
3.7.2. Клеточные автоматы ... 128
3.7.3. Дифференциальные уравнения с запаздыванием ... 130
3.7.4. Дифференциальные уравнения в частных производных ... 131
3.8. Искусственные нейронные сети ... 132
3.8.1. Стандартный формальный нейрон ... 133
3.8.2. Архитектура и классификации нейронных сетей ... 135
3.8.3. Основные свойства и решаемые задачи ... 136
3.8.4. Обучение ... 137

Глава 4. Стохастические модели эволюции ... 139
4.1. Элементы теории случайных процессов ... 139
4.1.1. Понятие случайного процесса ... 139
4.1.2. Характеристики случайного процесса ... 140
4.1.3. Стационарность и эргодичность случайных процессов ... 141
4.1.4. Статистические оценки характеристик случайных процессов ... 143
4.2. Базовые модели случайных процессов ... 143
4.3. Уравнения эволюции распределения вероятностей ... 146
4.4. Процессы авторегрессии – скользящего среднего ... 147
4.5. Стохастические дифференциальные уравнения и белый шум ... 151

ЧАСТЬ II. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ

Глава 5. Постановки задач моделирования по рядам ... 155
5.1. Схема процесса построения модели по временному ряду ... 155
5.2. Систематизация задач по объему априорной информации ... 157
5.3. Особенности задач эмпирического моделирования ... 158
5.3.1. Прямые и обратные задачи ... 158
5.3.2. Корректно и некорректно поставленные задачи ... 159
5.3.3. Плохо обусловленные задачи ... 161

Глава 6. Ряды наблюдаемых – источник данных для моделирования ... 162
6.1. Наблюдаемые и модельные величины ... 162
6.1.1. Наблюдения и измерения ... 162
6.1.2. Методы увеличения и уменьшения числа характеризующих величин ... 166
6.2. Аналого-цифровые преобразователи ... 168
6.3. Временные ряды ... 170
6.3.1. Термины ... 170
6.3.2. Примеры ... 171
6.4. Элементы анализа временных рядов ... 176
6.4.1. Визуальный экспресс-анализ ... 176
6.4.2. Методы спектрального анализа (фурье-анализ и вейвлеты) ... 178
6.4.3. Фаза сигнала и разложение на эмпирические моды ... 189
6.4.4. Анализ на стационарность/нестационарность ... 194
6.4.5. Анализ взаимной зависимости (корреляция, когерентность, синхронизация) ... 195
6.5. Экспериментальный пример вместо заключения ... 197

Глава 7. Восстановление временных зависимостей ... 200
7.1. Оценка параметров ... 201
7.1.1. Методы оценивания ... 202
7.1.2. Сопоставление методов ... 205
7.1.3. Оптимальное оценивание ... 208
7.1.4. Устойчивое оценивание ... 209
7.1.5. Выводы ... 210
7.2. Аппроксимация ... 210
7.2.1. Две постановки задачи и термины ... 210
7.2.2. Расчет параметров ... 212
7.2.3. Выбор размера модели, переобучение и «бритва Оккама» ... 214
7.2.4. Выбор класса аппроксимирующих функций ... 218
7.3. Диагностическая проверка модели ... 220
7.3.1. Проверка независимости остатков ... 220
7.3.2. Проверка нормальности остатков ... 221
7.4. Примеры применения моделей ... 223
7.4.1. Прогноз ... 223
7.4.2. Численное дифференцирование ... 226

Глава 8. Модельные уравнения: оценка параметров ... 229
8.1. Оценки параметров и их точность ... 230
8.1.1. Динамический шум ... 230
8.1.2. Измерительный шум ... 232
8.2. Скрытые переменные ... 235
8.2.1. Методы ... 235
8.2.2. Что дают успехи и какая польза от неудач моделирования? ... 238

Глава 9. Модельные уравнения: восстановление нелинейных характеристик ... 243
9.1. Процедуры восстановления и особенности задачи ... 244
9.2. Оптимизация структуры модели ... 246
9.3. Восстановление характеристик нелинейного элемента электрической цепи ... 248
9.4. Специфические подходы к выбору структуры модели ... 249
9.4.1. Системы под регулярным внешним воздействием ... 250
9.4.2. Системы с запаздыванием ... 252

Глава 10. Реконструкция уравнений: «черный ящик» ... 254
10.1. Реконструкция фазовой траектории ... 255
10.1.1. Теоремы Такенса ... 256
10.1.2. Практические алгоритмы реконструкции ... 264
10.2. Аппроксимация функций многих переменных ... 271
10.2.1. Модельные отображения ... 271
10.2.2. Модельные дифференциальные уравнения ... 279
10.3. Прогноз с помощью различных видов моделей ... 280
10.4. Диагностическая проверка модели ... 284

Глава 11. Практические приложения эмпирических моделей ... 286
11.1. Сегментация нестационарных временных рядов ... 286
11.2. Конфиденциальная передача информации ... 289
11.3. Определение характера связи между осцилляторами ... 291
11.4. Другие приложения ... 294

Заключение ... 298

Библиографический список ... 299

Table of contents

Preface **9**

Introduction **12**

PART I. MODELS AND FORECAST

Chapter 1. The concept of model. What is remarkable in mathematical models **15**
1.1. What is called "model" and "modeling" 15
1.2. Science, scientific knowledge, systematization of scientific models 21
1.3. Delusion and intuition. Rescue with mathematics 25
1.4. How many models for a single object can exist 29
1.5. Ways the models are born 31
1.6. Structural scheme for the process of mathematical modeling 33
1.7. Conclusions from historical practice of modeling. Indicative destiny of models in mechanics 35

Chapter 2. Two approaches to modeling and forecast **40**
2.1. Basic concepts and peculiarities of dynamical modeling 41
2.1.1. Definition of dynamical system 41
2.1.2. Nonrigorous example. Variables and parameters 44
2.1.3. State space. Conservative and dissipative systems. Attractors, multistability, basins of attraction 46
2.1.4. Characteristics of attractors 50
2.1.5. Parameter space. Bifurcations. Combined spaces, bifurcation diagrams 57
2.2. Foundations to claim a process "random" 58
2.2.1. Set-theoretic approach 59
2.2.2. Signs of randomness traditional for physicists 70
2.2.3. Algorithmic approach 71
2.2.4. Randomness as unpredictability 71
2.3. Concept of partial determinancy 72
2.4. Lyapunov exponents and limits of predictability 74
2.4.1. Practical estimate of prediction time 74
2.4.2. Prdictability and the Lyapunov exponent: The case of infinitesimal perturbations 75
2.5. Scales of consideration: How they determine appraisal about process properties (complex deterministic dynamics or randomness) 80
2.6. Example with coin 82

Chapter 3. Dynamical (deterministic) models of evolution **87**
3.1. Terminology 87
3.1.1. Operator, map, equation, evolution operator 87
3.1.2. Functions, continuous and discrete time 88
3.1.3. Return map, iteration 89
3.1.4. Flows and cascades, Poincare section and Poincare map 89
3.1.5. Illustrative example 90
3.2. Systematization of some kinds of model equations 91
3.3. Explicit functional dependencies 96
3.4. Linearity and nonlinearity 99
3.4.1. Linearity and nonlinearity of functions and equations 99
3.4.2. The nature of nonlinearity 100
3.4.3. Illustration with pendulums 101
3.5. Models – ordinary differential equations 103
3.5.1. Kinds of solutions 103

3.5.2. Popular class of model equations – oscillators ... 106
3.5.3. "Standard from" of ordinary differential equations ... 109
3.6. Models – discrete maps ... 111
3.6.1. Introduction ... 111
3.6.2. Exemplary nonlinear maps ... 111
3.6.3. Role of discrete models ... 116
3.7. Models of spatially extended systems ... 122
3.7.1. Coupled map lattices ... 123
3.7.2. Cellular automata ... 128
3.7.3. Delay differential equations ... 130
3.7.4. Partial differential equations ... 131
3.8. Artificial neural networks ... 132
3.8.1. Standard formal neuron ... 133
3.8.2. Architecture and classification of neural networks ... 135
3.8.3. Basic properties and solvable tasks ... 136
3.8.4. Learning ... 137

Chapter 4. Stochastic models of evolution ... 139
4.1. Elements of theory of random processes ... 139
4.1.1. Concept of random process ... 139
4.1.2. Characteristics of random process ... 140
4.1.3. Stationarity and ergodicity of random processes ... 141
4.1.4. Statistical estimates of characteristics of random processes ... 143
4.2. Base models of random processes ... 143
4.3. Evolutionary equations for probability distribution laws ... 146
4.4. Autoregression – moving average processes ... 147
4.5. Stochastic differential equations and white noise ... 151

PART II. MODELING FROM TIME SERIES

Chapter 5. Problem settings in modeling from data series ... 155
5.1. Scheme for process of model construction from time series ... 155
5.2. Systematization of problems according to amount of *a priori* information ... 157
5.3. Specific features of empirical modeling problems ... 158
5.3.1. Direct and inverse problems ... 158
5.3.2. Well-posed and ill-posed problems ... 159
5.3.3. Ill-conditioned problems ... 161

Chapter 6. Observed series – source of data for modeling ... 162
6.1. Observable and model quantities ... 162
6.1.1. Observations and measurements ... 162
6.1.2. Methods to increase and decrease number of characterizing quantities ... 166
6.2. Analogous-to-digital converters ... 168
6.3. Time series ... 170
6.3.1. Terms ... 170
6.3.2. Examples ... 171
6.4. Elements of time series analysis ... 176
6.4.1. Visual express-analysis ... 176
6.4.2. Methods of spectral analysis (Fourier analysis and wavelets) ... 178
6.4.3. Phase of signal and empirical mode decomposition ... 189
6.4.4. Analysis of stationarity/nonstationarity ... 194
6.4.5. Analysis of cross-dependence (correlation, coherence, synchronization) ... 195
6.5. Experimental example instead of conclusions ... 197

Chapter 7. Reconstruction of explicit temporal dependencies 200
7.1. Parameter estimation 201
7.1.1. Methods of estimation 202
7.1.2. Comparison of methods 205
7.1.3. Optimal estimation 208
7.1.4. Robust estimation 209
7.1.5. Conclusions 210
7.2. Approximation 210
7.2.1. Two problem settings and terms 210
7.2.2. Calculation of parameters 212
7.2.3. Model size selection, overlearning, and "Occam's razor" 214
7.2.4. Selection of class of approximating functions 218
7.3. Model validation 220
7.3.1. Checking independence of residuals 220
7.3.2. Checking normality of residuals 221
7.4. Examples of model applications 223
7.4.1. Forecast 223
7.4.2. Numerical differentiation 225

Chapter 8. Model equations: parameter estimation 229
8.1. Parameter estimates and their accuracy 230
8.1.1. Dynamical noise 230
8.1.2. Measurement noise 232
8.2. Hidden variables 235
8.2.1. Methods 235
8.2.2. What benefit is got from successes and failures in modeling? 238

Chapter 9. Model equations: reconstruction of nonlinear characteristics 243
9.1. Reconstruction procedures and peculiarities of problem 244
9.2. Model structure optimization 246
9.3. Reconstruction of characteristics for nonlinear element of electric circuit 248
9.4. Specific choice of model structure 249
9.4.1. Systems under regular external driving 250
9.4.2. Time-delay systems 252

Chapter 10. Reconstruction of equations: "black box" 254
10.1. Reconstruction of phase orbit 255
10.1.1. Takens' theorems 256
10.1.2. Practical algorithms of reconstruction 264
10.2. Approximation of multivariable functions 271
10.2.1. Model maps 271
10.2.2. Model differential equations 279
10.3. Forecast with models of different kinds 280
10.4. Model validation 284

Chapter 11. Practical applications of empirical models 286
11.1. Segmentation of nonstationary time series 286
11.2. Confidential information transmission 289
11.3. Characterization of coupling between oscillators 291
11.4. Other applications 294

Conclusion 298

Bibliography 299