Глава 3. Динамические модели эволюции

3.1. Терминология

3.1.1. Оператор, отображение, уравнение, оператор эволюции

Как сказано в п. 2.1, динамическое моделирование подразумевает задание D-мерного вектора состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_D)$, где x_i – динамические переменные, и правила Φ_t, позволяющего по начальному состоянию $\mathbf{x}(0)$ однозначно определить состояние $\mathbf{x}(t)$ в будущие моменты времени:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_t(\mathbf{x}(0)) \tag{3.1}$$

Правило Φ_t принято называть *оператором эволюции*. «Оператор – то же, что отображение… *Отображение* – закон, по которому каждому элементу x некоторого заданного множества X сопоставляется однозначно определенный элемент y другого заданного множества Y (при этом X может совпадать с Y). Последнюю ситуацию называют *отображением в себя*» [118] (рис.3.1,а,б). В приложении к описанию эволюции состояния динамической системы (изображающей точки в пространстве состояний) часто используют термин «*точечное отображение*».

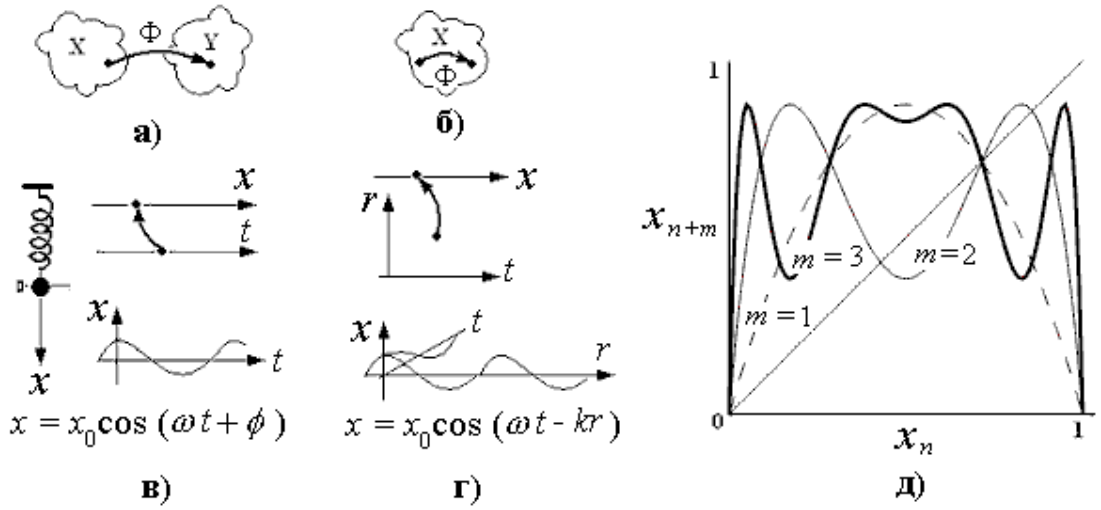

Рис.3.1. Различные виды отображений: а) из одного множества в другое; б) в себя; в) функция времени, описывающая колебания маятника без трения, г) функция двух переменных, описывающая гармоническую волну, д) итерации квадратичного отображения $x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n)$ при $R = 3.5$

Оператор эволюции может быть задан непосредственно – как отображение множества начальных состояний $\mathbf{x}(0)$ в множество состояний в последующие моменты $\mathbf{x}(t)$, но чаще это делается опосредованно – с

помощью уравнений. «*Уравнение* – запись задачи о разыскании элементов *a* некоторого множества *A*, которые удовлетворяют равенству $F(a) = G(a)$, где *F* и *G* - заданные отображения множества *A* в множество *B*» [1] [118]. Если задано уравнение, то оператор эволюции может быть получен путем его решения. Так, для обыкновенного дифференциального уравнения теорема о существовании и единственности решения гарантирует существование и взаимную однозначность отображения Φ_t в (3.1) при определенных условиях. Иногда удается найти его аналитически. Если это невозможно, то решение ищут приближенно в виде численного алгоритма, реализующего движение изображающей точки в фазовом пространстве (см. рис.3.2,а).

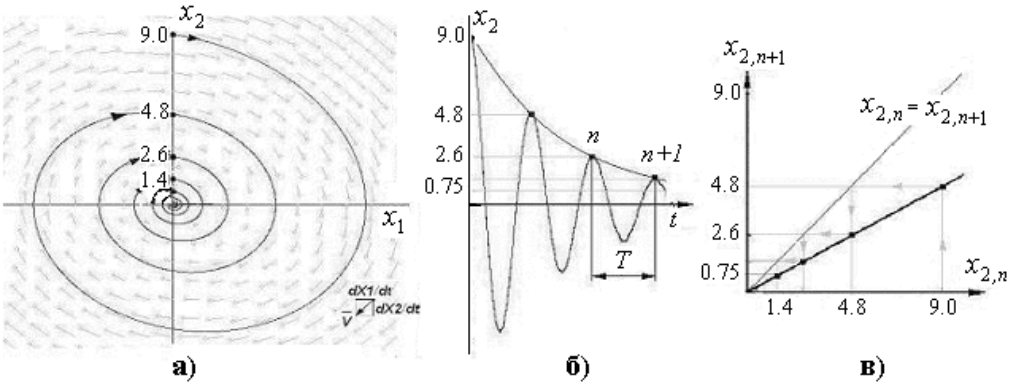

Рис.3.2. Фазовое пространство линейного диссипативного осциллятора (3.2) и переход к дискретному описанию: а) поле скоростей, заданное уравнениями (3.4); стрелки – скорости изменения состояния; б) временная реализация $x_2(t)$, черными квадратами выделены точки, соответствующие сечению Пуанкаре $x_1 = 0$. Эти точки разделены интервалом $\tau = T$, а связь между ними описывается одномерным отображением последования, представленным на рисунке (в); в) одномерное отображение последования, построенное с помощью сечения Пуанкаре линией $x_1 = 0$. Графически эволюцию удобно исследовать с помощью диаграммы Ламерея (серые линии)

3.1.2. Функции, непрерывное и дискретное время

Функции независимых переменных (одной $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$ или нескольких $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})$) отображают множество значений независимых переменных в множество значений зависимых (динамических) переменных. На рис.3.1,в,г время *t* и вектор пространственных координат **r** – независимые переменные, а отклонение от состояния равновесия *x* – динамическая переменная. Когда функция **F** зависит явно от начальных

[1] Если А и В – числовые множества, то возникают алгебраические и трансцендентные уравнения. Если это – множества функций, то в зависимости от характера отображений получим дифференциальные, интегральные и другие уравнения.

значений динамических переменных, она может выполнять роль оператора эволюции (см., например, формулу (3.3) ниже).

Состояние объекта может фиксироваться не *непрерывно* во времени t, а *дискретно* – в отдельные моменты t_n, отстоящие друг от друга на некоторый шаг Δt. В этом случае номер отсчета n =0,1,2,3,… называют *дискретным временем*. Если отсчеты делаются через равные интервалы времени Δt, то связь между непрерывным временем t и дискретным n линейна: $t_n = n\Delta t$. При неравных интервалах между отсчетами эта зависимость может быть более сложной и даже неоднозначной. Аналогично, вместо непрерывных пространственных координат можно использовать их дискретные варианты: номер шага по координате, номер элемента в цепочке или пространственной решетке и т.п.

3.1.3. Отображение последования, итерация

При «дискретном моделировании» значения динамических переменных $\mathbf{x}_n$, соответствующие различным моментам дискретного времени n, могут быть связаны отображением множества значений X в себя ($X \to X$): $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})$,где $\mathbf{c}$ – вектор параметров. Эту *рекуррентную формулу*[2] для записи оператора эволюции называют также *отображением последования.*

Для отображений популярны аналитические итерационные представления. *Итерация* (от латинского iteratio – повторение) результат повторного применения какой-либо математической операции. Так, если $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x})$ есть некоторая функция от $\mathbf{x}$, отображающая область определения в себя, то функции $\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}[\mathbf{F}(\mathbf{x})]$, $\mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}[\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x})]$, …, $\mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}[\mathbf{F}^{(m-1)}(\mathbf{x})]$ называют соответственно второй, третьей, …, m-й итерациями функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Индекс m – номер итерации. Например, для квадратичного отображения $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, где r – параметр, графики первых трех итераций представлены на рис.3.1,д.

3.1.4. Потоки и каскады, сечение и отображение Пуанкаре

В динамических системах, операторы эволюции которых задаются дифференциальными уравнениями, время непрерывно. В фазовом пространстве этих систем движению из близких начальных точек фазового пространства соответствует пучок фазовых траекторий, напоминающий линии тока в потоке жидкости (рис.3.2,а). Такие динамические системы

---

[2] Рекуррентная формула – соотношение вида $x_{n+p} = f(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+p-1})$, которое позволяет вычислить любой член последовательности, если заданы ее первые p членов.

называют *потоковыми* или *потоками,* в отличие от *каскадов* – динамических систем, описывающихся точечными отображениями $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})$.

Термины «сечение Пуанкаре» и «отображение Пуанкаре» означают сечение фазового пространства динамической системы множеством на единицу меньшей размерности $D-1$ (например, трехмерного пространства –поверхностью, двухмерного – линией) и отображение множества точек односторонних «проколов» этого сечения фазовой траекторией в себя, которое связывает текущий «прокол» со следующим.

3.1.5. Иллюстративный пример

Проиллюстрируем рассмотренные термины на примере моделирования колебаний *груза на пружине в вязкой среде.* Эталонной моделью малых колебаний в вязкой среде под действием возвращающей силы, пропорциональной отклонению от положения равновесия *x*, является обыкновенное дифференциальное уравнение «линейного осциллятора»:

$$d^2x/dt^2 + 2\delta\, dx/dt + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.2}$$

Аналогично системе (2.1) для однозначного задания траектории этой двухмерной системы необходимо указать начальные значения $x(0) = x_0$ и $dx(0)/dt = v_0$. Аналитическое решение уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_0 \cdot \cos\omega t + \frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega} \sin\omega t] e^{-\delta \cdot t}, \\ v(t) &= [v_0 \cdot \cos\omega t - \frac{\delta \cdot v_0 + \omega_0^2 x_0}{\omega} \sin\omega t] e^{-\delta \cdot t}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Формула (3.3), определяющая связь между начальным состоянием x_0, v_0 и последующим $x(t), v(t)$, есть явное выражение для оператора эволюции, который *задается* уравнением (3.2).

Другой формой записи системы (3.2) является система двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2, \\ dx_2/dt &= -2\delta \cdot x_2 - \omega_0^2 x_1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = dx/dt$. Она удобна для графических представлений, т.к. явно задает поле скоростей на фазовой плоскости (рис.3.2,а). Грубо говоря, делая очень мелкие шаги в направлении стрелок, можно из начального состояния добраться до последующих, что и реализуется с помощью различных алгоритмов при численном решении уравнений. Для построения дискретного аналога уравнений (3.4) требуется перейти к

дискретному времени $n = t/\Delta t$. Для того, чтобы в обозначениях дискретных переменных не запутаться с индексами, переобозначим x_1 как x, а x_2 как v. В простейшем варианте можно приближенно заменить производные на конечные разности $dx(t)/dt \approx (x_{n+1} - x_n)/\Delta t$ и $dv(t)/dt \approx (v_{n+1} - v_n)/\Delta t$ и получить уравнения в конечных разностях, которые переписываются в виде двухмерного отображения последования

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n \Delta t, \\ v_{n+1} &= v_n (1 - 2\delta \cdot \Delta t) - \omega_0^2 x_n \Delta t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

При достаточно малых Δt траектория этого отображения хорошо приближает решение уравнений (3.4), т.е. отображение (3.5) является достаточно *точной разностной схемой*. Если на фазовой плоскости провести сечение Пуанкаре прямой $x_1 = 0$ (осью ординат), то можно установить связь между последовательными «проколами» оси фазовой траекторией (рис.3.2). Получающееся одномерное отображение Пуанкаре имеет вид:

$$v_{n+1} = v_n e^{-\delta \cdot T}, \tag{3.6}$$

где $T = 2\pi/\omega$. Пользуясь (3.5), можно получить более детальную информацию о движении моделируемого объекта, чем с помощью отображения (3.6), которое иллюстрирует лишь факт затухания колебаний. Но в одномерном случае удобно использовать наглядную диаграмму Ламерея, для построения которой на плоскости v_n, v_{n+1} проводят вертикальные линии до графика отображения, а от него – горизонтали до диагонали $v_n = v_{n+1}$ и т.д., как указано на рис.3.2,в.

3.2. Систематизация некоторых видов модельных уравнений

Математиками разработан широкий арсенал средств для динамического описания движений. Чтобы сделать рассмотрение более обозримым, знакомство с ним мы начнем с систематизации по различным признакам. Сначала положим в качестве базового признака описательные возможности аппарата применительно к объектам с различной степенью сложности пространственного устройства. Любой реальный объект в той или иной степени «развит в пространстве». В зависимости от числа и размеров составляющих элементов объекта, от интенсивности их взаимодействия и скорости, с которой это взаимодействие происходит, при моделировании объект может рассматриваться *сосредоточенным* в одной точке пространства или в нескольких точках. Последнее можно рассматривать как простейший вариант «*пространственно-развитой*» конфигурации. Возможно и «вовсе размазанное» (непрерывное)

распределение характеристик объекта в пространстве. В таком случае будем называть объект *распределенным*. Термины «пространственно-развитая система» и «распределенная система» часто используются как синонимы. Мы будем использовать далее термин «пространственно-развитая система» как более общее понятие, частным случаем которого является «распределенная система».

Как *сосредоточенный* в одной точке пространства часто рассматривается объект с однородным пространственным распределением динамических характеристик, когда можно ограничиться рассмотрением их изменения лишь во времени. Это уместно, если возмущение, внесенное в одной точке, достигает других частей системы за время, не существенное по сравнению с временными масштабами рассматриваемых процессов. На языке теории волн это означает, что длина волны возмущения много больше длины объекта. Сосредоточенные системы описывают конечномерными моделями в виде разностных или обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если для однозначного задания произвольного состояния требуется указать континуальное множество значений, то система – распределенная. Классическим аппаратом для моделирования таких систем являются дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Например, при описании движения жидкости отказываются от учета ее молекулярного строения, свойства считают однородно «размазанными» внутри «элементарных объемов» достаточно больших по сравнению с размером молекул, но малых по сравнению с макромасштабами системы (так называемый *мезоскопический* уровень рассмотрения[3]). Такие «объемы» играют роль элементарных частиц, свойства которых меняются в пространстве и времени в соответствии с уравнениями Навье – Стокса. Эти знаменитые уравнения в частных производных представляют собой эталонную бесконечномерную модель гидродинамики.

Пространственно-развитые системы можно представить разделенными на части (элементы), каждая из которых есть система, сосредоточенная в своей точке пространства. Модели таких систем многомерны. Очень часто используют системы связанных отображений или обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения в частных производных. В зависимости от интенсивности связи между элементами системы размерность модели, требуемая для описания движения, и вид

[3] Этот уровень промежуточный между *микроскопическим*, когда слежение ведется за всеми элементами системы (например, молекулами жидкости), и *макроскопическим*, когда система воспринимается только в целом (через средние характеристики).

адекватного аппарата могут существенно меняться. Так, если при охлаждении жидкости она замерзнет, для описания движения образовавшейся льдины уже не потребуются уравнения в частных производных, а будет достаточно системы из нескольких ОДУ для вращательного и поступательного движения твердого тела. Если же имеют место только поступательные движения, то достаточна даже модель материальной точки.

При прохождении по системе сигналов, спектр мощности которых достаточно широк (в частности, коротких импульсов), изменение спектрального состава и сдвиг фаз гармоник выливается в «расплывание» и запаздывание сигнала. «Расплывание» имеет место, если полоса пропускания недостаточна для пропускания всех компонент сигнала, например, из-за инерционности. Так, если использовать δ-воздействие, наличие инерционности приводит к конечной ширине отклика (чем инерционнее система, тем шире отклик), а сдвиг момента его появления на выходе относительно момента поступления является оценкой времени задержки (рис.6.4,в). И инерционность, и задержка моделируются конечномерными моделями, но более естественно явление запаздывания учитывается дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом (ДУЗ). Они бесконечномерны, поскольку требуют задания *начальной кривой* на интервале задержки, т.е. непрерывного множества значений динамической переменной.

В схеме рис.3.3. математические средства моделирования эволюции во времени систематизированы в соответствии с *уровнем общности* (возможности описать с его помощью большее число объектов и вариантов движений). Как правило, за общность приходится платить ростом вычислительных затрат, необходимых для решения и исследования модельных уравнений.

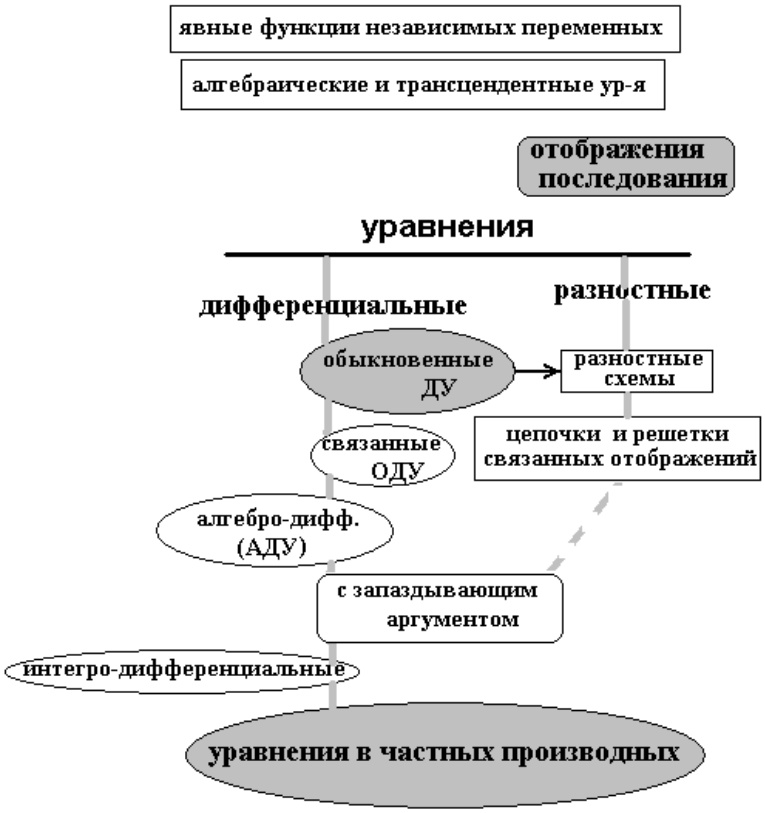

Рис.3.3. Условная схема видов динамических моделей. Снизу вверх описательные возможности и требуемые для исследования вычислительные затраты увеличиваются

Самый простой вид моделей – *функции времени* $\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$. В линейных задачах или в специальных частных случаях такие модели можно получить как *аналитические* решения уравнений эволюции. Несмотря на очень большое число использующихся функций (см. п. 3.3), их возможности для описания сложных (особенно хаотических) временных реализаций весьма ограничены. Чуть более общим случаем являются алгебраические или трансцендентные уравнения

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0\,. \tag{3.7}$$

Если уравнение (3.7) не имеет аналитического решения, то говорят, что оно определяет зависимость $\mathbf{x}(t)$ неявно.

«Левый столбец» обсуждаемой схемы составляют различные дифференциальные уравнения (ДУ). Это уравнения, в которые входят производные от динамических переменных по независимым переменным (по времени t и по пространственным координатам $\mathbf{r}$). Например, уравнение первого порядка имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t,\mathbf{r}), \partial\mathbf{x}(t,\mathbf{r})/\partial t, \partial\mathbf{x}(t,\mathbf{r})/\partial\mathbf{r}, t, \mathbf{r}, \mathbf{c}) = 0\,, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор динамических переменных. Первыми были введены в научную практику ОДУ

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), d\mathbf{x}(t)/dt, ..., d^n\mathbf{x}(t)/dt^n, t, \mathbf{c}) = 0. \qquad (3.9)$$

ОДУ вида $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = 0$ имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Они задают направление и величину скорости изменения состояния объекта $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ в каждой точке конечномерного фазового пространства (*поле скоростей*). В любой точке вектор $\mathbf{v}$ (если он ненулевой) является касательным к фазовой траектории. Задание поля скоростей обеспечивает однозначное предсказание фазовой траектории, стартующей из любого начального состояния, т.е. описание всех возможных движений в фазовом пространстве (рис.3.2,а).

Производные динамических переменных используются в уравнениях нескольких видов, существенно отличающихся по свойствам решений и методам их получения. На рис.3.3 они объединены широкой вертикальной линией, как ветки – стволом дерева. Находящиеся вверху «ствола» ОДУ описывают динамику сосредоточенных (конечномерных) систем, где не требуется учитывать *непрерывное распределение* свойств объекта в пространстве. ДУ в частных производных (ДУЧП), в которых в качестве независимой переменной выступают и пространственные координаты, расположены в самом низу схемы. Они наиболее универсальны, т.к. описывают и бесконечномерные движения в распределенных системах. Но решение ДУЧП требует значительно больших вычислительных ресурсов, чем решение ОДУ. Кроме того, ДУЧП теряют наглядную геометрическую интерпретацию, присущую ОДУ.

Алгебро-дифференциальные уравнения (АДУ) – это объединение ОДУ и алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}(d\mathbf{x}(t)/dt, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t, \mathbf{c}) = 0, \\ &\mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t, \mathbf{c}) = 0, \end{aligned} \qquad (3.10)$$

где $\mathbf{x}$ – D-мерный вектор состояния, $\mathbf{y}$ – K-мерный вектор (не вносит дополнительных степеней свободы в систему), $\mathbf{F}$ – вектор-функция размерности D, $\mathbf{G}$ – вектор-функция размерности K. Второе уравнение – алгебраическое и определяет (быть может, неявную) зависимость $\mathbf{y}(t)$ от $\mathbf{x}(t)$. Методы работы с такими уравнениями очень схожи со случаем ОДУ.

Уравнения с запаздывающим аргументом имеют, например, вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), d\mathbf{x}(t)/dt, \mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{c}) = 0. \qquad (3.11)$$

Отличие от ОДУ состоит в наличии в уравнении значений динамических переменных не только для текущего, но и для прошлого момента времени. ОДУ есть частный случай ДУЗ при нулевом времени запаздывания.

Интегро-дифференциальные уравнения ИДУ не относятся, строго говоря, к классу ДУ. Они включают в себя не только производные, но и интегралы от динамических переменных, например,

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}(t), d\mathbf{x}(t)/dt, ..., d^n\mathbf{x}(t)/dt^n, \int_{-\infty}^{\infty} k(t,t')\mathbf{x}(t')dt', t, \mathbf{c}\right) = 0, \qquad (3.12)$$

где $k(t,t')$ – ядро линейного интегрального преобразования. Если производных нет, то уравнения называются просто интегральными.

ДУЗ и ИДУ также обеспечивают бесконечномерное описание. ДУЗ во многих случаях можно рассматривать как частный случай ИДУ. Например, ИДУ вида $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \int_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau$ в случае $k(t,t') = \delta(t-\tau-t')$ сводится к ДУЗ $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{x}(t-\tau)$.

При построении дискретного аналога уравнений (3.4) переходят к дискретному времени $n = t/\Delta t$ и к конечным разностям. При достаточно малых Δt разностное уравнение (3.5) имеет решение, близкое к решению ДУ (3.4). Но с ростом Δt разностное уравнение (точечное отображение) перестает адекватно отражать свойства исходного ОДУ. Однако можно построить дискретные модели и для больших временных шагов, демонстрирующие хорошее соответствие исходной системе. В рассмотренном примере с осциллятором (рис.3.2) при $\Delta t = T$ последовательные значения v_n, соответствующие выделенным на рис.3.2,а,б точкам, связаны одномерным отображением (3.6), рис.3.2,в. Оно имеет размерность, меньшую размерности исходной системы, и отражает монотонное затухание колебаний и переход к состоянию равновесия, но платой за простоту является потеря информации о поведении системы между отсчетами.

Системы с дискретным и непрерывным временем ценны сами по себе, так что не стоило бы говорить о каких-то приоритетах, но практика моделирования и признание специалистами исторически сложились в пользу ДУ. Это объясняется тем, что до середины XX века физика, которая была в конце этого периода примой на сцене науки, опиралась в основном на ДУ (в частности, линейные ДУЧП) и использовала различные аналитические методы. Вычислительная техника и цифровые методы, для которых аппарат разностных уравнений «родной», еще не имели современного уровня развития, поэтому арсенал отображений, используемых в моделировании, был значительно беднее, чем аналогичные наборы эталонных потоковых систем. Однако современные тенденции все более широкого использования нелинейных уравнений и развитие численных методов исследования многомерных систем со сложным пространственно-временным поведением благоприятствуют прогрессу дискретных подходов. Весьма популярны в настоящее время дискретные модели ансамблей – *решетки связанных отображений*, объединившие в пространственные комплексы большое число

отображений с нетривиальной собственной временной динамикой (см. п. 3.7). Как модели пространственно-развитых систем, они уступают ДУЧП по общности, но несравненно проще для численного исследования. Специфическим вариантом многомерных систем отображений или ОДУ являются *искусственные нейронные сети*, получившие в настоящее время очень широкое распространение и в задачах аппроксимации (см. п. 3.8).

3.3. Явные функциональные зависимости

Динамические модели эволюции в виде функций времени $\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$, могут быть заданы аналитически, графически или таблично и получены любым из описанных в п. 1.5 путей, например, решением ДУ или путем аппроксимации экспериментальных данных (см. п. 7.2). Перечислить все используемые математиками функции не представляется возможным. Но для целей дальнейшего изложения остановимся на зависимостях, которые составляют базовый класс *элементарных функций.* К ним относятся алгебраические многочлены, степенные, рациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Ему же принадлежат функции, получающиеся из перечисленных с помощью четырех арифметических операций и композиции,[4] применяемых конечное число раз. Рассмотрим несколько примеров элементарных функций и ДУ, решениями которых они являются.

1) Линейная функция $x(t) = x_0 + v_0 t$ является решением уравнения

$$dx/dt = v_0, \tag{3.13}$$

которое описывает прямолинейное движение с постоянной скоростью v_0 с начальным условием $x(0) = x_0$. Ее график – прямая линия (рис.3.4,а).

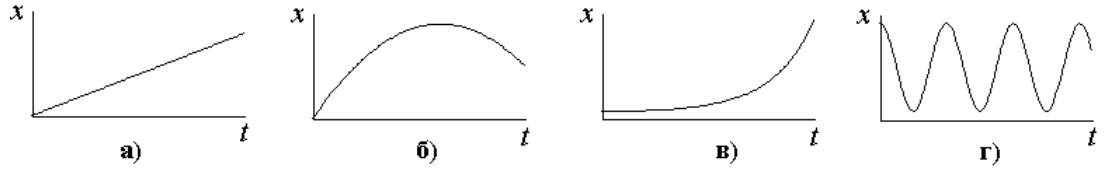

Рис.3.4. Графики некоторых элементарных функций: а) линейной , б) степенной, в) экспоненты с $\alpha > 0$, г) синусоиды

2) Алгебраический многочлен порядка K:

---

[4] «Суперпозиция (композиция) функций – составление из двух функций сложной функции (функции от функции)» [118]. В этом определении термины «суперпозиция» и «композиция» выступают как синонимы. Однако среди физиков суперпозицией функций f_1 и f_2 часто называют их линейную комбинацию $af_1 + bf_2$, где a и b – постоянные. При этом значения терминов «суперпозиция» и «композиция» становятся совсем различными. Для избежания путаницы мы применительно к сложным функциям используем далее только термин «композиция».

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_K t^K , \qquad (3.14)$$

где c_i – постоянные коэффициенты. Он является решением уравнения $d^K x/dt^K = const$. Линейная функция – частный случай (3.14) при $K = 1$. В задаче о равноускоренном движении тела, подброшенного вверх с высоты h с начальной скоростью v_0, уравнение движения (из второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения) имеет вид $d^2x/dt^2 = -g/m$, где ось x направлена вертикально вверх, m – масса тела, g – ускорение свободного падения. Его решение: $x(t) = h + v_0 t - gt^2/2$ (рис.3.4,б). Оно справедливо при отсутствии трения и до тех пор, пока тело не упадет на Землю.

3) Дробно-рациональная функция – это отношение двух алгебраических многочленов $x(t) = P(t)/Q(t)$. Ее частным случаем при $Q(t) = const$ является опять же алгебраический многочлен.

4) Степенная функция $x(t) = t^\alpha$, где α – произвольное действительное число. Если α не целое, то рассматривается только $t > 0$. При целых α это вариант алгебраического многочлена или дробно-рациональной функции.

5) Показательная (экспоненциальная) функция $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ (рис.3.4,в) знаменита тем, что скорость ее изменения пропорциональна самой функции. Она является решением уравнения $dx/dt = \alpha \cdot x$, с начальным условием $x(0) = x_0$, которое описывает, например, динамику численности биологической популяции, а α – постоянный параметр, имеющий смысл рождаемости.[5]

6) Гармоническая функция $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ – одна из семейства тригонометрических функций (рис.3.4,г). Она является решением уравнения гармонического осциллятора $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$ – *эталонной модели* колебаний материальной точки без трения под действием возвращающей силы, пропорциональной отклонению x от положения равновесия. Ее постоянные параметры x_0 – амплитуда колебаний, ω – угловая частота, ϕ_0 – начальная фаза. Гармоническая функция двух переменных $x(t,z) = x_0 \cos(\omega t - kr + \phi_0)$ описывает бегущую вдоль оси r монохроматическую волну длины $\lambda = 2\pi/k$ (рис.3.1,г) и является решением уравнения простой волны $\partial x/\partial t + V\,\partial x/\partial r = 0$.

---

[5] Получающийся при $\alpha > 0$ экспоненциальный рост численности популяции называют мальтузианским ростом, поскольку католический монах Мальтус в XVI в. первым получил этот результат. Он справедлив до тех пор, пока численность популяции не слишком велика, так что можно считать, что пищевых ресурсов хватает всем.

Популярность тригонометрических функций во многом обусловлена тем, что согласно теореме Вейерштрасса любую непрерывную периодическую функцию $x(t)$ можно сколь угодно точно приблизить *тригонометрическим многочленом*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{K} c_k \cos\left(2\pi k/T + \phi_k\right), \tag{3.15}$$

где K – порядок многочлена. Непериодическую функцию можно приблизить с помощью такого многочлена на конечном отрезке.

Аналогичная теорема о возможностях приближения функций была доказана Вейерштрассом и для алгебраического многочлена (3.14). Алгебраический и тригонометрический многочлены широко используются для приближенного описания зависимостей. Это предмет теории аппроксимации (конструктивной теории функций), подробнее см. п.7.2. Конкуренцию им составляют в последние годы искусственные нейронные сети (пп. 3.8, 10.2.1.3), радиальные базисные функции (п. 10.2.1.2) и вейвлеты. Последние получили очень широкое распространение на практике и подробнее рассмотрены в п. 6.4.2.2. Здесь скажем только, что это – хорошо локализованные функции с нулевым средним, например, $x(t) = e^{-t^2/2} - (1/2)e^{-t^2/8}$.

К рассмотрению вопроса о других (не элементарных) функциях и расширениях класса элементарных функций мы вернемся в п. 3.5.

3.4. Линейность и нелинейность

> «Нелинейность всепроникающа и вездесуща, многолика и неисчерпаемо многообразна. Она повсюду: в большом и малом, в явлениях быстротечных и длящихся эпохи… Нелинейность – понятие емкое, с множеством оттенков и градаций. Нелинейность эффекта или явления означает одно, нелинейность теории –другое».
>
> *Ю.А. Данилов. «Нелинейность»* [71]

3.4.1. Линейность и нелинейность функций и уравнений

На чувственном уровне слово «линейный» близко к «прямолинейный», ассоциируется с прямой линией, с пропорциональным изменением причины и следствия, неизменным курсом, графиком в виде прямой, как на рис.3.4,а. Однако, в соответствии с терминологией, принятой в математике и нелинейной динамике, линейными являются все рассмотренные в предыдущем параграфе динамические системы, хотя графики их решений – отнюдь не прямые линии (рис.3.4,б-г). Линейны операторы эволюции этих динамических систем – дифференциальные или

разностные уравнения и отображения последования, *но не их решения* – не функции времени, описывающие временные реализации.

Что же общего во всех представленных в п. 3.3 уравнениях эволюции? Все они подчиняются *принципу суперпозиции*. Если функции независимых переменных $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями уравнения, то и их линейная комбинация $ax_1(t)+bx_2(t)$ – это тоже решение, т.е. будучи подставлена в уравнение вместо $x(t)$, она превращает его в тождество. В правых и левых частях линейных ДУ могут стоять только первые степени динамической переменной и ее производных: x, dx/dt, …, $d^n x/dt^n$. Но там не должно быть их более высоких степеней и произведений. Соответственно, в линейных разностных уравнениях могут стоять только первые степени конечных разностей или значений динамической переменной в дискретные моменты времени. Уравнения любых видов линейны, если отображения, определенные на множестве значений динамических переменных, стоящие слева и справа от знака равенства, линейны. Нарушение этого правила означает нелинейность уравнения. Например, линейны уравнения (3.2), (3.4)-(3.6), (3.13). Нелинейно уравнение (2.1). Заметим, что линейные неавтономные (с явной зависимостью от времени) уравнения могут включать в себя нелинейные функции независимой переменной (времени). Например, неавтономный линейный осциллятор $d^2x/dt^2+2\delta\, dx/dt+\omega_0^2 x=A\cos\omega t$.

Линейная функция «ведет себя» очень просто – монотонно убывает или возрастает с изменением аргумента или является постоянной. Но линейность динамических систем не означает, что демонстрируемые ими движения обязательно примитивны. Это видно даже из нескольких приведенных на рис.3.4 примеров. Учитывая выполнение принципа суперпозиции, для многомерных линейных уравнений с помощью комбинаций степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций, являющихся их решениями, можно подобрать решение в виде очень сложной зависимости от времени, на конечном интервале неотличимой внешне от беспорядочной, хаотической. Но линейные системы «не могут позволить себе» многого: изменения формы колебаний, требующего появления новых гармоник, динамического хаоса (беспорядочных решений с экспоненциальной чувствительностью к малым возмущениям), мультистабильности (наличия нескольких вариантов установившихся движений), и т.д.

Системы, *процессы*, *эффекты*, *явления* классифицируют как *линейные* или *нелинейные*, в зависимости от того, описываются ли они адекватно линейными *уравнениями* или необходимо использовать *уравнения* нелинейные. Мир нелинейных операторов несравненно богаче, чем линейных: нелинейных динамических систем и видов их поведения

несравнимо больше. Место «линейного» в преимущественно нелинейном окружающем мире, «частность» линейных представлений следует хотя бы из того, что нелинейные системы могут быть сведены к линейным – линеаризованы – только при малых амплитудах колебаний (и когда разложение нелинейных функций в ряд Тейлора содержит линейные члены). Для этого требуется заменить в уравнениях динамические переменные x_k на сумму их стационарной и переменной частей $x_k = x_{0,k} + \tilde{x}_k$, где $x_{0,k} >> \tilde{x}_k$, и пренебречь малыми членами – степенями $\tilde{x}_k$ выше первой, произведениями малых и т.д.

Исторически, в докомпьтерную эпоху, линейные уравнения имели неоспоримое преимущество в научной практике над нелинейными, поскольку могли быть строго исследованы и решены аналитически. Долгое время даже существовало устойчивое мнение об относительно большей важности и представленности в природе линейных феноменов и самодостаточности линейных подходов [71]. Развитие вычислительной техники, численных методов решения нелинейных уравнений и возможностей их графического представления, формирование современных математических концепций, в частности, теории динамического хаоса, сместили чашу весов в пользу нелинейных методов и представлений и отношению к линейным ситуациям, как к важному, но частному случаю.

3.4.2. Природа нелинейности

Нелинейность естественна и органично присуща миру, в котором мы существуем, ее природа может быть различной и определяется специфическими свойствами объектов. Скорее надо было бы говорить об условиях проявления линейности, а не нелинейности, но, в соответствии с исторически сложившимися традициями (см. выше п.3.4.1), появление нелинейности часто объясняют конкуренцией собственных мод колебаний линеаризованной системы или зависимостью параметров изначально линейной системы от величины динамической переменной. Последняя зависимость часто жизненно необходима и может реализоваться, например, за счет обратных связей. Если бы чувствительность органов зрения или слуха была бы постоянной и не зависела от уровня воздействия (уровня освещенности или громкости звука), нельзя было бы успешно ориентироваться в сумраке и не слепнуть солнечным днем, слышать шорох подползающей змеи и не глохнуть от грома. «... Биологические системы, которые не смогли охватить громадный диапазон жизненно значимых воздействий среды, попросту вымерли, не выдержав борьбы за существование. На их могилах можно было бы написать: «Они были слишком линейными для этого мира» ([71] со ссылкой на А.М. Молчанова).

Так, если бы коэффициент размножения k в популяции был постоянным и не зависел от численности x_n особей (n – дискретное время), то в соответствии с линейным законом эволюции

$$x_{n+1} = kx_n \tag{3.16}$$

при $k > 1$ с течением времени наблюдался бы ее неограниченный рост. В этом случае было бы неизбежно перенаселение, а при $k < 1$, наоборот, грозило бы полное исчезновение популяции. Более реалистична зависимость параметра k от переменной x_n, например, $k = r(1 - x_n)$, ведущая к нелинейности оператора эволюции: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Нетривиальные, включая хаотические, свойства этой эталонной одномерной динамической системы – логистического отображения – хорошо известны, см. п. 3.6.2.

3.4.3. Иллюстрация на маятниках

Признанными эталонными объектами для иллюстрации линейных и нелинейных колебательных феноменов являются различные маятники – системы, совершающие колебания около положения устойчивого равновесия. Их простейшие механические представители: массивный груз, подвешенный на нити или стержне (рис.3.5,а), груз на пружине (рис.3.5,в), шарик, катающийся в ямке, бутылка, плавающая на воде, жидкость в U–образной трубке и множество других. Электрическим маятником называют цепь, состоящую из конденсатора и катушки индуктивности (колебательный контур, рис.3.5,б). Говорят и о химическом маятнике – смеси химикатов, вступающих в колебательную реакцию, экологическом – двух взаимодействующих популяциях хищников и жертв [163].

Предоставленный самому себе (*собственные* движения) реальный маятник оказывается, в конце концов, в состоянии устойчивого равновесия (рис.3.5). В зависимости от начальных значений динамических переменных (отклонения от положения устойчивого равновесия x и скорости его изменения dx/dt) и свойств объекта этому предшествуют различные варианты движений. На рис.3.5 выделены две области, в которых движения качественно различны: левая, заштрихованная, соответствует относительно большим x, при которых существенна нелинейность, а правая – малым, «линейным». Временные реализации малых колебаний идентичны для всех рассматриваемых маятников: колебания *изохронны* (квазипериод T_1 не зависит от текущего состояния) и близки к затухающей синусоиде – решению линейного уравнения (3.2), описывающего малые колебания всех рассматриваемых систем. Последнее обстоятельство является законным основанием для того, чтобы называть эти колебания линейными. Монотонное затухание колебаний

моделируется и линейным одномерным отображением $x_{n+1} = ax_n$, где $a = \exp(-\delta T_1) < 1$ (рис.3.2,в).

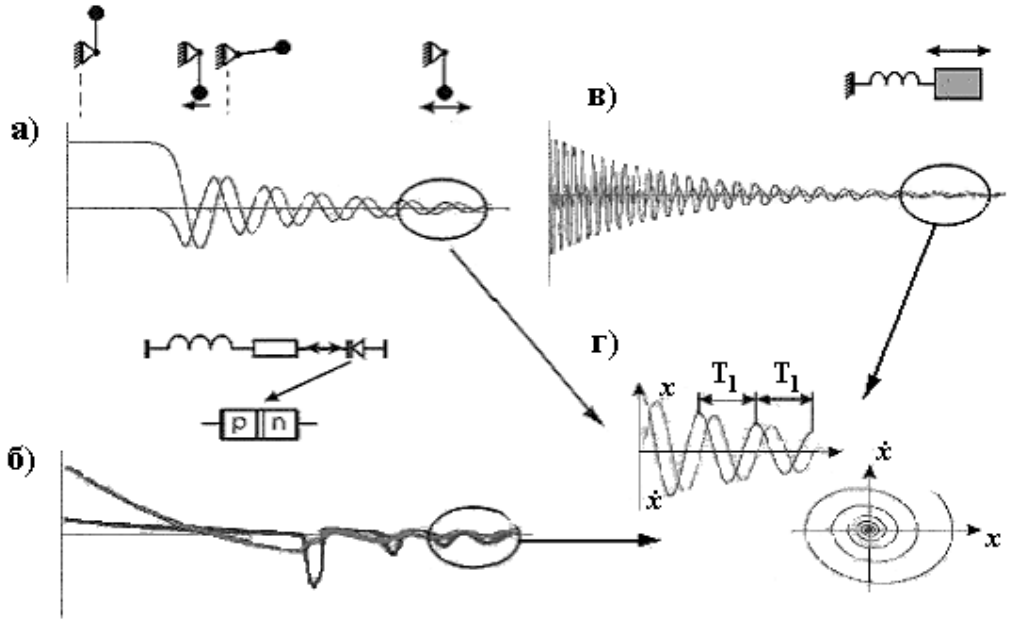

Рис.3.5. Качественный вид временных реализаций x и $\dot{x}$ маятников: груз на стержне (а), колебательный контур с диодом (б), груз на пружине (в). г) Одинаковая для всех примеров линейная стадия колебаний представлена в увеличенном масштабе, для нее приведен и портрет на фазовой плоскости $(x, dx/dt)$: точка, изображающая состояние системы, движется по скручивающейся спирали к аттрактору – точке устойчивого равновесия в начале координат. В области больших значений координат и скоростей фазовые портреты маятников сильно различаются и более замысловаты

По сравнению с единым «стандартом» линейных колебаний (3.2), многообразие типов нелинейного поведения очень велико и определяется свойствами каждого конкретного маятника. Так, в трех примерах на рис.3.5 при полной идентичности линейной стадии (рис.3.5,г) характер участков нелинейного поведения существенно различается. Это связано с особенностями каждого из маятников, с характером их нелинейности – видом зависимости параметров системы от координат и скоростей. Например, в случае маятника на стержне (рис.3.5,а) нелинейность определяется синусоидальной зависимостью момента силы тяжести относительно оси вращения от угла поворота. В электрическом маятнике с полупроводниковым конденсатором (варакторным диодом, рис.3.5,б) она связана со свойствами *p-n* перехода, инжекцией и конечностью времени жизни носителей заряда, а в пружинном маятнике (рис.3.5,в) – обусловлена видом зависимости силы упругости от величины деформации пружины. Например, при сильном сжатии витки пружины смыкаются, так что сила упругости резко возрастает по сравнению с ожидаемой по закону Гука: пружина «становится более жесткой». При этом период колебаний

уменьшается при увеличении их размаха. По аналогии нелинейность любого осциллятора, приводящую к уменьшению (увеличению) периода с ростом амплитуды колебаний, стали называть нелинейностью типа *жесткой* (*мягкой*) *пружины*.

3.5. Модели – обыкновенные дифференциальные уравнения

3.5.1. Виды решений

Появление обыкновенных дифференциальных уравнений и их история связаны с именами Ньютона и Лейбница (XVII-XVIII вв.). Впоследствии в рамках аналитической механики и теории дифференциальных уравнений развивались общие процедуры для получения модельных уравнений и разрабатывались методы их решения.

3.5.1.1. Элементарные решения. Решение дифференциального уравнения в виде элементарной функции называют элементарным решением. Ограничимся для иллюстрации примерами из п.3.3. Во всех примерах функции-решения дают исчерпывающую информацию о динамике модели. Интересно, что в ньютоновские времена понять поведение динамической системы означало именно записать формулу решения $x = F(t)$. Этот подход получил даже название ньютоновской (или лапласовской) парадигмы [291]. Речь шла о конечном (предпочтительно, коротком) выражении, составленном из радикалов (корней *n*-ой степени), дробно-рациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических функций. Все решения, рассмотренные в п. 3.3, имеют такую форму.

Заметим только, что класс элементарных функций (и элементарных решений) часто расширяют, добавляя в него *алгебраические функции* – решения алгебраических уравнений

$$a_n(t)x^n(t) + a_{n-1}(t)x^{n-1}(t) + \ldots + a_1(t)x(t) + a_0(t) = 0, \qquad (3.17)$$

где n – целое, $a_i(t)$ – алгебраические многочлены. Все дробно-рациональные функции и радикалы являются алгебраическими функциями. Обратное – неверно. Например, существуют алгебраические функции, которые неявно задаются уравнением (3.17).

3.5.1.2. Решения в замкнутой форме. Далеко не все уравнения имеют элементарные решения. Существуют элементарные функции, интегралы с переменным верхним пределом от которых не являются элементарными функциями. Один из самых простых примеров – эллиптический интеграл $\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau^4}}$. Интеграл существует, но это не элементарная функция. Он

является решением простого ДУ $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$. Однако, даже если интеграл от элементарной функции и не является элементарной функцией, с ним можно эффективно работать – его значения можно вычислить приближенно с помощью известных численных методик.

Выражение решения в виде формул, содержащих интегралы от элементарных функций, называется *интегрированием в квадратурах* и также считается полным решением уравнения. Так, решение уравнения

$$dx/dt + e^{t^2} x = 0 \tag{3.18}$$

при $x(0) = x_0$ имеет вид $x(t) = x_0 \exp\left(-\int_0^t e^{\tau^2} d\tau \right)$. Результат называют решением *в замкнутой форме*. Элементарное решение – его частный случай.

Уже Лиувилль показал, что некоторые ДУ не имеют решений в замкнутой форме. Например, очень простое внешне уравнение

$$dx/dt + x^2 = t \tag{3.19}$$

не решается в квадратурах. Решение существует, но не может быть выражено в замкнутой форме. Общей процедуры для нахождения решения в замкнутой форме нет, хотя разработано очень много частных методов. Получить решение в замкнутой форме зачастую очень трудно или вовсе невозможно.

3.5.1.3. Аналитические решения. Когда решение в замкнутой форме отсутствует, можно сделать следующий шаг на пути усложнения методики и пытаться найти решение в виде бесконечного степенного ряда. Например, будем искать решение уравнения

$$d^2x/dt^2 - 2t\, dx/dt - 2x = 0 \tag{3.20}$$

в виде

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \,. \tag{3.21}$$

Подставим эту формулу в исходное уравнение и сгруппируем члены с одинаковыми степенями при t. Приравняем нулю отдельно каждое слагаемое. В итоге получим рекурсивное соотношение между коэффициентами: $a_{n+2} = 2a_n / n + 2$. Коэффициенты a_0 и a_1 определяются начальными условиями. Так, для $a_0 = 1$ и $a_1 = 0$ получим

$$x(t) = 1 + t^2 + t^4/2! + t^6/3! + \ldots \,. \tag{3.22}$$

Можно заметить, что в этом частном случае мы получили в ответе ряд Тейлора для функции $x(t) = e^{t^2}$. Если полученный степенной ряд сходится, что бывает не всегда, и найдена формула для коэффициентов, то такое решение называется *аналитическим решением* или решением в виде ряда. Оно считается «лучшим» после решений в замкнутой форме. Но если построенный ряд сходится медленно, то его практическое использование не реально. В частности, такая ситуация имеет место в знаменитой задаче трех тел, которая имеет практически бесполезное аналитическое решение в виде очень медленно сходящегося ряда [336].

3.5.1.4. Численные решения. Обратите внимание, что предметом забот в только что рассмотренных разделах были сравнительно простые уравнения с явной зависимостью от времени и элементарной нелинейностью. В общем случае, когда задача не сводится к линейной или некоторому избранному классу уравнений, решение ищут приближенно численными методами (при заданных начальных и граничных условиях). Первым и наиболее простым методом решения ДУ был метод Эйлера, на идею которого так или иначе опираются все более точные и сложные современные методы. Очень популярны методы Рунге – Кутты. Из других следует упомянуть методы Адамса и Булирша – Штоера, имеющие свои преимущества и недостатки, но чаще превосходящие методы Рунге – Кутты по скорости работы и точности решения [289, 85, 153].

Согласно упомянутой ньютоновской парадигме численное решение было вовсе не удовлетворительно, поскольку оно не позволяло понять качественные черты динамики, и могло быть полезно только для целей прогноза поведения системы. Этот взгляд изменился с появлением мощных компьютеров и богатых средств компьютерной графики, которые позволяют нам сегодня составить как качественное представление о поведении модели, так и вычислить достаточно точно приближенное решение. Поскольку численно можно исследовать эффективно очень широкий класс нелинейных уравнений, то в настоящее время все большее внимание исследователей уделяется вопросами получения модельных ДУ.

Возможно использование любого из четырех путей, упомянутых в п. 1.5. В связи с тем, что большинство известных в физике законов природы имеют форму ДУ, да и сам аппарат ДУ был создан для описания фундаментальных закономерностей механики, наиболее популярным методом их получения можно считать путь *от общего к частному.* Большинство моделей, рассматриваемых физиками, – асимптотические, полученные через ограничения, вводимые в универсальные формулировки с учетом специфики задачи. Иногда говорят, что модель получают «из первых принципов», имея в виду под первыми принципами некоторые общие соотношения для рассматриваемой области явлений, из которых

выводятся конкретные модели (хотя термин «первые принципы» в таком употреблении критикуется с позиций философии). Это – законы сохранения, уравнения непрерывности, законы Ньютона в механике, уравнения Навье – Стокса в гидродинамике, уравнения Максвелла в электродинамике, производные от них более частные правила типа уравнений Кирхгофа в теории электрических цепей, и т.д. Массу нестандартных примеров асимптотического моделирования практически важных физических и биологических объектов можно найти, например, в учебнике известного математика, специалиста по моделированию Ю.И. Неймарка [127].

Эмпирический подход к получению модельных ДУ (реконструкция по временным рядам) рассматривается во второй части книги. Моделирование по пути «от простого к сложному» – *создание ансамблей* – типично при использовании аппарата ДУ. Оно широко используется для описания пространственно развитых систем и позволяет охватить тем более широкий класс явлений, чем больше элементов включено в ансамбль. Классическими примерами могут служить ансамбли связанных осцилляторов – проверенный путь последовательного усложнения рассматриваемых явлений в учебниках по теории колебаний.

3.5.2. Популярный класс модельных уравнений – осцилляторы

Выбирая показательный пример описательных возможностей моделей с оператором эволюции, заданным дифференциальными уравнениями, мы вновь остановились на классе осцилляторов. Почему столь однообразен выбор из «моря» моделей? Дело в том, что сколько бы различных примеров объектов или классов систем мы ни рассматривали, это не охватит всего специфического, что могут демонстрировать ДУ. Все равно представленное будет лишь фрагментом общей картины, но действительно общее будет присутствовать и в нем. Поэтому из методических соображений есть смысл обратиться к примеру, предыстория и базовая информация о котором имеется у широкой аудитории (первое знакомство с ним у многих состоялось на школьных уроках физики).

Осцилляторами называют и *объекты*, способные совершать колебания около положения равновесия (осцилляции) и *уравнения*, моделирующие их движения. Движение осциллятора происходит в некоторой потенциальной яме при наличии трения или без него. Эталонным уравнением осциллятора является ДУ второго порядка:

$$d^2x/dt^2 + \gamma(x, dx/dt)\,dx/dt + f(x) = F(t), \qquad (3.23)$$

где второе слагаемое в левой части связано с диссипацией (силами трения), третье – с потенциалом *U(x)* и потенциальной силой $-\partial U/\partial x = -f(x)$, а правая часть представляет собой внешнюю силу. Исследованию различных

видов осцилляторов посвящена масса статей, обзоров, диссертаций, см., например, [300, 340]. Линейные диссипативные осцилляторы, для которых $\gamma = const$ и $f(x) = \omega_0^2 x$ (последнее означает квадратичность потенциальной ямы $U(x) \sim x^2$), в отсутствие внешнего воздействия демонстрируют только затухающие (при $\gamma > 0$) или, наоборот, неограниченно нарастающие (при $\gamma < 0$) собственные колебания. При наличии периодического внешнего воздействия устанавливаются периодические колебания с периодом воздействия и наблюдается явление резонанса. При наличии нелинейности в диссипативном члене, например, как в уравнении Ван дер Поля:

$$d^2x/dt^2 - \alpha(1 - \beta x^2)\,dx/dt + \omega_0^2 x = 0\,, \qquad (3.24)$$

осциллятор приобретает способность к собственным периодическим колебаниям (режим автоколебаний), а в неавтономном варианте – демонстрирует квазипериодические колебания или синхронизацию автоколебаний внешним сигналом.

Отличие потенциальной ямы от квадратичной тоже приводит к нелинейности уравнения и существенному расширению видов его решений. Даже при гармоническом воздействии нелинейный осциллятор способен демонстрировать целую иерархию колебательных режимов и нелинейных феноменов, таких как переход к хаосу, мультистабильность, гистерезис в области резонанса. Специфические свойства различных нелинейных осцилляторов определяются конкретным видом входящих в уравнение (3.23) функций. Для выявления общего проводятся систематизации: по зависимости периода колебаний от амплитуды – осцилляторы с «мягкой» или «жесткой пружинами» [300, 129, 325], по порядкам многочленов, задающих потенциальную яму, как в теории катастроф [103, 261], и т.д.

При уровнях диссипации, исключающих автоколебания, или силах воздействия, подавляющих автоколебания, для структуры пространства управляющих параметров этих систем в режимах вынужденных движений типично наличие в пространстве параметров конфигураций бифуркационных множеств, получивших в работах [205, 275] название «crossroad area» («перекресток» – пересекаются области существования двух циклов, ограничивающие эти области линии удвоения периода идут вдоль границ «клюва», образованного линиями седло-узловых переходов, внутри которого имеет место бистабильность) и «spring area» («завиток» – линия удвоения, идущая вдоль упомянутого «клюва» делает характерный оборот вокруг точки, куда упирается клюв, точки катастрофы «сборка»), рис.3.6. Эти универсальные конфигурации самоподобно заполняют пространство параметров системы [282, 300]. Фрагмент типичной картины в пространстве параметров просматривается уже на рис.3.6: правая

структура spring area, образованная на базе цикла удвоенного периода, «встроена» в аналогичную верхнюю структуру, но на базе цикла-«прародителя», который удвоился при движении по плоскости параметров вниз. См. также структуры на карте режимов рис.3.11.

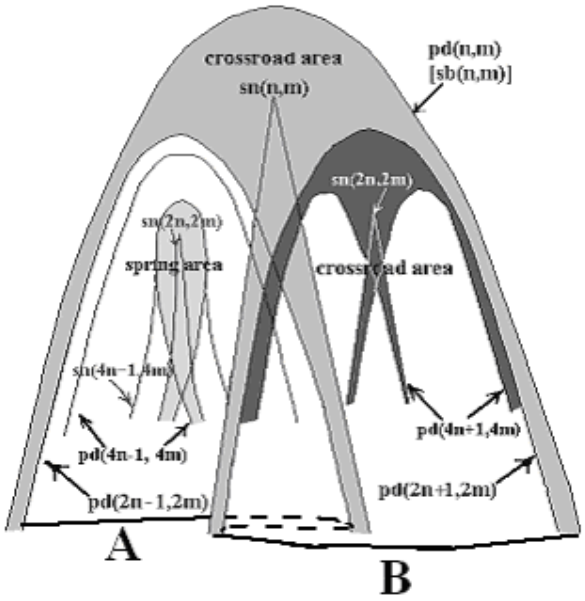

Рис.3.6. Типичные конфигурации бифуркационных линий – *crossroad area* и *spring area* на плоскости параметров. Области устойчивости циклов выделены оттенками серого цвета. Линии бифуркации седло-узел обозначены *sn,* бифуркации удвоения периода – *pd*, потери симметрии – *sb*. В скобках указаны отношения числа периодов внешнего воздействия *n* к числу квазипериодов собственных колебаний *m*, «укладывающихся» на периоде цикла, теряющего устойчивость на данной линии. А и В – условные листы, используемые для выделения бистабильности

Представленные самоподобные типовые конфигурации не исчерпывают разнообразия возможных бифуркационных структур в пространствах параметров осцилляторов. Например в пространстве параметров осцилляторов с сильной диссипацией и потенциальной ямой, существенно отличающейся от квадратичной, имеет место специфическая конфигурации области существования и эволюции к хаосу любого колебательного режима в виде далеко отходящих от основной узкой области фрагментов – «уха», рис.3.7. Уравнение возбуждаемого гармонической внешней силой осциллятора с потенциалом Тоды, для которого получена описываемая структура пространства параметров внешнего воздействия, имеет вид:

$$d^2x/dt^2 + \gamma\, dx/dt + e^x - 1 = A\sin\omega t\,. \qquad (3.25)$$

Обозначим нормированную частоту воздействия $N = \omega/\omega_0$, где ω_0 – частота малых собственных колебаний. Для системы (3.25) $\omega_0 = 1$.

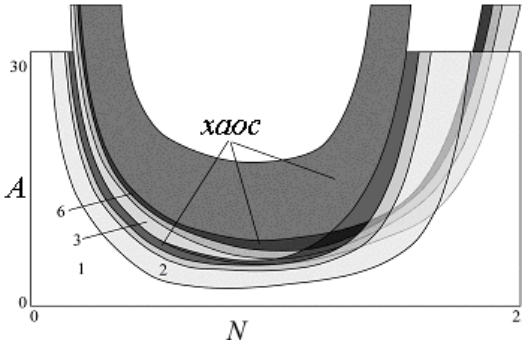

Рис.3.7. Плоскость параметров A – N осциллятора Тоды (3.25): A – амплитуда воздействия, N – нормированная частота воздействия. Цветом показаны области существования различных режимов. Цифры – период колебаний в единицах

Еще с одной универсальной конфигурацией бифуркационных множеств в пространстве управляющих параметров неавтономных осцилляторов, можно познакомиться ниже в п. 3.6, где на рис.3.9,б представлена плоскость параметров для отображения окружности. Она соответствует ситуации, когда периодическое воздействие оказывается на осциллятор, способный совершать автоколебания. Универсальная конфигурация в пространстве параметров воздействия представляет собой иерархию клювообразных областей, известных как «языки Арнольда», где имеет место синхронизация. Бифуркационные линии внутри клюва имеют структуру crossroad area.

В качестве «сухого остатка» от этого параграфа подчеркнем

1) большое разнообразие эволюционных феноменов, которые могут моделироваться уравнениями осцилляторов и ОДУ вообще;

2) сложность наблюдаемых картин, которые можно пытаться систематизировать и расшифровывать, опираясь на результаты уже проведенных исследований, в чем могут помочь «карты» типовых ситуаций и учет закономерностей подобия («скейлинга»), с которыми удобно познакомиться по [282, 300, 103, 129, 102, 101,340];

3) возможность обнаружения новых конфигураций и специфических особенностей для других видов нелинейностей.

3.5.3. «Стандартная форма» обыкновенных дифференциальных уравнений

При всем многообразии видов ОДУ наиболее популярной и имеющей простое геометрическое толкование является следующая форма записи

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= F_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ dx_2/dt &= F_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ &..., \\ dx_n/dt &= F_n(x_1, x_2, ..., x_n). \end{aligned} \tag{3.26}$$

К этой форме можно привести любую систему ОДУ, разрешенную относительно старших производных, даже если она содержит явную зависимость от времени. Систему (3.26) путем замены переменных (быть может, за счет увеличения размерности) можно привести к виду

$$\begin{aligned} &dy_1/dt = y_2, \\ &dy_2/dt = y_3, \\ &\quad ..., \\ &dy_D/dt = F(y_1, y_2, ..., y_D), \end{aligned} \tag{3.27}$$

где y_1 – произвольная гладкая функция вектора **x**: $y_1 = h(x_1, x_2, ..., x_n)$, например, $y_1 = x_1$. Форма (3.27) иногда называется *стандартной* [232, 233] и широко используется при эмпирическом моделировании с восстановлением вектора состояния по скалярной наблюдаемой методом последовательного дифференцирования (п. 10.2.2). Но не всегда можно получить функцию F в (3.27) в явном виде. Возможность приведения любой системы ОДУ к форме (3.27) доказана голландским математиком Флорисом Такенсом. Условия теорем и некоторые комментарии представлены в п. 10.1.1.

Проиллюстрируем сведение к этим формам на примере уравнения диссипативного осциллятора под силовым гармоническим воздействием

$$d^2x/dt^2 + \gamma\, dx/dt + f(x) = A\cos(\omega t)\,. \tag{3.28}$$

Уравнение (3.28) с $\gamma = const$ можно представить в виде двухмерной неавтономной системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -\gamma x_2 - f(x_1) + A\cos(\omega t), \end{aligned} \tag{3.29}$$

где $x_1 = x$, или трехмерной автономной системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -\gamma_0 x_2 - f_0(x_1) + A\cdot\cos x_3, \\ &\dot{x}_3 = \omega, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $x_1 = x$, $x_3 = \omega t$, или четырехмерной «стандартной» системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = x_4, \\ &\dot{x}_4 = -\gamma_0 x_4 + \left(\frac{df(x_1)}{dx_1} - \omega\right)x_3 + \frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2}x_2^2 - \omega^2\gamma x_2 + \omega^2 f(x_1), \end{aligned} \tag{3.31}$$

где $x_1 = x$. Для получения формулы (3.31) уравнение (3.28) следует дважды продифференцировать по времени и подставить в полученное уравнение вместо $A\cos(\omega t)$ левую часть исходного уравнения. Обратите внимание, что при этом, кроме увеличения числа динамических переменных модели, усложнился вид функции в правой части последнего уравнения по сравнению с исходной формой. Но зато все динамические переменные связаны только с величиной x (это ее производные), что имеет существенные преимущества при построении такой модели по временной реализации x.

3.6. Модели – точечные отображения

3.6.1. Введение

Как и ДУ, отображения последования представляют собой «слой» математической культуры со своей историей и спецификой [128]. В данном разделе мы представим специализированное введение, ориентированное на приложения этого аппарата для моделирования по временным рядам.

Весьма распространенным методом получения модельных отображений является аппроксимация дискретных последовательностей экспериментальных данных. При асимптотическом моделировании отображения чаще всего появляются в результате перехода от ДУ к разностным схемам или в результате дискретизации решений этих уравнений, например, с помощью сечений Пуанкаре, о чем уже шла речь в п. 3.1. Создание ансамблей отображений – популярный путь построения моделей пространственно развитых систем. Обычно такие модели имеют вид цепочек или решеток отображений с различной архитектурой связей (локальные связи – только между «соседями», глобальные – «все со всеми», и т.д.).

Простота численного исследования, наглядность и возможность графического «решения» в одномерном случае (п. 3.1), разнообразие режимов поведения (от равновесия до хаоса) даже простых одномерных отображений, удобство создания ансамблей из простых базовых элементов, как из кирпичиков, сделали отображения, пожалуй, доминирующим математическим аппаратом нелинейной динамики – полноценным конкурентом потоковых систем. Рассмотрим некоторые эталонные отображения.

3.6.2. Эталонные нелинейные отображения

3.6.2.1. Кусочно-линейные отображения. Наиболее простыми после линейного отображения (3.16), которое демонстрирует только монотонное

нарастание или убывание значения переменной, по всей видимости, являются кусочно-линейные отображения. Рассмотрим три варианта, имеющих познавательную и прикладную ценность.

1) «*Зуб пилы*» – отображение $x_{n+1} = \{2x_n\}$, где фигурные скобки означают дробную часть числа. Его график приведен на рис.3.8,а. Это отображение замечательно тем, что позволяет строго и наглядно доказать наличие динамического хаоса в простых нелинейных системах. При итерации чисел, заданных в двоичной системе счисления, отображение за один шаг реализует сдвиг точки, разделяющей целую и дробную части, на один знак вправо (сдвиг Бернулли) и отбрасывание целой части. Для иллюстрации присущей хаотическим движениям беспорядочности и «сверхчувствительности» к малым возмущениям зададим начальное значение в виде бесконечной непериодической двоичной дроби, например, x_0 = 0.0100101010001010010001011010... (иррациональное число). Тогда генерируемая отображением последовательность x_n также непериодическая, а изменение x_0, сделанное в знаке, сколь угодно далеком от разделяющей точки (т.е. сколь угодно малое), через конечное число шагов приведет к изменениям значения x_n порядка 1.

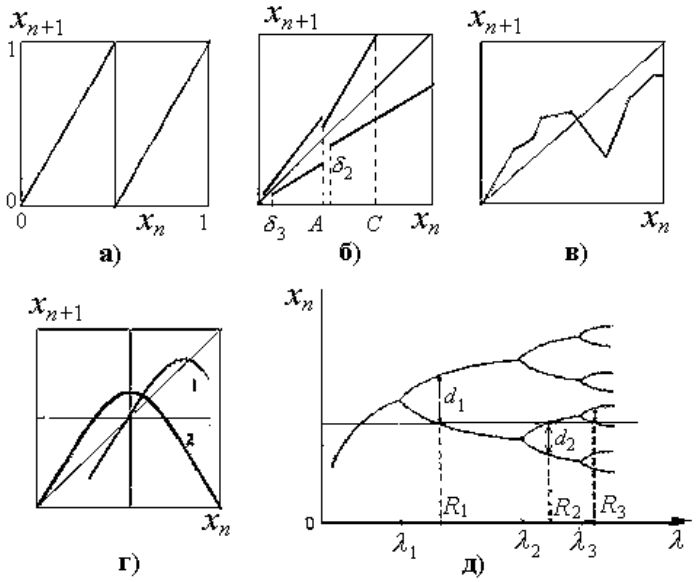

Рис.3.8. Одномерные отображения : а) «зуб пилы», б) модель нейрона, в) отображение для записи информации, г) квадратичное отображение с различным положением максимума, д) «дерево Фейгенбаума» для квадратичного отображения

2) «*Модель нейрона*». Моделирование динамики нейронов – задача, актуальная не только в биофизике, но и в теории колебаний и нелинейной динамике, см., например, работы [245, 82, 83, 130, 255], где рассматриваются, главным образом, модельные ОДУ. Но в последнее время развиваются и модели в виде отображений, численное исследование динамики которых требует меньших затрат машинного времени, а потому

расширяются возможности моделирования больших ансамблей связанных нейронов. Предложены простые модельные отображения, способные, в частности, генерировать «спайки» и «берсты» (т.е. отдельные короткие импульсы и «пачки» импульсов). В числе пионерских работ в этом направлении, рассматривающих двухмерное кусочно-гладкое отображение, следует указать статьи [296]. Кусочно-линейное отображение, предложенное в [2] (см. график на рис.3.8,б) также способно демонстрировать упомянутые черты динамики. Оно двухмерно, поэтому изображенная зависимость x_{n+1} от x_n неоднозначна: выбор ветви «регулируется» второй переменной модели y (громоздкие уравнения мы здесь не приводим).

3) *Отображения для записи и обработки информации* (рис.3.8,в). Этот пример иллюстрирует возможности практического использования кусочно-линейных отображений – реализацию записи информации с помощью множества генерируемых ими циклов [75, 3]. Причем авторами этого подхода уже реализованы и внедрены программные продукты, позволяющие запоминать и избирательно обрабатывать с помощью одного отображения объемы информации, сравнимые с хранящимися в больших библиотеках (см. сайт [343]).

3.6.2.2. Одномерное квадратичное отображение. Наиболее естественный и представленный в природе вид нелинейности – квадратичный – отражается целым классом одномерных отображений $x_{n+1} = f(x_n)$, характеризующихся наличием у функции f квадратичного максимума. Наиболее «именитый» представитель этого класса – логистическое отображение (рис.3.8,г, кривая 1):

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)\,. \tag{3.32}$$

В динамике популяций параметр r играет роль коэффициента размножения. К логистическому отображению сводится, например, и закономерность роста накоплений на счете в банке с «плавающим» процентом, введенным из соображений недопущения неограниченного обогащения вкладчиков [176]. Так, если x_n – сумма на банковском счете в n-ом году, а годовой процент $\varepsilon = const$, то при простом проценте сумма на счете в следующий год составит $x_{n+1} = (1+\varepsilon)x_n$ и будет неограниченно расти. При этом малый начальный вклад не обещает существенных изменений благосостояния вкладчика в ближайшие годы по сравнению с хорошими перспективами того, на чей счет положена солидная начальная сумма. Если из «соображений справедливости» ввести плавающий процент, то получим отображение $x_{n+1} = \varepsilon_0(1 - x_n/x_{\max})x_n$, которое заменой переменных $z_n = x_n\varepsilon_0 / x_{\max}(1+\varepsilon_0)$. сводится к логистическому с

параметром $r = x_{\max}(1+\varepsilon_0)^2/\varepsilon_0$. Перечисление подобных примеров из разных областей знаний можно было бы продолжить. Любое отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ с многочленом f второго порядка, может быть сведено к форме (3.32) или к другой часто рассматривающейся форме $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$ (рис.3.8,г, кривая 2). Среди «заслуг» квадратичного отображения выделим следующие:

1) обнаружение на его примере сценария перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода и описание М. Фейгенбаумом универсальных закономерностей на пороге перехода к хаосу [165, 100]. На рис.3.8,д представлено известное «дерево Фейгенбаума» – зависимость установившихся после некоторого переходного процесса значений динамической переменной x_n от значений параметра λ. Универсальными оказались, в частности, соотношения между бифуркационными значениями параметров в окрестности точки перехода к хаосу λ_∞. Так, при $n >> 1$ бифуркационные значения параметра подчиняются правилу $\lambda_n = \lambda_\infty - const \cdot \delta^{-n}$, где $\delta = 4{,}6692016091\ldots$;

2) оно является базовым элементом для построения моделей нелинейных систем в виде цепочек и решеток [102] и для иллюстрации явлений при периодическом и квазипериодическом внешнем воздействии [29];

3) на нем продемонстрированы явления гистерезиса и потери симметрии при быстрых переходах параметра через точку бифуркации [49].

3.6.2.3. Отображение окружности. Это одномерное отображение:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + (k/2\pi)\sin\theta_n \ \ (\mathrm{mod}\, 2\pi), \tag{3.33}$$

график которого представлен на рис.3.9,а. Возможна физическая интерпретация этого отображения. При некоторых допущениях к нему сводятся модельные ДУ автоколебательной системы, на которую действуют периодические импульсы. Аттрактором в фазовом пространстве исходной системы может быть тор, а отображение (3.33) можно рассматривать как отображение Пуанкаре при поперечном сечении тора плоскостью [104].

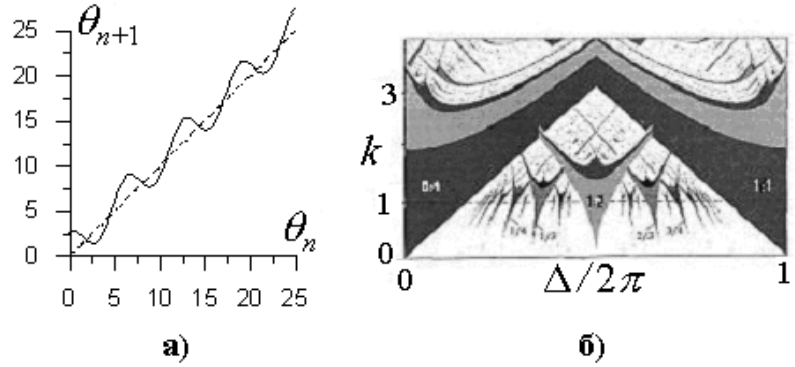

Рис.3.9. График отображения окружности (3.33) без вычитания из Θ величины 2π (а) и плоскость параметров (k, Δ), на которой различными оттенками серого выделены области периодических режимов, а белыми – области квазипериодики и хаоса (б)

В сечении тора изображающая точка «нарисует» при последовательных «проколах» замкнутую кривую, точкам которой можно приписать угловую координату θ_n, где n – номер прокола. Параметр Δ определяется отношением периодов обхода по «большой» и «малой» окружностям (соотношением частот автономной автоколебательной системы и воздействия), k характеризует амплитуду воздействия. Структура плоскости параметров системы (3.33) представлена на рис.3.9,б. Различными тонами серого цвета выделены области периодических движений. В различных сужающихся к низу областях параметров, похожих на клювы, имеют место периодические режимы, означающие синхронизацию автоколебаний внешним сигналом (они названы «языки Арнольда» в знак признания заслуг советского математика В.И. Арнольда по исследованию рассматриваемых феноменов). При этом траектория на торе замыкается. Различные языки соответствуют различным значениям числа вращения – числа оборотов изображающей точки по малой окружности за один оборот по большой окружности. Динамика отображения окружности подробно изучена, в частности, обнаружена характерная зависимость суммарной ширины интервалов синхронизации (языков) от k, закономерности появления областей хаоса, и т.д.

3.6.2.4. Отображение неизохронного нелинейного осциллятора при диссипативном импульсном возбуждении. На рис.3.10,а приведен график одномерного многопараметрического отображения [32]

$$x_{n+1} = x_n e^{-d/N} \cos\left(2\pi/\left(N(1+\beta x_n)\right)\right) + A\,. \qquad (3.34)$$

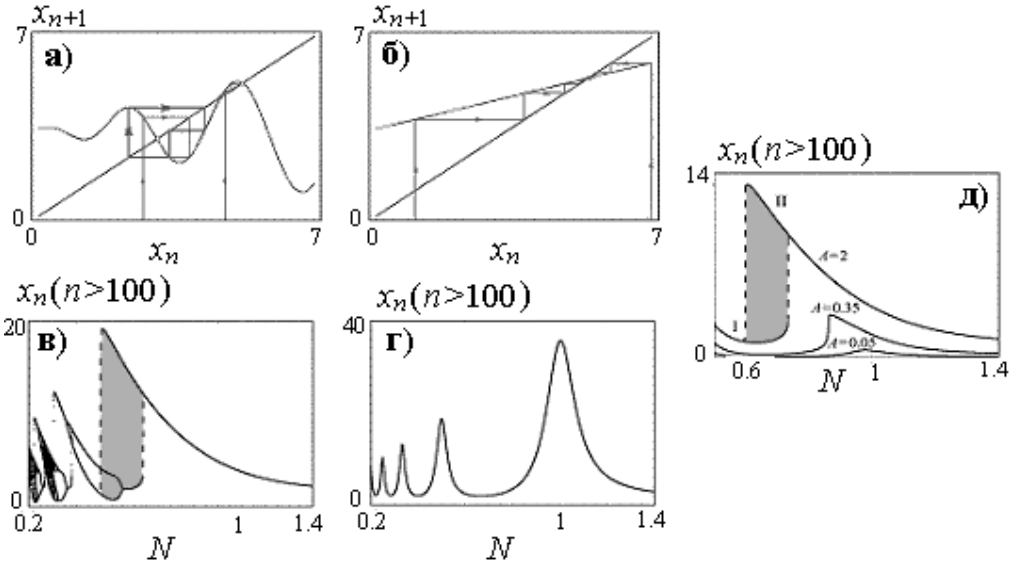

Рис.3.10. Результаты исследования отображения (3.34). Его графики и диаграммы Ламерея при $A = 3.4$, $N = 0.1$, $d = 0.1$ и значениях $\beta = 0.05$ (а) и $\beta = 0$ (б). Бифуркационные диаграммы $x_n(N)$, построенные для $\beta = 0.05$ (в) и $\beta = 0$ (г), могут быть истолкованы и как резонансные кривые. Участки однозначности соответствуют колебаниям периода 1, раздвоение линий означает удвоение периода, «размазанные» участки – хаос. Резонансные кривые при различных значениях A показывают переход от линейного резонанса к нелинейному (д). Закрашена область бистабильности и гистерезиса

Идею его получения и смысл четырех его параметров иллюстрирует рис.3.14,в, где приведена временная реализация колебаний около положения равновесия диссипативного осциллятора, например, математического маятника, периодически возбуждаемого специфическим образом. А именно, груз отводят в направлении оси x на одинаковое расстояние A, после чего маятнику предоставляют возможность колебаться с одинаковой начальной фазой. Например, груз хватают рукой и отпускают с нулевой начальной скоростью. В случае электрического маятника – RL-диод цепи, представленной на рис.3.5,б, – подобное возбуждение реализуется импульсами тока прямой для диода полярности. При этом большая активная проводимость диода быстро гасит собственные колебания, так что начальная фаза собственных колебаний от импульса к импульсу почти не меняется (рис.3.14,а). Если квазипериод T во время собственных экспоненциально затухающих колебаний $x(t) = x_n e^{-\delta \cdot t} \cos(2\pi t/T)$ считать постоянным между импульсами воздействия, а неизохронность упрощенно учесть зависимостью T от начальной амплитуды $T = T_0(1 + \beta x_n)$, где x_n – стартовое значение в n-ом цуге собственных колебаний (после n-го импульса), то отображение последования приобретает вид (3.34). Здесь A – амплитуда импульса воздействия, $N = T_0/T$ – нормированная частота, $d = \delta \cdot T_0$ – коэффициент

диссипации, β – коэффициент нелинейности (для «мягкой пружины» положителен, для «жесткой» – отрицателен).

Рассматриваемое отображение, несмотря на одномерность и относительную простоту (см. демонстрационную программу на сайте [347]), обнаруживает практически все нелинейные феномены, присущие маломерным нелинейным динамическим системам: множество колебательных режимов на базе различных видов колебаний (мод), линейный и нелинейный резонансы, би- и мультистабильность, сложность и фрактальность бассейнов притяжения аттракторов, гистерезис, динамический хаос (см. рис.3.10 и 3.11, а также [143]).

Отображения большей размерности способны демонстрировать еще более разнообразную динамику, но и того, что продемонстрировано на одномерных примерах, достаточно для формирования весьма серьезного отношения к этому виду математического аппарата.

3.6.3. Место дискретных моделей

Рассмотрим этот вопрос на конкретном примере. В 1981 году Дж. Линсей опубликовал сообщение о наблюдении динамического хаоса в очень доступной (недорогой) и популярной системе – цепи с катушкой индуктивности и варакторным диодом, возбуждаемой гармонической э.д.с. [270]. С тех пор свернутый в катушку кусок проволоки и кусочек полупроводника с контактами активно используются для экспериментальной демонстрации нелинейных феноменов, а в одной из статей в известном научно-популярном журнале «Scientific American» даже проскочила шуточная рекомендация иметь их «в каждом доме на подоконнике».[6] На примере этого объекта продемонстрируем возможности дискретных моделей.

[6] Диод с *p*-*n*-переходом, емкостные свойства которого зависят от напряжения на диоде, – электрически перестраиваемый конденсатор, детали см. в [33] на сайте [347]. Цепи с такими диодами уже больше полувека используются в радиотехнике, и даже предлагались в качестве запоминающих элементов ЭВМ. Колебательный контур с диодом в различных вариантах представлен в любом современном радиоприемнике и телевизоре.

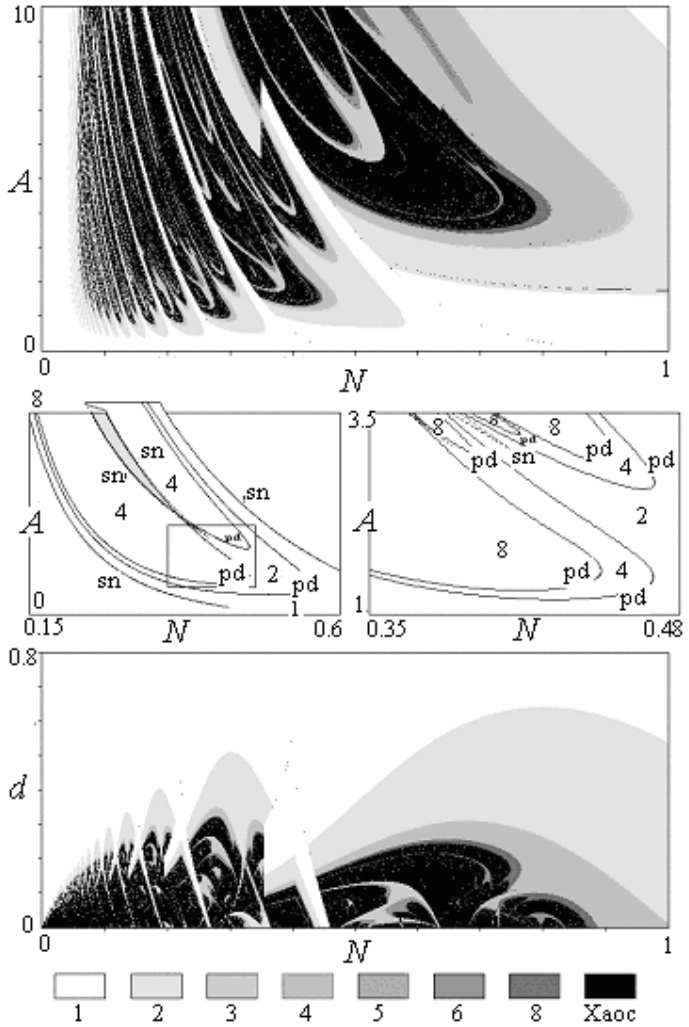

Рис.3.11. Карта режимов модели (3.34) на плоскостях параметров *A–N* и *d–N*. Серыми полутонами выделены области колебаний, период которых указан цифрами внизу рисунка. Одному оттенку могут соответствовать различные движения одинакового периода или хаос на базе разных циклов. На границах областей происходят бифуркации. Ситуацию в областях би- и мультистабильности отражает фрагмент в середине рисунка. Здесь использован способ изображения области существования и эволюции определенного цикла на отдельном листе: sn – границы листов, pd – линии бифуркаций удвоения периода. Наложение двух листов соответствует бистабильности и гистерезису

3.6.3.1. Начнем с «предков» объекта. Цепь, состоящая из катушки индуктивности и конденсатора (колебательный контур), – электрический аналог механического маятника. Аналогично тому, как свойства механического маятника определяются его формой и

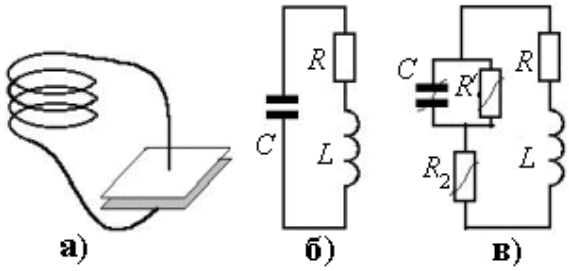

Рис.3.12. Простейший колебательный контур (а) и его эквивалентная схема (б). Эквивалентная схема цепи, в которой роль конденсатора исполняет диод, представленный совокупностью нелинейных емкости и сопротивлений (в)

параметрами, процессы в контуре зависят от конструкции используемых элементов. В простейшем случае, когда обкладки воздушного конденсатора соединены витками проволоки, рис.3.12,а, содержательная модель (эквивалентная схема) такой цепи имеет вид рис.3.12,б. При постоянстве параметров L, C, R эквивалентной схемы,[7] используя уравнения Кирхгофа, легко получить модель этой цепи в виде уравнения линейного диссипативного осциллятора (3.2), где x – динамическая переменная (заряд), $\delta = R/2L$ – коэффициент диссипации. Собственные колебания диссипативного осциллятора затухают, а вынужденные (при периодическом внешнем воздействии) – представляют собой колебания с периодом воздействия T. Единственным демонстрируемым колебательным эффектом в линейной ситуации является *резонанс* – увеличение амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты собственных колебаний и частоты воздействия.

3.6.3.2. К чему приводит замена конденсатора. Включение в цепь диода, эквивалентные параметры которого R и C зависят от величин токов и напряжений (рис.3.12,в), приводит к поразительному расширению круга колебательных явлений, наблюдаемых в цепи. Даже при простейшем гармоническом воздействии этот «электрический маятник» демонстрирует иерархию вынужденных движений различной сложности: гармонических, сложных периодических, хаотических. Похожая картина имеет место и при возбуждении импульсами. Бифуркационные множества (на трехмерных картинках – поверхности, а на двухмерных сечениях – линии) ограничивают области существования различных колебательных режимов в пространстве параметров, образуя структуры, представленные на рис.3.13. Здесь на осях координат трехмерной картины отложены значения амплитуды V и нормированной частоты $N = \omega/\omega_0$ воздействия (ω_0 – частота малых собственных колебаний), по вертикали – величина линейного сопротивления R. Структуру можно лучше понять, рассматривая различные сечения пространства параметров плоскостями, а вид колебаний внутри областей – по их временным реализациям.

[7] При появлении разноименных зарядов на обкладках конденсатора и тока через витки катушки появляются электрическая и магнитная силы, которые будут стремиться их сжимать и растягивать. Поэтому, если материалы катушки и конденсатора недостаточно жестки, то их размеры, а значит и C, и L, могут зависеть от величин токов и напряжений (динамических переменных), что означает появление нелинейности.

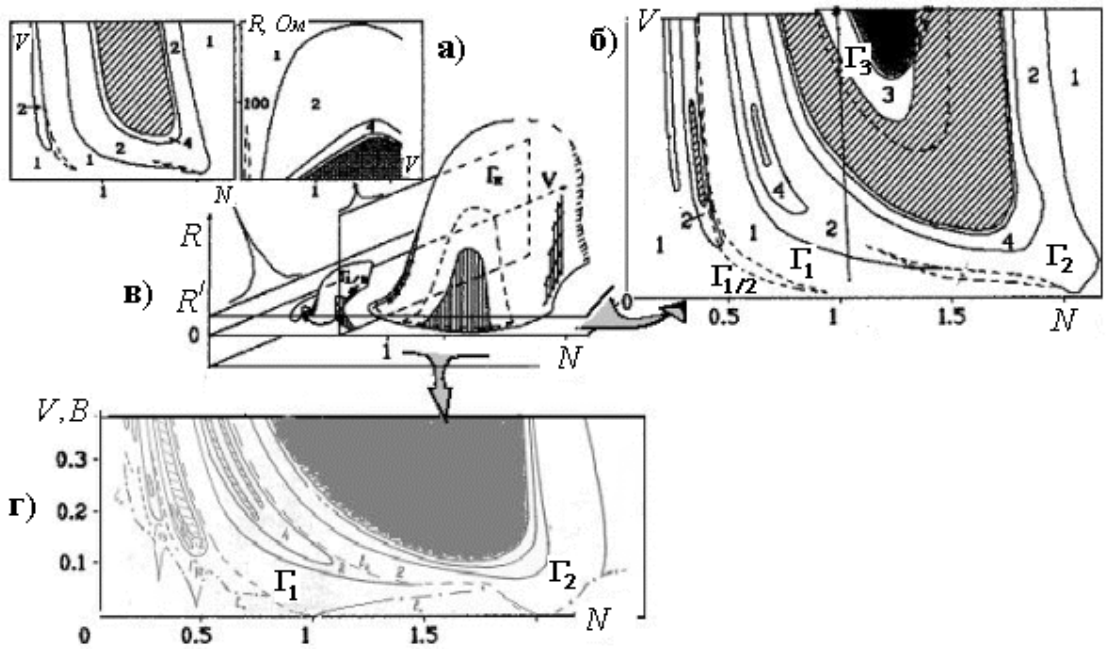

Рис.3.13. Структура пространства параметров контура с диодом при гармоническом внешнем воздействии по данным экспериментальных исследований. Штрихами показаны линии гистерезисных (жестких) переходов. Заштрихованы области хаоса, цифрами показан период колебаний в соответствующих областях

Примеры типичных временных реализаций тока при возбуждении цепи *импульсами* ЭДС, полярность которой «прямая» для диода, представлены на рис.3.14. Импульсы следуют с периодом T, $\omega = 2\pi/T$. Несмотря на малую длительность импульсов, за время их действия собственные колебания быстро затухают, так как при протекании прямого тока эквивалентная емкость диода (см.рис.3.12,в) шунтируется малым активным сопротивлением. По окончании импульса колебания начинаются почти с одинаковой фазы (рис.3.14,а,б), а между импульсами временная реализация состоит из цугов (последовательностей) затухающих собственных колебаний.

В зависимости от амплитуды и периода воздействия, уровня затухания, вида нелинейности, а также начальных условий, в системе могут устанавливаться различные повторяющиеся движения – *циклы*. *Периоды циклов* равны периоду воздействия или кратны ему – составляют величину kT, где k – целое. Вариантов периодических движений может быть очень много, но их описание удается систематизировать. Например, по признаку подобия все циклы можно условно разделить на две группы. В каждой из них сохраняются некоторые особенности формы временных реализаций, а также предельных циклов в фазовом пространстве.

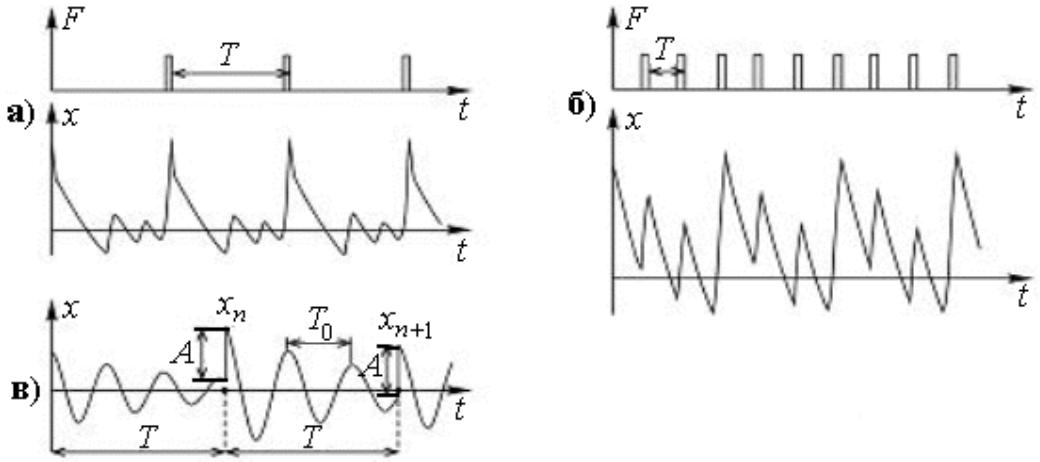

Рис.3.14. Временные реализации колебаний тока в *LR*–диод цепи при периодическом воздействии импульсами прямой полярности *F*(*t*): а) цикл класса субгармонических колебаний – период воздействия *T* больше квазипериода собственных движений в 3 раза ($\Gamma_{1/3}$); б) цикл класса «последовательности добавления периода» – период воздействия меньше периода колебаний в 3 раза ($\Gamma_{3/1} = \Gamma_3$); в) модель временной зависимости субгармонических колебаний – квазипериода затухающих колебаний в цуге неизменен и зависит только от начального отклонения

Первую группу составляют циклы, период которых равен периоду воздействия 1*T*, существующие в области низких частот $N < 1$. Такие циклы обычно называют *субгармоническими*. Так как период воздействия велик по сравнению с временным масштабом собственных движений, на временных реализациях этих циклов в общем случае имеется несколько максимумов (см. рис.3.14,а). Вторую группу составляют циклы периода *kT*, где $k = 2,3,...$, которые наблюдаются при больших частотах воздействия $0.5 < N < 2$. Примеры таких циклов представлены на рис.3.14,б. Так как при увеличении амплитуды воздействия смена этих режимов сопровождается последовательным увеличением k на единицу, их называют циклами «последовательности добавления периода». Достаточно традиционно условное обозначение циклов – $\Gamma_{m/k}$. Здесь k соответствует отношению периода воздействия к квазипериоду собственных колебаний (его можно оценить по числу максимумов на осциллограмме на интервале *T*), а *m* – период цикла, измеренный в единицах периода воздействия.

3.6.3.3. Математические модели. Процессы в полупроводниковых диодах, свойства которых определяют нелинейность системы, наиболее строго анализируют с помощью уравнений в частных производных. Однако для достаточно медленных процессов диод можно рассматривать как двухполюсник с некоторыми эквивалентными свойствами (отражающими связь между напряжением на его контактах и током в подводящих проводах) и ограничиться ОДУ. Еще более простые модели удается получить в виде отображений, если ограничиться описанием лишь

части возможных движений. Рассмотрим модели, способные отразить фрагменты описанной выше (рис.3.12) сложной картины колебаний.

Модель с непрерывным временем. Представим полупроводниковый диод в виде нелинейного конденсатора, зависимость емкости C которого от напряжения опишем известным выражением $C = C_0/(1 - U/\varphi)$, где C_0 – начальная емкость диода, U – напряжение на диоде, φ – контактная разность потенциалов. При этом модельное уравнение цепи, полученное на основе законов Кирхгофа, имеет вид осциллятора Тоды (3.25):

$$d^2x/d\tau^2 + \gamma\, dx/d\tau + e^x - 1 = A\sin N\tau\,,$$

где x – безразмерный заряд на обкладках, γ – коэффициент диссипации, A – безразмерная амплитуда внешнего воздействия, $N = \omega/\omega_0$ – нормированная частота внешнего воздействия, $\tau = \omega_0 t$ – безразмерное время. Результаты численных исследований этого уравнения, представленные на рис.3.7, демонстрируют хорошее качественное описание *во всем пространстве параметров*.

Дискретные модели. 1) В качестве дискретной модели режима субгармонических колебаний (в низкочастотной области $N = \omega/\omega_0 \le 1$) можно с успехом применить одномерное мультимодальное отображение (3.34). Модель адекватна реальной системе в области пространства параметров, где имеют место движения на базе циклов $\Gamma_{1/2}$, $\Gamma_{1/3}$, и т.д. (см. рис.3.11). Эти области имеют качественно одинаковую структуру. Они подобны друг другу и самоподобны. Самоподобие означает устройство по типу «матрешки»: основной конструктивный элемент, представленный на черно-белых фрагментах рисунка, дублируется во всё более мелких масштабах; он просматривается во всех цветных «языках» и их фрагментах. Но в отличие от «матрешки», границы составляющих элементов которой не пересекаются, области существования различных видов колебаний на плоскости параметров маятника при достаточно малых уровнях затухания накладываются друг на друга, образуя области мультистабильности (см. рис.3.11, нижняя панель).

2) *Двухмерное отображение*, моделирующее вынужденную динамику контура с диодом в более высокочастотной области $0.8 \le N \le 2$ построено в [28] с опорой на характерный вид временной реализации цикла «последовательности добавления периода», рис.3.14,б. Оно сложнее, чем (3.34), и хорошо воспроизводит устройство плоскости параметров реальной цепи [89] в области больших частот и амплитуд воздействия (где существуют «циклы добавления периода», ср. рис.3.15 и 3.13,б), хотя не отражает многообразия базовых циклов и других ранее описанных особенностей динамики контура.

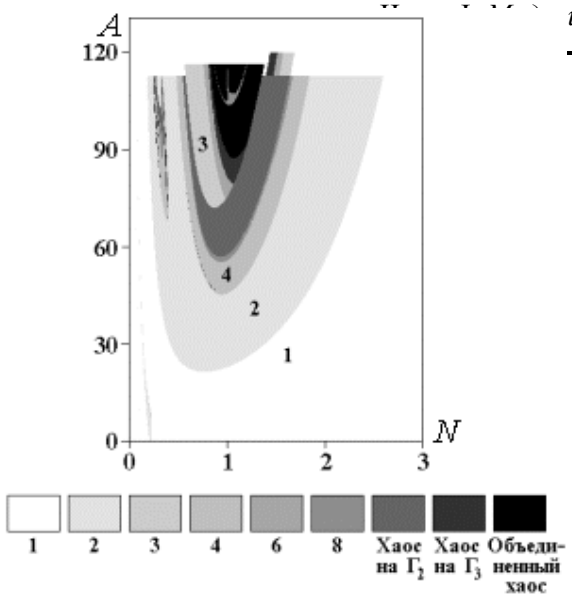

Рис.3.15. Карта режимов отображения для циклов «добавления периода»

3) В областях, где любой из базовых циклов с изменением параметров демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода, хорошей моделью контура с диодом является одномерное квадратичное отображение, например, вида $x_{n+1} = \lambda - x_n^2$.

4) В области отрицательных сопротивлений, где объект демонстрирует автоколебания, его динамика хорошо моделируется отображением окружности (3.33), которое демонстрирует феномены синхронизации малым и подавления большим внешним периодическим воздействием.

Таким образом, наиболее полно из рассмотренных моделей отражает динамику контура с диодом уравнение осциллятора Тоды (3.25). Оно моделирует все семейства характерных циклов системы и особенности структуры пространства параметров. Дискретная модель (3.34) и двухмерная модель хорошо описывают только одно из двух существующих семейств циклов – «субгармоническое» и «добавления периода». В частности, модель (3.34) отражает такие феномены, как линейный и нелинейный резонансы, мультистабильность, гистерезис при изменении параметров. Квадратичное отображение универсально, но не отражает специфики рассматриваемого объекта, как и отображение окружности. Можно ли построить конкурентоспособное с дифференциальным уравнением осциллятора Тода точечное отображение? Пока мы не можем сказать, сколь сложной окажется формула для такого отображения.

3.7. Модели пространственно-развитых систем

Для конструирования моделей пространственно-развитых *объектов* часто используют ансамбли связанных ОДУ или отображений, см., например, [21, 279]. Пространственные свойства в таких системах проявляются в наличии решений с различным распределением одновременных значений характеризующих величин в элементах ансамбля. Например, колебания двух связанных линейных осцилляторов можно представить совокупностью двух собственных синусоидальных движений с отличающимися частотами. Одно из них соответствует синфазным колебаниям, когда элементы движутся абсолютно идентично, а

другое – противофазным, когда имеет место постоянный сдвиг по фазе на π. Эту особенность пространственно развитых систем из сосредоточенных элементов, можно рассматривать, как аналог пространственных мод ограниченной распределенной системы (рис.3.16).

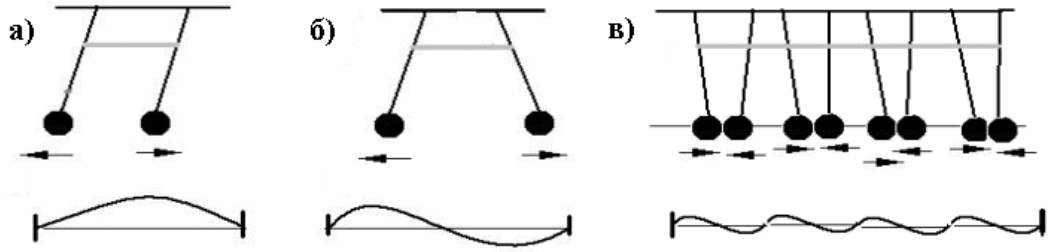

Рис.3.16. Колебательные моды ансамбля двух (а,б) и нескольких (в) маятников – вверху; пространственные моды распределенной системы – внизу

Свойство мультистабильности, перекликающееся с пространственной многомодовостью, типично для ансамблей колебательных систем. Именно принципиальная многомодовость и связанная с ней негрубость (чувствительность к малому изменению параметров), когда возможные варианты движений многочисленны, а бассейны притяжения нескольких сосуществующих в фазовом пространстве аттракторов образуют сложную и даже фрактальную структуру, является типичным свойством пространственно развитых нелинейных систем. Далее мы проиллюстрируем способность относительно простых дискретных конструкций описывать этот фундаментальный феномен.

3.7.1. Решетки связанных отображений

3.7.1.1. Система двух диссипативно связанных квадратичных отображений. При конструировании цепочек и решеток (CML-модели[8]) базовые отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, обычно идентичные, связываются между собой тем или иным способом: локально (только ближайшие соседи), глобально (все со всеми), или по группам. На рис.3.17 симметричная связь, когда элементы взаимодействуют друг на друга одинаково, обозначена прямоугольником, а однонаправленная, когда реализуется только воздействие первого элемента на второй, – треугольником. Возможны и промежуточные случаи, когда связь несимметрична. Проблема систематизации видов связи рассматривалась в [105], где варианты симметричной связи между отображениями сведены к следующим видам: *диссипативному*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + k\big(f(y_n) - f(x_n)\big), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + k\big(f(x_n) - f(y_n)\big), \end{aligned} \tag{3.35}$$

[8] От английского Coupled Map Lattice.

инерционному

$$x_{n+1} = f(x_n) + k(y_n - x_n),$$
$$y_{n+1} = f(y_n) + k(x_n - y_n), \qquad (3.36)$$

или их комбинации. Здесь x, y – динамические переменные, k – коэффициент связи, f – функция нелинейности базового отображения.

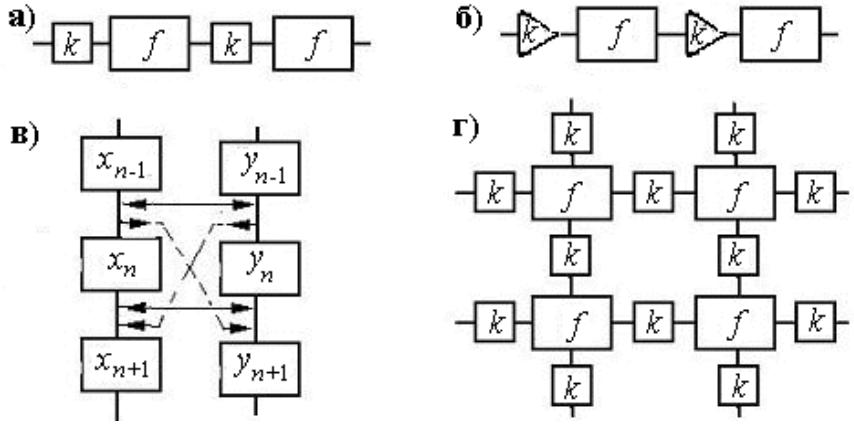

Рис.3.17. Одномерные (а,б) и двумерные (г) решетки связанных отображений и иллюстрация видов симметричной связи на пространственно-временной диаграмме обменивающихся особями популяций (в)

Авторами приведенной систематизации предложена интересная интерпретация введенных видов связи на языке популяционной биологии. Можно предположить, что особи сначала размножаются, оставаясь в своей популяции, а потом на некоторое время получают возможность мигрировать между популяциями («сначала размножаются, потом расползаются»). На следующий год цикл повторяется. На рис.3.17,в этому соответствуют сплошные «тропы» на пространственно-временной диаграмме. Такая связь стремится выровнять мгновенные состояния подсистем, и ее естественно назвать *диссипативной.* Штриховые линии на рис.3.17,в соответствуют ситуации, когда особи имеют возможность миграции, минуя цикл размножения и гибели в «своей» популяции. Такую связь имеет смысл именовать *инерционной*, т.к. она способствует сохранению «памяти» о состоянии на предыдущем шаге. Возможна и комбинированная связь.

Выбор вида связи при моделировании нетривиален. Это, в частности, иллюстрируют результаты экспериментальных исследований системы связанных нелинейных электрических контуров (см. п. 3.6.3) в области параметров, где каждая из систем переходит к хаосу через удвоения периода. Оказалось, что при связи через резистор (диссипативный элемент) адекватно ее описание как диссипативной, а через конденсатор (чисто реактивный элемент) – как комбинированной, а не чисто инерционной (!) [20].

Выбор базового отображения и вида связи вносят свою специфику в поведение моделей, но феномен мультистабильности в ансамблях связанных отображений всегда является определяющим. Проиллюстрируем это на простейшей системе двух квадратичных отображений, взяв в варианте с диссипативной связью (3.36) квадратичное отображение $f(x_n) = \lambda - x_n^2$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - x_n^2 + k\left(x_n^2 - y_n^2\right), \\ y_{n+1} &= \lambda - y_n^2 + k\left(y_n^2 - x_n^2\right). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Ограничившись случаем, когда значения параметра нелинейности λ в первой и второй подсистемах одинаковы, мы введем следующую систематизацию колебательных мод системы. В пределе нулевой связи ($k = 0$) каждый режим периода N может быть реализован N способами, отличающимися сдвигом колебаний подсистем во времени на величину $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, как это показано на рис.3.18 для колебаний периода $N = 2$ и 4. Назовем их *видами колебаний* и используем для описания иерархии колебательных режимов при введении связи, когда взаимодействие подсистем приводит к различным вариантам их взаимной синхронизации. Для обозначения периодических видов будем использовать запись N_m. В хаотических режимах, обозначаемых N^m, несмотря на отсутствие повторяемости в движениях, можно сохранить принцип классификации, используемый для периодических режимов, если понимать под N число лент аттрактора, а под m – временной сдвиг между, например, максимальными значениями x_n и y_n. Режимы с $m = 0$ называют синфазными, с $m \neq 0$ – несинфазными.

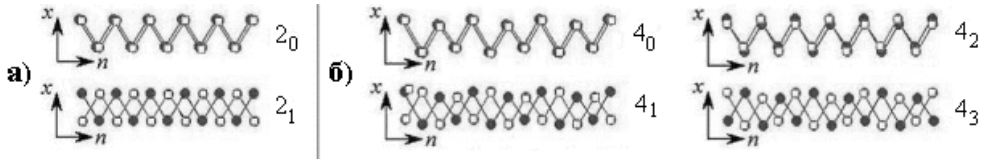

Рис.3.18. Временные реализации колебаний в подсистемах (мгновенные значения переменной x_n в одной из них обозначены темными точками, а в другой – светлыми) для периода $N = 2$ (а) и 4 (б). Справа приведены обозначения видов колебаний N_m

Если воспользоваться известным графическим приемом и изобразить области существования и эволюции каждого из видов колебаний на отдельных листах, то можно построить наглядную многолистную схему областей существования (устойчивости) колебательных режимов на плоскости (k, λ). На рис.3.19,а представлена схема, отражающая области существования всех режимов колебаний периода 1, 2, 4 и 8 при $k < 0.5$. Приведенная на рис.3.19,б схема представляет собой сечение многолистной картины рис.3.19,а плоскостью $k = 0.05$ и качественно

иллюстрирует эволюцию движений в системе (3.37) с изменением параметра λ при слабой фиксированной связи. Сплошные линии на этой схеме соответствуют устойчивым режимам, штриховые — неустойчивым. Точками отмечены бифуркационные переходы. Буквами *A*, *B*, *C*, *D* выделены ветви, объединяющие некоторые группы режимов[9]: они начинаются периодическими режимами, количество которых увеличивается с ростом λ, а заканчиваются хаотическими.

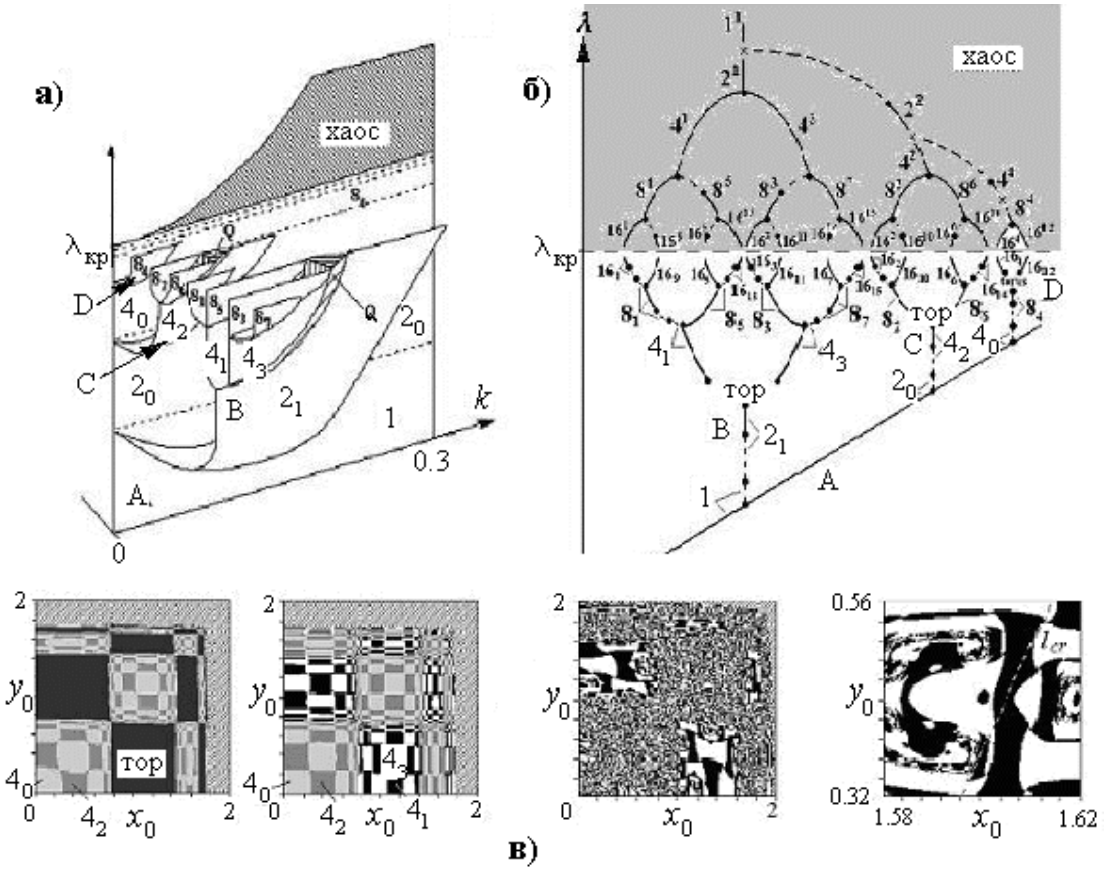

Рис.3.19. Схема эволюции видов колебаний на плоскости параметров (а) и ее вариант при $k = 0.05$ (б). Примеры разбиения фазового пространства системы на бассейны притяжения различных видов колебаний в ситуациях мультистабильности (в)

Области хаотических режимов заштрихованы, критическое значение параметра нелинейности, при котором реализуется переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, обозначено $\lambda_{кр}$. В областях, обозначенных на схемах буквой *Q* или словом *torus*, существуют квазипериодические колебания, и реализуется переход к хаосу через их разрушение. Бассейны притяжения аттракторов мультистабильных видов движений делят фазовое пространство на бассейны притяжения (рис.3.19,в), структура которых фрактальна. С ростом силы диссипативной

[9] Ветвь *A* соответствует эволюции синфазных режимов ($m = 0$), *B*, *C*, *D* – несинфазных.

связи k количество сосуществующих состояний системы уменьшается, а при больших k существует только синфазное движение, т.е. система фактически становится одномерной.[10]

3.7.1.2. Сложная динамика цепочки (к чему приводит увеличение числа элементов). Не будет неожиданным услышать, что увеличение числа элементов рассматриваемого ансамбля приводит к еще большему усложнению колебательной картины. Действительно, в пространственно развитой системе имеется тем больше возможных вариантов движений подсистем во времени и относительно друг друга (пространственных структур), чем длиннее цепочка. Для иллюстрации на рис.3.20 приведены результаты численных экспериментов с цепочкой диссипативно связанных отображений маятника:

$$x_{n+1}^{m} = (1-k)f(x_n^m) + (k/2)\left(f(x_n^{m+1}) + f(x_n^{m-1})\right), \qquad (3.38)$$

где n – дискретное время, m – номер элемента цепочки, k – коэффициент связи, f – мультимодальное отображение (3.34). По горизонтальной оси отложен номер элемента, по вертикальной – мгновенное состояние. Пологие участки структуры называются *доменами*, перепады – *кинками*.[11]

С изменением параметров структуры эволюционируют: удваиваются временной и пространственные периоды, формируются периодические, квазипериодические и хаотические конфигурации. С увеличением коэффициента связи домены становятся шире, а кинки – более пологими. В итоге при очень больших коэффициентах связи при любых начальных условиях существует лишь пространственно однородный режим – аналог появлению льдины в примере с охлажденной водой (с. 92). Подробности о свойствах рассматриваемой цепочки см. в [31].

---

[10] Желающим подробнее познакомиться со сложной динамикой этой нелинейной системы можно предложить учебную программу на сайте [347] и статьи [18, 19].

[11] Отображение (3.34) взято для упрощения: если в системе квадратичных отображений мультистабильность формируется на базе движений удвоенного периода, то здесь она свойственна уже циклам периода 1. При наличии у изолированной подсистемы двух состояний периода 1 в двух связанных отображениях имеет место 4 вида колебаний периода 1 – два синфазных и два зеркально симметричных друг другу несинфазных [31].

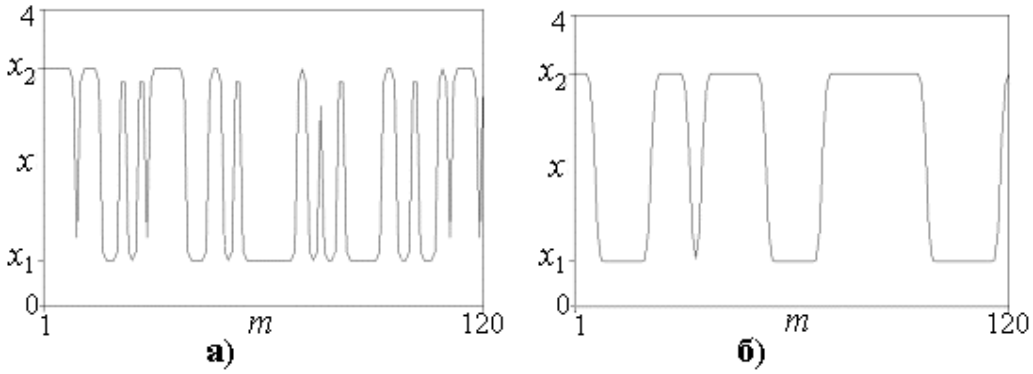

Рис. 3.20. Режим периода 1 с неоднородным пространственным распределением в цепочке из 120 элементов: A=0.965, N=0.64, d=0.2, $\beta = 0.2$: а) $k = 0.1$; б) $k = 0.35$. Значения x_1 и x_2 – состояния равновесия бистабильной элементарной ячейки

3.7.1.3. Двухмерная решетка отображений. Дальнейшее усложнение модели (3.38), ее пространственное развитие, может вестись как по линии увеличения количества элементов, так и усложнения способа связи между ними. Рассмотрим пример, где те же мультимодальные отображения образуют решетку, в которой каждый элемент взаимодействует с 4 ближайшими соседними элементами, связь локальная и диссипативная:

$$x_{n+1}^{i,j} = (1-k)f(x_n^{i,j}) + (k/4)\left(f(x_n^{i+1,j}) + f(x_n^{i-1,j}) + f(x_n^{i,j+1}) + f(x_n^{i,j-1})\right). \quad (3.39)$$

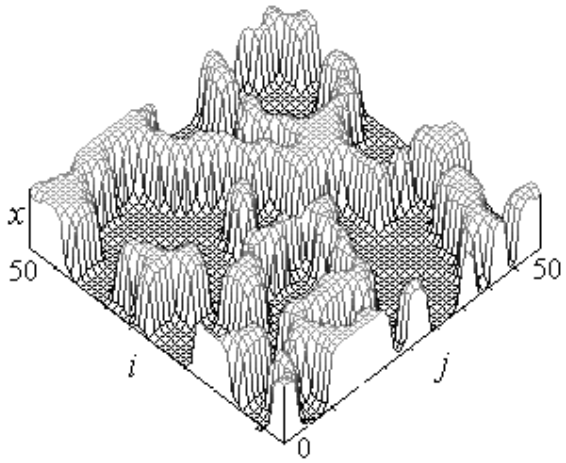

Рис.3.21. Режим динамики двухмерной решетки 50×50 элементов периода 1 с неоднородным пространственным распределением, A= 0.965, N=0.64, d=0.2, $\beta = 0.2$, $k = 0.2$. Периодические граничные

Здесь i, j — определяют положение элемента решетки. Пример мгновенной колебательно-вол-новой картины такой решетки, имеющей одинаковое число элементов по обоим направлениям, представлен на рис.3.21. Это стационарная структура, полученная при случайном задании начальных условий. Задавая начальные условия по тому или иному закону, можно получить при слабой связи между элементами практически любое требуемое стационарное распределение. При увеличении связи между элементами число возможных структур уменьшается, а при уровнях связи выше некоторого порогового, разрешенным остается лишь однородное пространственное распределение.

3.7.2. Клеточные автоматы

«Клеточный автомат – дискретная динамическая система, представляющая собой совокупность одинаковых клеток, одинаковым образом соединенных между собой. Все клетки образуют так называемую решетку клеточного автомата. Решетки могут быть разных типов, отличаясь как по размерности, так и по форме клеток» [120]. Клеточные автоматы были предложены в работе фон Неймана [169] и стали универсальной моделью параллельных вычислений, также как машины Тьюринга – моделью для последовательных вычислений. «…Любая клетка на каждом шаге вычисляет свое новое состояние по состояниям ее близких соседей. Таким образом, законы системы являются локальными и повсюду одинаковыми. "Локальный" означает, что для того чтобы узнать, что произойдет здесь мгновение спустя, достаточно посмотреть на состояние ближайшего окружения, никакое дальнодействие не допускается. "Одинаковость" означает, что законы везде одни и те же: я могу отличить одно место от другого по форме ландшафта,[12] а не по какой-то разнице в законах» [162]. Отсюда можно выделить следующие характерные свойства клеточных автоматов.

1. Решетка однородна. Закон эволюции клеток всюду одинаков.

2. Изменения значений всех клеток происходят одновременно после вычисления нового состояния каждой клетки решетки.

3. Взаимодействия локальны. Лишь клетки окрестности (как правило, соседние) способны повлиять на данную клетку.

4. Множество состояний клетки конечно.

В качестве примера клеточного автомата обычно приводят модель под названием игра «жизнь», созданную в 1970 году Д. Конуэем – математиком Кембриджского университета. Она широко представлена в сети Интернет, см., например, [344]. Правила функционирования этого автомата составлены с учетом особенностей реальных процессов, происходящих при зарождении, развитии и гибели колонии живых организмов. Рассматривается бесконечная плоская решётка квадратных клеток (рис.3.22). Темным цветом выделяются живые клетки. Время дискретно (n = 0, 1, 2, ...), а ситуация на решетке в следующий момент времени n+1 определяется наличием живых соседей у каждой живой клетки. Соседние клетки – те, что имеют общие рёбра. Ход эволюции диктуется следующими законами.

1. *Выживание.* Каждая клетка, имеющая две или три соседние живые клетки, выживает и переходит в следующее поколение.

[12] Т.е. по распределению характеризующей величины по рабочему полю автомата.

2. *Гибель.* Каждая клетка, у которой больше трёх соседей, погибает из-за перенаселённости. Каждая клетка, вокруг которой свободны все соседние клетки или же занята всего одна клетка, погибает от одиночества.

3. *Рождение.* Если число занятых клеток, с которыми граничит какая-нибудь пустая клетка, в точности равно трём, то на этой клетке происходит рождение нового организма.

Так, если начальное распределение клеток (ландшафт) имеет вид рис.3.22,а, то через шаг, в следующий момент дискретного времени будет иметь место конфигурация рис.3.22,б, и т.д. При этом некоторые начальные структуры погибают, другие выживают и становятся стационарными, или периодически повторяются, или перемещаются в пространстве и т.п. Свойства данной сети: структуры, разделённые двумя пустыми клетками, не влияют друг на друга; конфигурация в момент времени n полностью определяет будущее (состояние в моменты n+1, n+2 и так далее); восстановить прошлое системы по её настоящему не удаётся (динамика необратима); устойчивые формы обычно обладают симметрией и т.п. Чем большую площадь занимает сообщество, тем сложнее оно может себя вести.

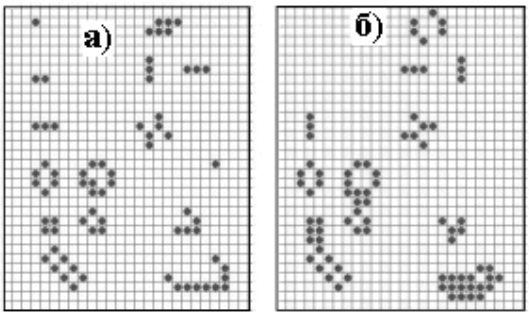

Рис.3.22. Примеры некоторых ландшафтов на рабочем поле клеточного автомата игра «жизнь»: а) заданный начальный профиль, n = 0; б) ситуация после первого шага, n = 1

В настоящее время игра «жизнь» получила развитие. Так, в модернизированных вариантах автомат трехмерен, способен моделировать несколько популяций, например, таких как взаимодействующие «травоядные» и «хищники». Но даже в своих усложненных вариантах этот простой пример отнюдь не ограничивает уровень сложности задач, которые могут решаться с помощью клеточных автоматов. Клеточный автомат может быть описан эквивалентно системой связанных отображений с дискретными состояниями. Его особенности – простота и наглядность конструирования и удобство компьютерного исследования. Клеточные автоматы используются для моделирования гидродинамических и газодинамических течений, электронных цепей, распространения тепловых потоков, движения толпы и т.п. [305,116]. Их применяют при составлении генетических алгоритмов, при поиске кратчайшего пути на графе и т.д. Подробности см., например, в [16, 162, 109] и на сайте [339].

3.7.3. Дифференциальные уравнения с запаздыванием

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом обычно используются для моделирования систем, поведение которых определяется не только текущим состоянием, но и значениями переменных в предыдущие моменты времени. Такие объекты широко представлены в природе, они изучаются в физике, биологии, физиологии, химии. Причины запаздывания могут быть различными. Так, в динамике популяций оно связано с тем, что особи участвуют в репродукции лишь после периода взросления, а в пространственно развитых радиофизических системах оно обусловлено конечной скоростью распространения сигнала, здесь время запаздывания τ связано с временем, требуемым на преодоление расстояния между элементами. В достаточно общем случае системы с запаздыванием описываются уравнением

$$\varepsilon_n x^{(n)}(t) + \varepsilon_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + \varepsilon_1 \dot{x} = F(x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_k)), \qquad (3.40)$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_k$ учитывают возможность существования нескольких причин запаздывания с разными характерными масштабами. Частными случаями уравнения (3.40) являются следующие эталонные модели. Уравнение Икеды, описывающее динамику пассивного оптического резонатора, $\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \cdot \sin(x(t-\tau) - x_0)$; уравнение Маккея – Гласса, описывающее процесс выработки красных кровяных клеток в живых организмах, $\dot{x}(t) = -b \cdot x(t) + a \cdot x(t-\tau)/(1 + x^c(t-\tau))$; уравнение генератора с запаздывающей обратной связью, очень популярного в радиофизике,[13] $\varepsilon \cdot \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\tau))$.

Несмотря на единственную скалярную динамическую переменную, все представленные динамические системы являются бесконечномерными, т.к. при задании начальных условий необходимо указать распределение динамической переменной на временном отрезке [0, τ]. Даже ДУЗ первого порядка могут демонстрировать сложные движения, которым в фазовом пространстве соответствуют аттракторы очень высокой размерности, хаос, мультистабильность и прочие нелинейные феномены. Для более основательного знакомства с возможностями моделей в виде ДУЗ см. критический обзор работ по сложной динамике генератора с запаздывающей обратной связью [106], монографию [76], статьи [90] и сайт [343].

---

[13] Генератор представляет собой замкнутые в кольцо нелинейный усилитель (его характеризует функция *f*), инерционный элемент (фильтр, инерционность характеризуется параметром ε) и линия задержки (τ – время задержки).

3.7.4. Дифференциальные уравнения в частных производных

Это, пожалуй, самый хорошо изученный и исторически ранний вид математического аппарата, развитый специально для моделирования пространственно развитых систем. Дифференциальные уравнения в частных производных используются в самых различных научных дисциплинах: от физики, химии и биологии до экологии и экономики. Достаточно вспомнить великие уравнения Максвелла в электродинамике [86], уравнение Шредингера в квантовой механике, уравнения типа реакция – диффузия в химии и биологии, уравнение Гинзбурга – Ландау (повсеместно). Форму ДУЧП имеют многие классические модели теории волн, например:

уравнение простой волны $\partial x/\partial t + v(x)\partial x/\partial z = 0$, где x – характеризующая величина, v – скорость распространения возмущения, в общем случае зависящая от его величины, z – пространственная координата, эта модель может описывать «укручение» и опрокидывание профиля волны;

уравнение Кортевега – де Вриза $\partial x/\partial t + v(x)\partial x/\partial z + \beta\,\partial^3 x/\partial z^3 = 0$, наиболее простая модель, имеющая решения солитонного типа (грубо говоря, это локализованные возмущения, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения формы и сохраняющие эти характеристики после столкновения друг с другом);

уравнение Бюргерса $\partial x/\partial t + v(x)\partial x/\partial z - \alpha\,\partial^2 x/\partial z^2 = 0$, простейшая модель, описывающая волны в системах с диссипацией, в частности, ударные волны (движение области резкого перепада значений x).

Система, описывающаяся даже уравнением в частных производных первого порядка с одной пространственной координатой (как в вышеупомянутых примерах), является бесконечномерной. Для задания ее состояния нужно задать начальную функцию $x(0,z)$. Если рассматривается система без пространственных границ (эта идеализация удобна, если система очень протяженная, а явления у ее границ слабо влияют на динамику и не интересуют исследователя), то эта функция должна быть определена на всей числовой оси $-\infty < z < \infty$. Если же пространственная протяженность системы ограничена, то начальная функция должна быть задана только на соответствующем промежутке $0 < z < L$, а в краевых точках задаются те или иные краевые условия, например, фиксированные концы – $x(t,0) = x(t,L) = 0$. В последнем случае говорят о краевой задаче.

ДУЧП могут иметь аттракторы в виде неподвижных точек (состояния равновесия) и предельных циклов и прочих видов маломерной динамики, но могут демонстрировать и очень высокоразмерную динамику (система бесконечномерна). Этот вид математического аппарата еще более богат свойствами и сложен для исследования, чем все ранее рассмотренные в

данной главе. Фундаментальный интерес вызывает вопрос об условиях существования и единственности решения ДУЧП, отчасти в связи с ним привлекают большое внимание в последнее время *режимы с обострениями* (когда решение существует только на конечном интервале времени), которые достаточно типичны [115, с.148-170].

Уравнениям в частных производных посвящена обширная литература, см., например, [161, 54, 154, 109].

3.8. Искусственные нейронные сети

Искусственные нейронные сети (ИНС) – вид математических моделей, которые строятся по принципу организации и функционирования их биологических прототипов – сетей нервных клеток (нейронов) мозга. Используется идея о том, что нейроны можно моделировать довольно простыми автоматами (искусственными нейронами), а вся сложность мозга, гибкость его функционирования и другие важнейшие качества определяются связями между нейронами. Термин «нейронные сети» сформировался к середине 50-х годов XX века [271]. Очень активные исследования в этой области велись до 70-х годов, а затем имел место десятилетний спад интереса. В 1980-е интерес опять возродился (центром внимания стали ассоциативная память и нейрокомпьютеры), и к концу 20 века число международных конференций по ИНС и нейрокомпьютерам достигло сотни.

Если искусственный нейрон представляет собой функцию, связывающую входное и выходное значения, и сигнал в сети распространяется только в одном направлении (нет обратных связей), то ИНС также будет лишь функцией, преобразующей входной сигнал в выходное значение. Главным образом, этот наиболее простой вариант мы кратко рассмотрим ниже. Если же есть обратные связи и/или нейрон представляет собой систему с собственной динамикой – отображение, то ИНС является многомерным отображением (системой связанных отображений со специфическими свойствами элементов и связей), см., например, [244]. Аналогично, если нейрон описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, то ИНС есть система связанных ОДУ, см., например, работы [82, 83].

3.8.1. Стандартный формальный нейрон

Такой искусственный нейрон состоит из адаптивного сумматора и нелинейного преобразователя (рис.3.23,а). На его входы подается вектор входных значений переменной $\{x_n\}$. Каждому входу x_i соответствует свой вес w_i. Сумматор осуществляет взвешенное (адаптивное, подстраивающееся с помощью весов) суммирование входов

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \,, \tag{3.41}$$

а нелинейный преобразователь формирует сигнал на выходе нейрона

$$y = F(S)\,. \tag{3.42}$$

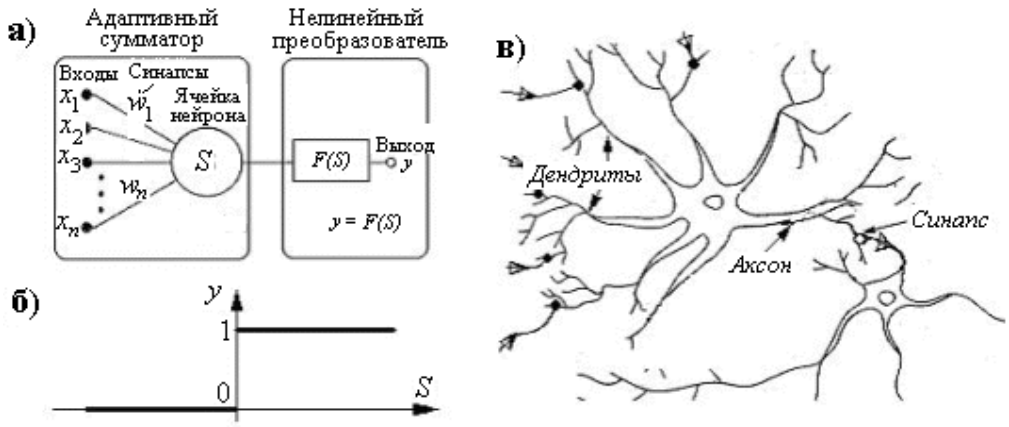

Рис.3.23. Формальный и биологический нейроны: а) схема искусственного нейрона, б) график функции единичного скачка, в) нейрон биологический (черными точками отмечены входные синапсы, белыми – выходной, треугольниками – направление смещения возбуждения)

Выбор функции активации F нейрона определяется: 1) спецификой задачи, 2) удобством реализации на ЭВМ, в виде электрической схемы или другим способом, 3) алгоритмом «обучения», см. п. 3.8.4 (некоторые алгоритмы накладывают ограничения на вид функции активации). Чаще всего вид нелинейности не оказывает принципиального влияния на решение задачи. Однако удачный выбор может сократить время обучения в несколько раз. Первоначально в качестве функции F часто использовалась «ступенька»

$$F(S) = \begin{cases} 0, \; S < 0, \\ 1, \; S \geq 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

график которой приведен на рис.3.23,б. В настоящее время перечень возможных видов функции активации занял бы слишком много места [79, 346]. В частности, весьма распространена нелинейная функция с насыщением, так называемая логистическая функция или классический сигмоид:

$$F(S) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha S}}\,, \tag{3.44}$$

При уменьшении α сигмоид становится более пологим, в пределе при $\alpha = 0$ вырождаясь в горизонтальную линию на уровне 0.5. При увеличении α сигмоид приближается к функции единичного скачка (3.43).

Входные значения переменной x_i можно уподобить возбуждениям входных синапсов реального (биологичекого) нейрона рис.3.23,в, поступающих с дендритов окружающих нервных клеток через синапсы (места соединений). У реальных нейронов может быть от единиц до десятков тысяч дендритов, с помощью которых «собирается информация» о состоянии клеток, с которыми установлена связь. Уровень связи в модели отражают весовые коэффициенты w_i. Носитель информации в нервных клетках – скачок мембранного потенциала (нервный импульс, спайк). Он формируется в клетке после того, как совместное воздействие дендритов превысит некоторое критическое значение, что моделируется в формальном нейроне суммированием и нелинейным преобразованием, и распространяется по аксону как волна изменения поляризации мембраны. Приходя в синапсы, такая волна вызывает выделение веществ называемых нейромедиаторами, которые диффундируют к дендритам других нейронов, связанных с данным аксоном, преобразуясь рецепторам в электрический импульс возбуждения.[14] После генерации импульса клетка оказывается невосприимчивой к внешним воздействиям в течение некоторого интервала времени. Последнее состояние называют *рефрактерным*. Можно сказать, что мы имеем дело с возбудимой системой, которая может находиться в *фазе покоя* (до срабатывания), *возбуждения* (при проведении импульса) и *рефрактерности* (в течение определенного времени после прохождения импульса). Наличие рефрактерного периода определяет предельно возможную частоту генерации импульсов (не более 200 Гц).

3.8.2 Архитектура и классификации нейронных сетей

При создании ИНС используют несколько стандартных архитектур, из которых путем вырезания лишнего или (реже) добавления строят большинство используемых моделей. Базовыми считаются две архитектуры: полносвязные и слоистые (многослойные) сети. В *полносвязных нейронных сетях* каждый нейрон передает свой выходной сигнал остальным нейронам, в том числе и самому себе. Все входные сигналы подаются всем нейронам. Выходными сигналами сети могут быть все или некоторые выходные сигналы нейронов после нескольких тактов функционирования сети.

[14] Существуют и чисто электрические механизмы связи нейронов.

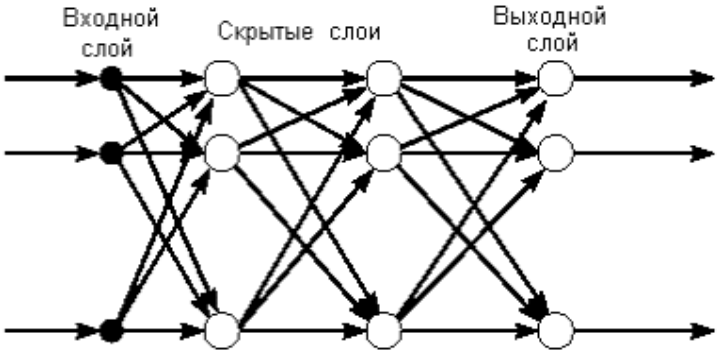

Рис.3.24. Сеть прямого распространения (персептрон) из трех слоев

В *многослойных нейронных сетях* нейроны объединяются в слои (рис.3.24). Слой содержит совокупность нейронов с едиными входными сигналами. Число нейронов в слое может быть любым и не зависит от количества нейронов в других слоях. В общем случае сеть состоит из нескольких слоев, пронумерованных слева направо. Внешние входные сигналы подаются на входы нейронов входного слоя (его часто нумеруют как нулевой), а выходами сети являются выходные сигналы последнего слоя. Кроме входного и выходного слоев в многослойной нейронной сети есть один или несколько так называемых *скрытых слоев*. В зависимости от того, передают ли последующие слои свои сигналы на предыдущие слои, различают сети прямого распространения (feedforward networks, сети без обратных связей) и сети с обратными связями (recurrent networks). Следует иметь в виду, что после введения обратных связей сеть уже не просто осуществляет отображение множества входных значений на множество выходных, она превращается в динамическую систему высокой размерности, и возникает вопрос о ее устойчивости. Кроме того, нейронные сети можно разделить на

1) гомогенные и гетерогенные (т.е. с единой функцией активации для всех нейронов или с различными функциями активации);

2) бинарные (оперируют только двоичными сигналами 0 и 1) и аналоговые (оперируют с вещественными числами);

3) синхронные и асинхронные.

ИНС различаются также по числу слоев. Теоретически число слоев и число нейронов в каждом слое может быть произвольным, однако фактически оно ограничено ресурсами компьютера или специализированных микросхем, на которых обычно реализуется нейросеть. Чем сложнее сеть, тем более сложные задачи она может решать.

3.8.3. Основные свойства и решаемые задачи

Несмотря на примитивность в сравнении с биологическими системами, даже многослойные ИНС прямого распространения обладают

рядом полезных свойств и способны решать очень важные задачи. К таким свойствам в первую очередь следует отнести:

1. *Обучаемость*. Выбрав одну из архитектур НС и свойства нейронов, а также проведя алгоритм обучения, можно «обучить» сеть решению задачи, которая ей по силам. Нет гарантий, что это удастся сделать всегда, но во многих случаях обучение бывает успешным.

2. *Способность к обобщению*. После обучения сеть становится нечувствительной к малым изменениям входных сигналов (шуму или вариациям входных образов) и дает правильный результат на выходе.

3. Способность к абстрагированию. Если предъявить сети несколько искаженных вариантов входного образа, то сеть сама может создать на выходе идеальный образ, с которым она никогда не встречалась.

Среди решаемых задач следует выделить распознавание образов (например, зрительных или слуховых), реализацию ассоциативной памяти[15], кластеризацию (разбиение изучаемой совокупности объектов на группы схожих между собой), аппроксимацию функций, предсказание временных рядов (см. п. 10.2.1.3), управление, принятие решений, диагностику.

Многие из перечисленных задач сводятся к следующей математической постановке. Необходимо построить такое отображение $X \to Y$, чтобы в ответ на каждый возможный сигнал X формировался правильный выходной сигнал Y. Отображение задается конечным числом пар (вход, известный выход). Число этих пар (обучающих примеров) существенно меньше общего числа возможных сочетаний значений входных и выходных сигналов. Совокупность всех обучающих примеров носит название *обучающей выборки*. Например, в задачах распознавания образов X – некоторое представление образа (изображение, вектор), Y – номер класса, к которому принадлежит входной образ. В задачах управления X – набор контролируемых параметров управляемого объекта, Y – код, определяющий управляющее воздействие, соответствующее текущим значениям управляющих параметров. В задачах прогнозирования в качестве входных сигналов используются значения наблюдаемой величины до текущего момента времени, на выходе – следующие во времени значения наблюдаемой величины.

Эти и вообще большая часть прикладных задач может быть сведена к построению некоторой многомерной функции. Каковы при этом возможности нейросетей, которые, как было видно из описания их

[15] В модели вычислений фон Неймана (используется в обычных компьютерах) обращение к памяти доступно только посредством адреса, который не зависит от содержания памяти. Ассоциативная память доступна по указанию данного содержания. Содержимое памяти может быть вызвано даже по частичному или искаженному содержанию.

структуры, вычисляют линейные и нелинейные функции *одного переменного*, а также всевозможные композиции – функции от функций, получаемые при каскадном соединении (композиции) нейронов. Что можно получить, используя только такие операции? Какие функции удастся вычислить точно, а какие функции можно сколь угодно точно аппроксимировать с помощью нейронных сетей? В результате многолетней научной полемики между Колмогоровым и Арнольдом была доказана возможность точного представления непрерывных функций нескольких переменных в виде композиции непрерывных функций одного переменного и сложения [92, 15]. Наиболее полно на вопрос об аппроксимационных свойствах нейронных сетей отвечает обобщенная теорема Стоуна [320], которая утверждает универсальные аппроксимационные возможности произвольной нелинейности: с помощью линейных операций и каскадного соединения можно на базе произвольного нелинейного элемента получить устройство, вычисляющее любую непрерывную функцию с любой наперед заданной точностью. Популярное изложение теорем Колмогорова и Стоуна в применении к нейронным сетям можно найти в [63]. Таким образом, нейроны в сети могут использовать практически любую нелинейную функцию активации, важен лишь факт ее нелинейности. Итак, искусственные нейронные сети могут «очень многое». Остается открытым другой вопрос – как их этому «научить»?

3.8.4. Обучение

В процессе функционирования нейронная сеть формирует выходной сигнал Y в соответствии с входным сигналом X, реализуя некоторую функцию $Y = g(X)$. Если архитектура сети задана, то значения g определяются синаптическими весами. Выбор оптимального значения этих параметров называется обучением сети. Существуют разные подходы к обучению.

Обучение с учителем. При этом для построения решения используется обучающая выборка – пары известных входных-выходных значений (X_1, Y_1), …, (X_N, Y_N). Пусть значения векторов X и Y связаны некоторым соотношением $Y = g(X)$, в частности, $Y_i = g(X_i)$, $i = 1,...,N$. Функция g неизвестна. Обозначим E – функцию ошибки, показывающую степень близости произвольной функции f к функции g.

Решить поставленную задачу с помощью нейросети заданной архитектуры означает построить функцию f, подобрав синаптические веса таким образом, чтобы функция ошибки была минимальной. В наиболее простом случае обучение состоит в поиске функции f, минимизирующей E на обучающей выборке. Оно требует длительных вычислений и

представляет собой итерационную процедуру (число итераций может составлять от 10^3 до 10^8). Если выбрана обучающая выборка и вид функции E, то обучение сети превращается в задачу многомерной нелинейной оптимизации [73], которая зачастую является крайне сложной в практическом плане (см. также п. 10.2.1.3).

Поскольку создание интеллектуальных систем базируется во многом на биологических прототипах, до сих пор не прекращается спор о том, можно ли считать алгоритмы обучения с учителем аналогичными природным процессам обучения, или они полностью искусственны.

Обучение без учителя. Известно, что нейроны зрительной коры, например, учатся реагировать на световые импульсы лишь под действием самих импульсов, без внешнего учителя. В частности мы способны решить такую сложную задачу, как выделение образов на предъявленной картине и т.п. Однако высшие этапы обучения, например, у детей, невозможны без «учителя» в лице его родителя. Кроме того, отдельные области в мозге вполне могут выполнять роль «учителей» для других областей, управляя их активностью. Поэтому нельзя однозначно сказать, какой тип обучения биологически правдоподобнее – с учителем или без него.

В широко распространенном варианте обучение без учителя выглядит следующим образом. Имеется набор входных векторов. Набора соответствующих выходных векторов нет. Обучить сеть означает подобрать ее параметры так, чтобы она некоторым «оптимальным» образом классифицировала входные векторы. ИНС надо обучить разбивать множество входных векторов на группы (классы) так, чтобы в один класс попадали близкие друг к другу векторы, а отличия между классами были относительно велики. Это делается путем оптимизации целевой функции, зависящей от двух упомянутых факторов. При подаче нового входного вектора, обученная сеть отнесет его к одному из классов, которые она сформировала сама (без учителя). Один из самых известных примеров такого способа решения задач классификации – обучение сети Кохонена, см., например, [79].

В настоящее время существует масса литературы по нейронным сетям, освещающей самые различные вопросы от выбора архитектуры ИНС до обучения и практических примеров применения. В том числе есть множество работ, доступных широкому читателю [115, с.171-203, 63, 64, 69, 79, 164, 346]. Некоторые дополнительные детали и примеры применения ИНС при моделировании по временным рядам представлены в пп. 10.2.1.3, 10.2.1.6.