Введение

В предлагаемой вниманию читателя книге мы смотрим на проблему математического моделирования глазами прикладников, используя математику как инструмент для получения практически полезных решений. Математическая модель – это знаковая конструкция, свойства которой должны совпадать с интересующими нас свойствами объекта. С прикладной точки зрения главное – создать такую конструкцию, которая позволяла бы достичь цели моделирования. При этом может оказаться, что сама модель или способ ее получения недостаточно совершенны в смысле научной эстетики: постановка задачи не совсем корректна, решение не единственно и т.п. Но стоит ли говорить о единственной «истинной» математической модели реальной системы, если сама математика появилась сравнительно недавно, а Вселенная и объекты моделирования много раньше? Этот и другие полемические вопросы, часть из которых принадлежит к категории «вечных», обусловили появление *главы* 1. В ней рассматриваются общие проблемы моделирования: определения и систематизации моделей, роль математики и причины ее всесилия, пути построения моделей. К вопросам этого круга можно отнести затронутые во второй части книги понятия некорректно поставленных и плохо обусловленных задач (*глава* 5).

Глава 2 посвящена вопросам, касающимся различных «мировоззренческих» подходов к моделированию, которые в определенной степени альтернативны и отличаются уровнем оптимизма при суждении о принципиальной предсказуемости явлений и процессов. Первый, очень оптимистичный, детерминистический (динамический) подход ранее «утверждал» практическую возможность точного прогноза будущего по точно определенному настоящему. Сейчас, после обнаружения явления динамического хаоса, когда термин «нелинейная динамика» стал очень популярным, претензии на *практически достижимую* точность прогноза стали более умеренными. Второй подход – вероятностный (стохастический) – менее оптимистичен: здесь отказываются от претензий на точный прогноз, ограничиваясь указанием вероятности того или иного варианта будущего. В *главе* 2 обсуждаются оценки возможностей прогноза и основания для объявления исследуемого процесса случайным. На примере известной задачи о подбрасывании монеты иллюстрируется необходимость «сотрудничества» динамической и вероятностной позиций и ограниченность возможностей каждой из них в отдельности.

В книге описываются, главным образом, динамические модели и пропагандируются приемы нелинейной динамики – достаточно молодого научного направления, которое еще развивается и терминология которого до конца не устоялась. Человеку, начинающему заниматься этими

вопросами, может помешать то, что даже ведущие специалисты иногда используют один и тот же термин почти в противоположных смыслах (см., например, подборку определений динамической системы – одного из основных понятий нелинейной динамики – в п. 2.1.1). Поэтому мы часто обсуждаем термины и привели краткий обзор основных понятий нелинейной динамики и ее способов представления информации.

Глава 3 представляет основные возможности математического аппарата, реализующего динамический подход, и некоторые эталонные модели. Основное внимание уделено дифференциальным уравнениям и точечным отображениям как наиболее популярному аппарату для динамического моделирования, а отчасти и из-за субъективных привязанностей авторов. *Глава* 4, заключительная в первой части книги, преследует аналогичную цель, представляя эталонные стохастические модели.

Если *целью первой части* книги (главы 1 – 4) является представление общей картины моделирования процессов изменения во времени, то *вторая часть* (главы 5 – 11) посвящена только одному подходу к моделированию – эмпирическому. Ранее он не относился к числу самых «уважаемых», как шитье платья путем обматывания клиента куском материи, затем сшиваемой по бокам. Но сейчас, когда стали доступны высокопроизводительные компьютеры, сформировалась концепция динамического хаоса и стало ясно, что сложное поведение может описываться и достаточно простыми нелинейными моделями, он переживает второе рождение. Зачастую такой подход – единственно возможный, поскольку далеко не всегда удается реализовать наиболее проверенный и надежный путь – записать модельные уравнения, исходя из так называемых «первых принципов» (общих законов для данной области явлений, таких как законы сохранения, законы Ньютона в механике, уравнения Максвелла в электродинамике, и т.п.) с учетом особенностей объекта. На практике типичны ситуации, когда основным источником информации о поведении объекта являются данные измерений наблюдаемой величины, сделанных в последовательные моменты времени, – *временные ряды*.

Создание моделей по экспериментальным временным рядам в математической статистике и теории автоматического управления получило название *идентификации систем* [111], а в нелинейной динамике – *реконструкции динамических систем*[1] [6, 115, 212].

[1] Использование слова «реконструкция» полностью адекватно лишь случаю восстановления уравнений по их решениям. При моделировании реальных систем больше подходит термин «построение модели». Но поскольку термин «реконструкция» широко представлен в литературе, мы также будем его часто употреблять и в отношении практических задач.

Предшественницами современных задач реконструкции были задачи аппроксимации и статистического исследования зависимостей между наблюдаемыми величинами, которые рассматривались уже в середине XVIII века в работах И. Ламберта (см. например исторический очерк [61]). Первоначально наблюдаемые процессы моделировались с помощью явных функций времени $\eta = f(t)$, аппроксимирующих множество экспериментальных точек на плоскости (t, η). Целью моделирования были прогноз будущего развития процесса или сглаживание наблюдаемых зашумленных данных. В начале XX века серьезный шаг в развитии методов эмпирического моделирования сложных процессов был сделан в математической статистике, когда было предложено использовать *линейные стохастические* модели [338]. Этот подход был основным в течение полувека (1920-е – 1970-е) и нашел многочисленные приложения, особенно для автоматического управления [45, 111, 146]. Формирование концепции динамического хаоса и развитие вычислительной техники привели к тому, что в последние годы эмпирическое моделирование проводится уже на основе нелинейных разностных и дифференциальных уравнений, в том числе многомерных. Пионерскими в этой области являются работы [196, 216, 215, 224, 200, 206, 181, 197, 273, 231, 230, 317, 187]. Рассматриваемые проблемы актуальны как в фундаментальном, так и в прикладном плане. Эмпирические модели востребованы в различных областях науки и практики [142]: в физике, метеорологии, сейсмологии, экономике, медицине, физиологии и др.

В *главах* 5 – 11 проводится обзор проблем и методов построения эмпирических моделей по временным рядам, дополняющий обзорные материалы, имеющиеся в избранных главах из книг [281, 326, 180, 254, 212, 115, 280, 277, 6] и статьях [182, 291, 135, 10, 193, 233, 305, 334, 38]. В основном, мы говорим о конечномерных детерминированных моделях в виде точечных отображений или обыкновенных дифференциальных уравнений. Материал излагается с опорой на типовую схему процесса моделирования, представленную в *главе* 5. *Глава* 6 посвящена вопросам получения экспериментальных данных и их предварительному анализу с целью извлечения дополнительной информации об объекте, полезной для формирования структуры модельных уравнений. В *главе* 7 многие важные проблемы эмпирического моделирования обсуждаются на примере самого простого вида моделей – явных функций времени. Дальнейшее изложение проведено по принципу «от простого к сложному» – по мере уменьшения априорной информации об объекте: от случая, когда известно почти все и остается только вычислить значения параметров в модельных уравнениях (*глава* 8) через промежуточный вариант (*глава* 9) до ситуации, когда о «подходящем» виде уравнений ничего не известно априори (*глава* 10). В

главе 11 представлены примеры полезных приложений эмпирических моделей.

В списке источников для удобства читателя, вооруженного компьютером и имеющего доступ к сети Интернет, приведены адреса ресурсов, содержащих полезную информацию по рассматриваемой тематике: статьи, методические пособия, обучающие и иллюстративные компьютерные программы, которые дополняют изложенный материал.