Глава 11. Практические приложения эмпирических моделей

Области знаний, в которых *моделирование по рядам данных* имеет приложения, трудно перечислить (от астрофизики до медицины и техники). Очень разнообразны и цели моделирования. Поэтому мы ограничимся лишь несколькими примерами, демонстрирующими большую практическую значимость этого направления.

Самым известным приложением является, конечно же, *прогноз* будущего по наблюдаемому временному ряду. Мы уже обсуждали это вопрос в пп. 7.4.1, 10.2.1, 10.3 и здесь ограничимся лишь краткими комментариями. Это действительно наиболее интригующая задача, которая рассматривается в различных отраслях науки и практики [142, 112, 277, 281, 326]. У всех на слуху задачи прогноза погоды и климата, землетрясений, курсов акций и валют и пр. Но применительно к таким сложным процессам эмпирические модели оказались полезными пока только в отдельных случаях. Основные причины трудностей – «проклятие размерности» (возрастающие трудности моделирования при увеличении размерности исследуемого движения), дефицит экспериментальных данных, значительные шумы, нестационарность. Однако в более простых и определенных прикладных ситуациях вероятность успеха возрастает.

Другой полезной возможностью, которую дает моделирование по временным рядам, является проверка адекватности имеющихся представлений об «устройстве» исследуемого объекта. Это позволяет *улучшить понимание* «механизмов» его функционирования. Речь идет о том, что положительный результат построения модели (ее высокое качество) может быть истолкован как одно из доказательств правильности физических соображений, заложенных в ее структуру (см. пп. 8.2.2 и 9.3). Это самодостаточная фундаментальная ценность, которая может привести впоследствии к разнообразным практическим приложениям.

Мы не будем подробнее иллюстрировать успехи эмпирических моделей для решения задач этих двух типов (отчасти мы коснулись их в пп. 8.2.2, 9.3, 9.4, 10.2.1.6), а рассмотрим менее известные приложения, развитые в последние годы. Это выделение квазистационарных участков в нестационарном сигнале (п. 11.1), многоканальная передача информации (п. 11.2), определение направленности взаимодействия между осцилляторами (п. 11.3) и некоторые другие (п.11.4).

11.1. Сегментация нестационарных временных рядов

С позиций теории случайных процессов *нестационарность* процесса означает изменение его многомерных функций распределения на интервале наблюдения. На практике большинство процессов нестационарны, особенно в биологии, геофизике или экономике.

Нестационарность приводит к значительным трудностям для моделирования, едва ли не столь же большим, как «проклятие размерности». В то же время, сам характер нестационарности может представлять интерес при исследовании объекта.

Под *динамической нестационарностью* понимают ситуацию, когда исходный объект (процесс) может быть описан дифференциальными или разностными уравнениями, но с *переменными* параметрами [301, 302]. Одна из причин, по которой понятие динамической нестационарности может быть практически востребовано, это – возможность более точного обнаружения момента изменения параметров системы, чем по статистическим характеристикам. Если при изменении параметров существовавший динамический режим системы потерял устойчивость, система может еще некоторое время оставаться в прежней области фазового пространства. Статистические свойства наблюдаемого ряда при этом сильно не меняются. Однако со временем обязательно установится другой динамический режим, и может быть важно как можно раньше обнаружить грядущее изменение.

Основная идея исследования подобных процессов состоит в разделении исходного ряда на M сегментов длиной $L \le N_{st}$, на которых система признается стационарной. Затем проводится статистическое оценивание или реконструкция уравнений по каждому из этих сегментов отдельно. Статистические тесты основаны на расчете некоторых статистик (эмпирических моментов, спектров мощности и т.п.) в каждом сегменте N_j и последующем сравнении сегментов по близости значений этих статистик. Вводится расстояние d между сегментами и составляется матрица расстояний $d_{i,j} = d(N_i, N_j)$. По величине этих расстояний судят о стационарности процесса. Часто используют следующие характеристики.

1) Сравнение эмпирических вероятностных распределений по критерию χ^2 [237]. Для его вычисления диапазон значений наблюдаемой, принимаемых ею на всем временном ряде, разбивается на H ячеек. Рассчитывается количество точек, попавших в каждую ячейку из каждого из двух сравниваемых сегментов; отличие распределений вычисляется как $d_{i,j}^2 = \chi^2 = \sum_{k=1}^{H} \frac{(n_{k,i} - n_{k,j})^2}{n_{k,i} + n_{k,j}}$, где $n_{k,i}$ и $n_{k,j}$ – количество точек, попавших в k-ю ячейку из i-го и j-го сегмента ряда соответственно. Эта статистическая мера может показывать нестационарность при постоянстве оператора эволюции в случае переходных процессов.

2) Сравнение по близости/отличию эмпирических моделей – построение глобальных моделей с векторами параметров $\hat{\mathbf{c}}_i, \hat{\mathbf{c}}_j$ и введение

расстояния между сегментами как евклидова расстояния между векторами параметров [235]: $d_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{P} (\hat{c}_{k,i} - \hat{c}_{k,j})^2$.

Результаты анализа ряда (рис.11.1,а) удобно отображать на так называемой «диаграмме возвратов» (рис.11.1,б), где по осям отложены начальные точки участков ряда i и j, а величины расстояния между участками показаны в серых полутонах. Белый цвет соответствует сильно различающимся сегментам ряда (большим расстояниям), черный цвет – практически одинаковым (нулевым расстояниям). Проиллюстрируем возможности методики, используя в качестве объекта одномерное отображение

$$x_{n+1} = c_0(n)\cos x_n . \qquad (11.1)$$

Наблюдается величина $\eta = x$, наблюдаемый ряд имеет длину 2000 точек.

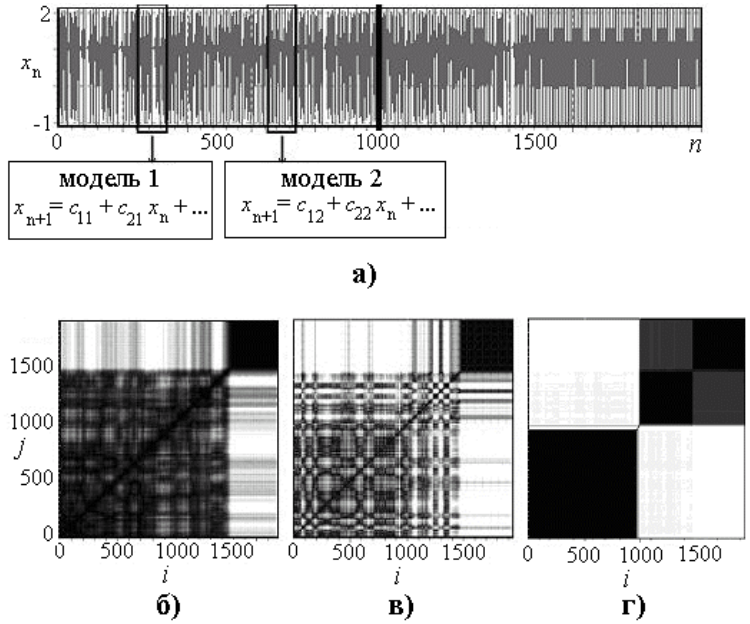


Рис.11.1. а) Временная реализация отображения (11.1). б)-г) Результаты ее исследования на стационарность: б) расстояния между сегментами рассчитываются как расстояния между эмпирическими плотностями распределения по критерию χ^2, в) параметры одномерных эмпирических моделей вида $x_{n+1} = f(x_n, \mathbf{c})$ с многочленом f порядка $K = 2$, г) то же самое для $K = 6$

В момент $n = 1000$ параметр c меняет значение $c_0 = 2.1$, которому соответствует хаотический аттрактор в фазовом пространстве, на $c_0 = 2.11735$, при котором устанавливается режим периода 7. Однако новый режим устанавливается после достаточно длительного (около 400 итераций) переходного процесса, так что большинство статистических свойств, например, среднее и дисперсия, меняются только к моменту n = 1400 (рис.11.1,а). На рис.11.1,б-г представлены диаграммы возврата.

Сравниваются участки ряда длиной по 200 точек. Большая темная область на такой диаграмме означает квазистационарный сегмент, а границы между двумя темными областями – момент изменения свойств сигнала, влияющих на величину расстояния. На рис.11.1,б диаграмма получена на основе меры χ^2, а на рис.11.1,в,г – на основе параметров менее и более совершенных моделей $x_{n+1} = f(x_n, \mathbf{c})$ с алгебраическими многочленами. Видно, что статистическая мера χ^2 обнаруживает происшедшие в системе изменения с опозданием, по сравнению с хорошей динамической моделью. Рис.11.1,в,г показывает также, что методы, направленные на обнаружение динамической нестационарности, правильно работают только при достаточно высоком качестве модели. Пример использования описанного *динамического подхода* для выделения участков стационарности внутричерепной электроэнцефалограммы (ЭЭГ) пациента с височной эпилепсией представлен в [219].

Выделение квазистационарных участков имеет ценность и для построения модели. При моделировании желательно использовать весь имеющийся временной ряд, чтобы получить более точные оценки параметров, но в случае нестационарности модель с постоянными параметрами неадекватна. Нужно строить ее по *квазистационарному* участку, причем как можно более длинному. Как заранее узнать максимальную длину участка ряда, на которой он еще квазистационарен? Это можно сделать с использованием диаграммы возвратов, отыскав наиболее протяженный черный квадрат, расположенный на диагонали. К нему можно добавить «похожие» на него сегменты из других временных отрезков и построить модель повторно по полученному максимально длинному квазистационарному участку. Такой подход был реализован в применении к ЭЭГ в [235].

«Родственные» задачи выделения моментов резких изменений рассмотрены в работах [136, 11].

11.2. Конфиденциальная передача информации

Актуальным направлением исследований в радиофизике является разработка систем связи с использованием хаотической несущей [77]. В связи с этим отметим интересную прикладную возможность методов оценки параметров модели по нестационарным хаотическим временным рядам для многоканальной конфиденциальной передачи информации [8, 185]. Основная идея состоит в следующем. Пусть имеется некоторая нелинейная динамическая система $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$, параметры $\mathbf{c}_0$ которой медленно меняются во времени $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0(t)$. Хаотическая временная реализация этой системы (например, одна из координат $\eta(t) = x_1(t)$)

является передаваемым сигналом, а изменения параметров $\mathbf{c}_0(t)$ – информационными сигналами, которые не передаются непосредственно.

Необходимые условия для возможности извлечения информационных сигналов из хаотического наблюдаемого сигнала:

1) должна быть полностью известна структура динамической системы, используемой в качестве передатчика, т.е. для генерации хаотического временного ряда с меняющимися параметрами,

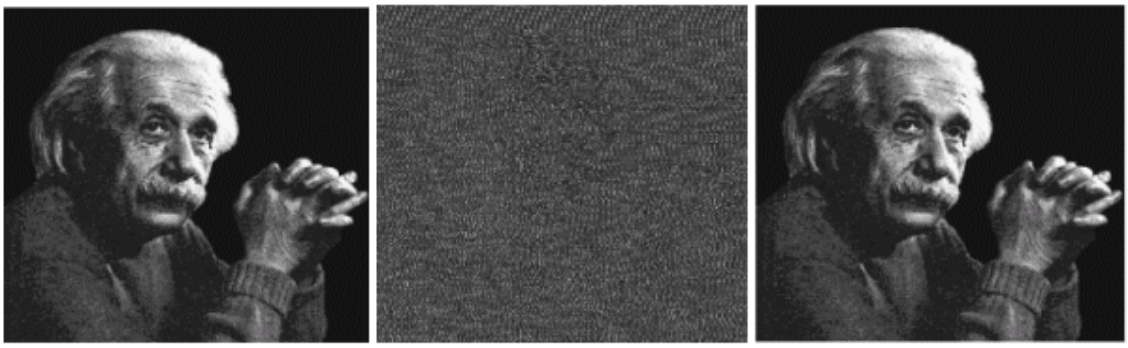
2) ее параметры $\mathbf{c}_0$ должны меняться гораздо медленнее характерного времени колебаний этой системы.

Тогда, оценивая параметры модели соответствующего вида $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$ по последовательным квазистационарным участкам ряда $\eta(t)$ с помощью одного из методов, изложенных в главах 8-10, можно получить реализации всех параметров системы по единственной наблюдаемой реализации $\eta(t)$.

В [185] рассмотрен пример передачи графического изображения в серых полутонах. В качестве системы, генерирующей хаотический сигнал, были взяты уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко – Астахова):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + 0.5g\left(x + |x|\right)x. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Информационный сигнал представлял собой значения интенсивности окраски пикселов (256 возможных значений в шкале серого) на портрете Эйнштейна (рис.11.2,а). Информационным сигналом модулировались значения параметра g в интервале [0.15, 0.25] при m = 1.5. Информация передавалась с помощью переменной $\eta(t) = y(t)$, к которой добавлялся слабый шум. Сигнал в канале связи выглядит просто шумом (рис.11.2,б). Если структура динамической системы – генератора сигнала – неизвестна, то восстановить передаваемую информацию невозможно, или, по крайней мере, очень сложно. Результаты восстановления сигнала «в приемнике» с помощью реконструкции по временному ряду представлены на рис.11.2,в.



а) б) в)

Рис.11.2. Передача информации с помощью реконструкции: а) исходное изображение (500 на 464 пиксела); б) сигнал y в канале связи; в) восстановленное изображение [185]

В рассмотренном примере передавался только один скалярный информационный сигнал $g(t)$, хотя можно менять одновременно несколько параметров генератора. На практике возникают связанные с наличием шумов в канале связи ограничения на количество одновременно передаваемых сигналов $c_{0,k}(t)$, которые можно успешно восстановить по наблюдаемой реализации $\eta(t)$ [185]. Развитие тематики представлено в [139, 288].

11.3. Определение характера связи между осцилляторами

Из параметров эмпирических моделей может быть извлечена и полезная физическая информация. В работе [295] предложен подход к решению важной во многих областях практики задачи – определение направления взаимодействия между двумя колебательными системами только по их временным рядам. Это важно, например, для локализации эпилептического фокуса (очага патологии) по записям электро- или магнитоэнцефалограмм, поскольку предположительно для некоторых видов эпилепсии (фокальной эпилепсии) именно усиление воздействие очага патологии на соседние области может вызывать эпилептические припадки. Определив, какая из областей активнее действует на другие перед припадком, можно было бы сказать, что близко к ней расположен эпилептический фокус.

Причем особенно важно уметь выявлять слабую связь, т.к. для обнаружения сильной связи существует достаточно много хорошо зарекомендовавших себя методов (взаимная корреляционная функция, функция когерентности и т.д.). Для определения слабой связи была предложена методика, основанная на реконструкции модельных уравнений фазовой динамики. В качестве модельных переменных выступают именно *фазы* колебаний осцилляторов (см. п. 6.4.3), поскольку они наиболее чувствительны к внешним воздействиям [137]. Теоретической основой методики является предположение, что фазовая динамика систем X и Y

подчиняется следующей достаточно простой и, в то же время, универсальной системе стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\phi_x/dt &= \omega_x + F_x(\phi_x,\phi_y) + \xi_x, \\ d\phi_y/dt &= \omega_y + F_y(\phi_x,\phi_y) + \xi_y, \end{aligned} \tag{11.3}$$

где $\phi_{x,y}(t)$ – «развернутые» фазы колебаний систем X и Y, $\omega_{x,y}$ – параметры, определяющие циклические частоты колебаний, $F_{x,y}$ – функции, 2π-периодические по обоим аргументам (из-за физического смысла фаз), $\xi_{x,y}$ – нормальные белые шумы. Система (11.3) адекватно отражает свойства широкого круга колебательных процессов в случае, когда исследуемые системы X и Y имеют ярко выраженные основные ритмы колебаний [286, 174], что требуется для корректного определения фазы, см. п. 10.1.

Методика выявления связи по временному ряду состоит в следующем. По имеющимся временным рядам от первой и второй систем – $x(t)$ и $y(t)$ – рассчитываются реализации фаз сигналов – $\phi_x(t)$ и $\phi_y(t)$ – с помощью известных методов (п. 6.4.3) [137, 262]. Модель строится не точно в виде (11.3), а в похожей форме, которая более удобна для построения по временному ряду. Это системы стохастических *разностных* уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_x(t+\tau) - \phi_x(t) &= f_x(\phi_x(t),\phi_y(t),\mathbf{c}_x), \\ \phi_y(t+\tau) - \phi_y(t) &= f_y(\phi_x(t),\phi_y(t),\mathbf{c}_y), \end{aligned} \tag{11.4}$$

где τ – фиксированный интервал, примерно равный характерному периоду колебаний, $f_{x,y}$ – тригонометрические многочлены невысокого порядка:

$$\begin{aligned} f_x(\phi_x,\phi_y) &= a_0^{(x)} + \sum_{m,n}\left(a_{m,n}^{(x)}\cos\left(m\phi_x + n\phi_y\right) + b_{m,n}^{(x)}\sin\left(m\phi_x + n\phi_y\right)\right), \\ f_y(\phi_x,\phi_y) &= a_0^{(y)} + \sum_{m,n}\left(a_{m,n}^{(y)}\cos\left(m\phi_x + n\phi_y\right) + b_{m,n}^{(y)}\sin\left(m\phi_x + n\phi_y\right)\right). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Это тот случай, когда тригонометрическая система – наилучший базис для аппроксимации, т.к. функции $f_{x,y}$, входящие в уравнения (11.4), должны быть 2π-периодичны из-за физического смысла своих аргументов – фаз.

Коэффициенты многочленов оценивают обычным МНК. По полученным оценкам $\hat{a}_{m,n}^{(x,y)}, \hat{b}_{m,n}^{(x,y)}$ рассчитываются оценки силы воздействия систем друг на друга. Степень влияния $\hat{c}_{y\to x}^2$ системы Y на систему X определяется крутизной зависимости функции f_x от фазы ϕ_y и аналогично для $\hat{c}_{x\to y}^2$:

$$\hat{c}^2_{y\to x} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\partial f_x(\phi_x,\phi_y,\hat{a}^{(x)}_{m,n},\hat{b}^{(x)}_{m,n})\big/\partial\phi_y\right)^2 d\phi_x d\phi_y,$$
$$\hat{c}^2_{x\to y} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\partial f_y(\phi_x,\phi_y,\hat{a}^{(y)}_{m,n},\hat{b}^{(y)}_{m,n})\big/\partial\phi_x\right)^2 d\phi_x d\phi_y. \quad (11.6)$$

Нормированный индекс направленности связи определяется как

$$d^{(x\to y)} = \frac{\hat{c}_{x\to y} - \hat{c}_{y\to x}}{\hat{c}_{x\to y} + \hat{c}_{y\to x}}. \quad (11.7)$$

Он принимает значения от -1 до 1 (т.к. величины $\hat{c}_{y\to x, x\to y}$ положительны по способу их расчета). Он положителен, если сильнее действует система *X* на систему *Y*, отрицателен – в противоположном случае; равен 1 по модулю при однонаправленной связи, нулю – при симметричной связи.

Чувствительность методики к слабой связи была показана в численных экспериментах [295]. Условием ее применимости при существенных уровнях динамических шумов $\xi_{x,y}$ в исходных системах является большая длина тренировочного ряда (типичные числа – порядка 1000 характерных периодов). Она уже дала интересные результаты при исследовании сложного реального процесса, где такие ряды были доступны. Речь идет о взаимодействии между сердечно-сосудистой и дыхательной системами человека в [294]. Согласно проведенным исследованиям, характер этого взаимодействия у младенцев меняется с возрастом от симметричного до преимущественного воздействия дыхательной системы на сердечно-сосудистую. Такая информация представляет интерес для физиологов, т.к. дает дополнительные аргументы для той или иной теоретической точки зрения.

Но применение методики на практике часто сталкивается с существенными трудностями, когда исследуемые временные ряды нестационарны. Важно выявлять взаимодействие между областями мозга по электроэнцефалограммам, но интервал их квазистационарного поведения (порядка десятка секунд) не более примерно 100 характерных периодов для любых «физиологических ритмов». Этого слишком мало для получения надежных результатов. При анализе нестационарных рядов приходится делить их на относительно короткие сегменты и рассчитывать направление связи отдельно для каждого сегмента. Попытка применить описанную методику к таким коротким рядам приводит к получению смещенных оценок. Причины показаны в работе [313], где введены поправки к оценкам $\hat{c}^2_{x\to y}$ и $\hat{c}^2_{y\to x}$. Новые оценки обозначены $\gamma_{x\to y}$ и $\gamma_{y\to x}$. Для характеристики направленности связи использована величина $\delta = \gamma_{x\to y} - \gamma_{y\to x}$. Выведены формулы и для 95%-ных доверительных

интервалов, что позволяет оценивать статистическую значимость результатов, полученных по отдельной реализации.

Пример применения уточненных оценок для анализа двухканальной ЭЭГ пациента с височной эпилепсией представлен на рис.11.3. Перед эпилептическим припадком выявляется усиление воздействия височной доли коры на гиппокамп (рис.11.3,в). Результат согласуется с предварительной информацией клиницистов о том, что очаг патологии расположен в коре. Это позволяет рассчитывать на то, что методика окажется полезной как дополнительное средство для локализации эпилептического фокуса (очага патологии) [315]. Однако для такого вывода требуется исследование больших ансамблей данных, которое пока отсутствует.

Представленные результаты представляют интерес для фундаментальных физиологических исследований и для прикладных задач медицинской диагностики [213]. Сопоставление описанного метода с другими известными методами анализа связанности проведено в работе [312].

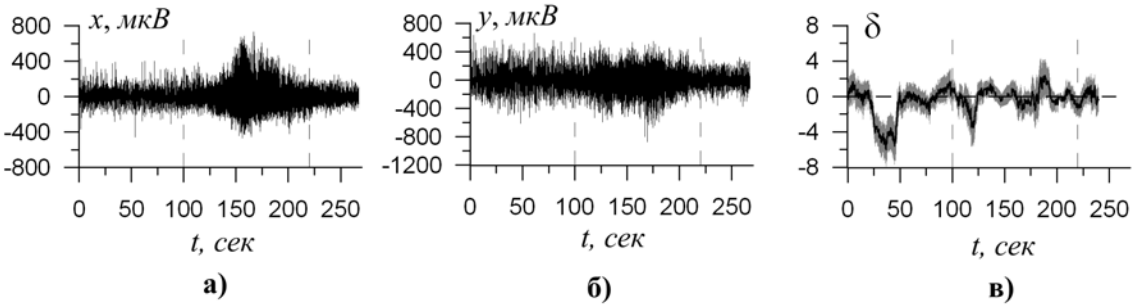


Рис.11.3. Внутричерепные ЭЭГ: а) гиппокамп, б) височная доля коры (эпилептический фокус). в) Индекс направленности связи со своим 95%-ным доверительным интервалом (серый шлейф). Пунктиром отмечены начало и конец эпилептического припадка. Индекс δ значимо меньше нуля (влияние неокортекса на гиппокамп) перед припадком

11.4. Другие приложения

В заключение, кратко отметим еще некоторые из разнообразных приложений эмпирических моделей.

1) «*Прогноз бифуркаций*» *в слабонеавтономных системах* [206, 123, 166, 225]. В ситуации медленного изменения параметров объекта по последовательным сегментам временного ряда строятся модели одинаковой структуры. Оценки их параметров медленно меняются при переходе от одного сегмента к другому. По полученному временному ряду значений параметров $\mathbf{c}_j, j = 1,...,M$ строят модель для *прогноза будущего изменения параметров*, например, в виде явной временной зависимости (п. 7.4.1). Для каждого будущего момента времени j получают предсказанное значение параметров и фиксируют, какому режиму

динамики автономной системы оно соответствует. Таким образом, можно предсказать изменение наблюдающегося динамического режима, т.е. бифуркацию в автономной системе, которая произойдет, когда значение **c** пересечет границу области значений параметров, соответствующую этому динамическому режиму. Прогноз бифуркаций возможен при тех жестких условиях, что модель адекватна для описания динамики объекта в широкой области пространства параметров, включая и динамический режим, который должен наблюдаться после бифуркации, и границы области существования текущего динамического режима в пространстве параметров.

2) *Восстановление сигнала внешнего воздействия* по хаотической временной реализации одной динамической переменной неавтономной системы. Это полезно, если сигнал воздействия несет важную информацию и не может быть измерен непосредственно, а доступен наблюдению только результат его воздействия на некоторую нелинейную систему. В работе [67] проиллюстрирована на численном примере принципиальная возможность такого восстановления, где внешнее воздействие – не обязательно медленно меняющееся.

Необходимые условия: структура системы, на которую осуществляется воздействие, и способ внесения этого воздействия должны быть известны априори; должен быть доступен и временной ряд от автономной системы. Сначала по этому ряду оцениваются параметры автономной системы. Затем, используя полученные оценки, восстанавливается реализация внешнего воздействия по наблюдаемому ряду от неавтономной системы.

3) *Классификация сигналов.* Одной из важных задач является задача разделения объектов на группы (классы) схожих между собой на основе экспериментальных данных. Общим подходом к классификации сигналов является введение понятия расстояния между двумя сигналами, расчет расстояний попарно между всеми сигналами и на основании матрицы расстояний разбиение их на группы (кластеры) с помощью одного из известных алгоритмов. Различные алгоритмы кластеризации изучаются таким разделом статистики как кластерный анализ [87]. Одним из вариантов введения расстояния между сигналами может быть оценка отличия эмпирических моделей, построенных по сигналам [252].

В этих терминах можно сформулировать и задачу выделения квазистационарных сегментов п. 11.1: различные сегменты одного сигнала рассматриваются как различные сигналы, которые на основе диаграммы возвратов объединяются в кластеры – квазистационарные участки.

4) *Управление* техническими объектами реализуется регулировкой параметров объекта, к которым имеется доступ. Поиск оптимальных

параметров реального устройства на практике может быть реализован следующим образом:

- провести измерения при различных параметрах объекта;
- построить эмпирическую модель с заданной структурой по каждому набору данных;
- выявить параметры модели, изменение которых соответствует изменению управляющих параметров объекта;
- исследуя модель, выявить параметры, оказывающие наибольшее влияние на характер ее динамики;
- исследуя модель, найти такие значения последних, которые обеспечивают «наилучший режим функционирования объекта»;
- задать значения параметров объекта, соответствующие найденным.

В работе [66] такой подход предложен и отчасти реализован в отношении системы стабилизации резонансной частоты и температуры секции линейного ускорителя электронов.

5) *Расчет статистических характеристик аттракторов по коротким временным рядам* [136]. Одной из важных задач нелинейного анализа хаотических временных рядов является расчет таких характеристик аттрактора, как ляпуновские показатели и фрактальная размерность [220-222, 253, 254, 337]. Но для надежной оценки этих величин без помощи математических моделей необходимы очень длинные (чтобы траектория много раз возвращалась в окрестность каждой своей точки) и достаточно «чистые» временные ряды, которые на практике не всегда могут быть получены по техническим причинам. Глобальная динамическая модель может быть успешно построена по гораздо более короткому ряду, если она содержит небольшое число параметров. Получив модель, рассчитывают ляпуновские показатели и размерность ее аттрактора (п. 2.1.4) и принимают полученные значения в качестве искомых оценок.

6) Тестирование на нелинейность и детерминизм [310, 326]. При исследовании динамики сложных объектов часто не удается получить адекватной модели, надежно оценить размерность и т.д. Приходится ставить более скромные вопросы, но они также могут быть достаточно важны и содержательны. Один из таких вопросов: является ли динамика исследуемой системы нелинейной? Ответ на него возможен с помощью эмпирических моделей. Одна их методик выглядит следующим образом.

Строятся локальные линейные модели с различным числом соседей k (пп. 10.2.1.4, 10.2.1.5). Строится график зависимости среднеквадратичной одношаговой ошибки прогноза ε, рассчитанной по тестовому ряду или «перекрестным прогнозом» (п. 7.2.3.4), от k. При значениях k, близких к длине тренировочного ряда, получаем глобальную линейную модель. При малых k – разные наборы коэффициентов в различных малых областях

фазового пространства. Если исходный процесс – линейный, то ошибка прогноза уменьшается с ростом k, т.к. уточняются оценки параметров (используется большая окрестность) без нарушения адекватности модели. Если процесс – нелинейный, то ошибка минимальна при некотором промежуточном k, когда оно достаточно велико, чтобы усреднить шум, но окрестность достаточно мала, чтобы линейная аппроксимация была пригодна. Таким образом, по графику $\varepsilon(k)$ можно сделать вывод о наличии нелинейности и оценить масштаб, на котором она проявляется [326].

7) Адаптивная фильтрация шума [223, 259, 217]. В наиболее общей постановке имеется наблюдаемый сигнал $\eta(t)$, который состоит из смеси «полезного» сигнала $X(t)$ и «мешающего» сигнала $\xi(t)$ – шума:

$$\eta(t) = X(t) + \xi(t). \tag{11.8}$$

Задача состоит в том, чтобы выделить сигнал $X(t)$, т.е. получить сигнал $\hat{X}(t)$, который меньше отличается от $X(t)$, чем наблюдаемый сигнал $\eta(t)$ [223]. Выражение (11.8) соответствует часто обсуждавшейся в главах 7 и 8 ситуации измерительного шума. Особенно этот шум мешал численному дифференцированию, где для его снижения использовался фильтр Савицки – Голэя (п. 7.4.2) – вариант линейной фильтрации [147]. Но все линейные фильтры основаны на предположении о том, что «интересная» динамика $X(t)$ и шум $\xi(t)$ имеют различные характерные масштабы, т.е. их мощности сосредоточены в различных полосах частот (п. 6.4.2.1). Как правило, шум предполагается очень высокочастотным (на этом основано применение фильтра Савицки – Голэя для дифференцирования) или очень низкочастотным (медленный дрейф среднего значения и т.п.).

Однако может оказаться, что шум имеет те же временные масштабы, что и сигнал. При этом линейная фильтрация не поможет, но может быть эффективной нелинейная фильтрация, которая основана на построении и использовании нелинейных моделей. Основная идея очень проста. *Остатки модели* $\varepsilon(t)$ (п. 7.3) являются оценками шума (факторов, которые не объясняются построенной моделью). Тогда можно получить оценку сигнала, вычитая из наблюдаемой $\eta(t)$ оценки шума $\varepsilon(t)$:

$$\hat{X}(t) = \eta(t) - \varepsilon(t). \tag{11.9}$$

Вариантов реализации подхода множество. В одной из первых работ [223] использовались локальные линейные модели. Здесь играют ключевую роль проблемы подбора размерности модели и вида аппроксимирующих функций, поскольку неадекватная модель дает

смещенные оценки $\hat{X}(t)$, которые могут быть совсем не похожими на истинный сигнал $X(t)$, т.е. происходит не фильтрация шума, а дальнейшее искажение сигнала.

8) Наконец, напомним еще раз такую перспективную возможность приложений, как восстановление характеристик нелинейных элементов электрических цепей и других систем с помощью моделирования в постановке «серый ящик» (см. п. 9.3). Характеристики восстанавливаются с помощью модели даже в режимах больших амплитуд и хаоса, когда они могут быть недоступны измерению с помощью обычных средств. Этот подход успешно реализован для исследования динамических характеристик конденсатора с сегнетоэлектриком [236], полупроводниковых элементов [322, 328], волоконно-оптических систем [333].