Глава 9. Модельные уравнения: восстановление нелинейных характеристик

В случае только *частичной* осведомленности о структуре модельных уравнений $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{c})$ или $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ задача становится сложнее, чем просто *оценка параметров*, рассмотренная в предыдущей главе. На наш взгляд, это наиболее плодотворное и практически полезное направление исследований в области моделирования по временным рядам.

В ситуации, которую мы договорились в п. 5.2 называть «серым ящиком», неизвестны некоторые *компоненты* функции **f**. Проиллюстрируем особенность постановки задачи на простом примере. Пусть объект – нелинейный диссипативный осциллятор, который описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &dx_1/dt = x_2, \\ &dx_2/dt = -\gamma_0 x_2 + F(x_1) + A_0\cos(\omega_0 t + \phi_0), \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\gamma_0, A_0, \omega_0, \phi_0$ – параметры, F – нелинейная возвращающая сила, *вид которой неизвестен*. Пусть в качестве наблюдаемого ряда служит временная реализация переменной x_1: $\eta = x_1$. Отметим, что функция F – это только одна компонента, которая задает поле скоростей динамической системы (9.1) наряду с другими членами в правой части. Это характеристика объекта, которая имеет ясный физический смысл и может представлять сама по себе значительный интерес. По условиям эксперимента ее значения могут быть недоступны *прямому* измерению, т.е. получить экспериментальные точки на плоскости (x_1, F) невозможно. Но информация о функции F содержится в наблюдаемом ряде, т.к. F влияет на динамику объекта. «Выделить» значения F можно косвенным путем: через построение эмпирической модели объекта, в структуре которой заложена модельная функция, соответствующая F. А именно, модель следует строить в виде

$$\begin{aligned} &dx_1/dt = x_2, \\ &dx_2/dt = -\gamma x_2 + f(x_1, \mathbf{c}) + A\cos(\omega t + \phi), \end{aligned} \tag{9.2}$$

где $f(x_1, \mathbf{c})$ должна аппроксимировать F.[1] Если удастся получить «хорошую» модель (9.2), то будет подтверждена справедливость идей, лежащих в основе этой модели, и одновременно восстановлена нелинейная

[1] Аппроксимация функции *одного переменного* много легче общей задачи аппроксимации функции многих переменных, возникающей обычно в случае «черного ящика» (глава 10).

характеристика F в виде $f(x_1, \hat{\mathbf{c}})$. Еще раз подчеркнем, что другого пути измерения характеристики F может не быть.

Интерес, который вызывает информация о характеристиках элементов объекта, недоступных *прямому измерению*, обусловил наш выбор общего названия подобных постановок задачи: *восстановление* (*нелинейных*) *характеристик*. При этом искомые компоненты модельной функции **f** могут иметь различный физический смысл (в рассмотренном примере это возвращающая сила, равная производной потенциальной функции осциллятора, взятой с обратным знаком). Такие постановки возникают, если в структуру уравнений модели заложен физический смысл, что чаще всего имеет место при использовании дифференциальных уравнений, т.к. многие общие законы имеют такую форму.

Как и в главе 8, рассматриваемые модели задают зависимости будущего состояния объекта $\mathbf{x}_{n+1}$ от текущего $\mathbf{x}_n$ или скорости изменения состояния $d\mathbf{x}/dt$ от самого состояния **x**. Отличие состоит лишь в том, что перед процедурой оценки параметров надо задать функциональную форму искомых характеристик (например, разложение в каком-либо функциональном базисе, п. 7.2.4), см. п. 9.1. Из-за этой специфики здесь очень важны вопросы оптимизации структуры модели (п. 9.2) или ее специального подбора для избранных объектов (п. 9.3) или классов объектов (п. 9.4).

9.1. Процедуры восстановления и особенности задачи

Представим некоторые подробности технических процедур реконструкции в данной постановке и начнем для наглядности с отображений.

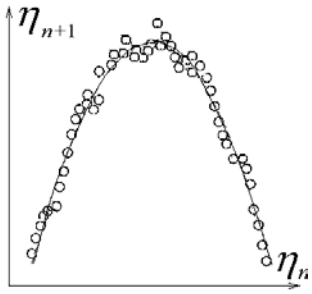


Рис.9.1. Построение одномерного модельного отображения – поиск зависимости следующего значения от предыдущего по экспериментальным

Модельные отображения. Пусть объект – одномерное отображение $x_{n+1} = F(x_n)$. Вид функции F неизвестен, наблюдаемая $\eta_n = x_n$. Считая размерность исходной системы известной, будем строить модель в виде одномерного отображения $x_{n+1} = f(x_n, \mathbf{c})$. Из-за простоты примера в данном случае точки на плоскости (η_n, η_{n+1}) фактически представляют график функции F. Задача – подобрать вид функции $f(x, \mathbf{c})$ и параметры **c** так, чтобы она аппроксимировала эти точки наилучшим образом (рис.9.1). Подчеркнем, что не каждый отдельный параметр, а только вся модельная функция $f(x, \hat{\mathbf{c}})$ теперь может иметь физический смысл.

Мы получили задачу, почти такую же, как в главе 7 (см. рис.7.1,б и

(7.24)). Отличие только в том, что по осям отложены не (t,η), а (η_n,η_{n+1}). Поэтому и методики используются те же, что в п. 7.2, с заменой пары величин (t,η) на (η_n,η_{n+1}). Так, для аппроксимации функции одной переменной (рис.9.1) удобно использовать алгебраические многочлены невысокого порядка или кубические сплайны, см. п. 7.2.4. Параметры оценивают чаще всего с помощью обычного МНК (8.3).

При наличии динамического шума в объекте $(x_{n+1}=F(x_n)+\xi_n)$ в процедуре построения модели ничего не меняется. Измерительный шум $(\eta_n=x_n+\zeta_n)$ существенно усложняет задачу оценки параметров (п. 8.1.2). При низком его уровне еще пригоден обычный МНК (п. 8.1.2.1). При большом уровне желательно было бы использовать более сложные методики (пп. 8.1.2.2, 8.2.1), но в случае «серого ящика» модель, как правило, содержит довольно большое число оцениваемых параметров, что многократно затрудняет использование этих методик.

Модельные дифференциальные уравнения. Для описания сложных, в частности, хаотических, движений обычно используются нелинейные модельные ОДУ $d\mathbf{x}/dt=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{c})$ с числом переменных не менее трех. В рассматриваемой постановке неизвестны некоторые компоненты поля скоростей $\mathbf{f}$, как в примере (9.1) и (9.2). Эти нелинейные характеристики как бы «зашиты» внутри структуры модели и их можно найти, *только* если построить всю модель. Рассмотрим некоторые детали методики.

Первый случай – наблюдаются все динамические переменные x_k: $\eta_k(t_i)=x_k(t_i)+\zeta_k(t_i)$, $k=1,...,D$. Для построения модели нужно аппроксимировать зависимость производной $\dot{x}_k(t_i)$ от состояния $\mathbf{x}(t_i)$ с помощью функции $f_k(\mathbf{x},\mathbf{c}_k)$ для каждого $k=1,...,D$. Значения производных $\dot{x}_k(t_i)$ обычно необходимо получить по наблюдаемым данным $\eta_k(t_i)$ с помощью численного дифференцирования (п.7.4.2). Обозначим полученные оценки $\hat{\dot{x}}_k(t_i)$. «Сглаженные» значения самих наблюдаемых, обычно получаемые как «побочный продукт» при дифференцировании, обозначим $\hat{x}_k(t_i)$. По полученным рядам величин $\hat{x}_k(t_i),\hat{\dot{x}}_k(t_i)$ параметры модельных функций $f_k(\mathbf{x},\mathbf{c}_k)$, которые включают в себя и искомые нелинейные характеристики, рассчитываются с помощью обычного МНК:

$$S(\mathbf{c}_k)=\sum_i\left(\hat{\dot{x}}_k(t_i)-f_k(\hat{\mathbf{x}}(t_i),\mathbf{c}_k)\right)^2\to\min,\ k=1,...,D. \qquad (9.3)$$

Второй случай – наблюдается единственная переменная: $\eta(t_i)=x_1(t_i)+\zeta(t_i)$. Шансы на успешное моделирование появляются, если уравнения исходного объекта с входящими в них нелинейными характеристиками заданы в стандартном виде (3.27) (п. 3.5.3), где

компоненты вектора состояния **x** – последовательные производные переменной $x_1(t_i)$. Модель тогда следует строить также в стандартном виде

$$d^D x(t)/dt^D = f(x(t), dx(t)/dt, d^{D-1}x(t)/dt^{D-1}, \mathbf{c}), \qquad (9.4)$$

Для этого по наблюдаемой $\eta(t_i)$ путем численного дифференцирования (п. 7.4.2) получают оценки $\hat{x}, \hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)}, ..., \hat{x}^{(D-1)}$ и $\hat{x}^{(D)}$ (верхний индекс означает порядок производной). Параметры функции *f*, которая включает в себя нелинейные характеристики, оценивают с помощью обычного МНК:

$$S(\mathbf{c}) = \sum_i \left(\hat{x}^{(D)}(t_i) - f(\hat{x}(t_i), \hat{x}^{(1)}(t_i), ..., \hat{x}^{(D-1)}(t_i), \mathbf{c})\right)^2 \to \min. \qquad (9.5)$$

В обоих случаях методики эффективны при малом измерительном шуме. Желательно также, чтобы функции f_k в (9.3) и *f* в (9.5) линейно зависели от параметров (псевдолинейные модели, см. п. 7.2.4). При большом шуме моделирование крайне затрудняется, т.к. численное дифференцирование еще усиливает его, особенно при расчете *D* производных в (9.5). Обычный МНК становится непригодным, а использование более сложных методик в случае *многомерных* моделей со *значительным* числом неизвестных параметров нереалистично (см. с. 242).

9.2. Оптимизация структуры модели

К задаче о восстановлении характеристик в полной мере относится утверждение о важности выбора структуры модели (пп. 7.2.3, 7.2.4). Для выбора ее размера, например, числа слагаемых многочлена, пригодны критерии, описанные в п. 7.2.3. Но как выбрать функции-слагаемые из большого набора, чтобы обеспечить наилучшую модель заданного размера?

Рассмотрим эффективный подход к подбору функций-слагаемых [25] на примере реконструкции уравнений осциллятора Ван дер Поля – Тоды

$$dx_1/dt = x_2,$$
$$dx_2/dt = (1 - x_1^2)x_2 - 1 + e^{-x}, \qquad (9.6)$$

по ряду наблюдаемой $\eta = x_1$. Соответствующая фазовая траектория, включающая переходный процесс, показана на рис.9.2. Пусть модель имеет вид:

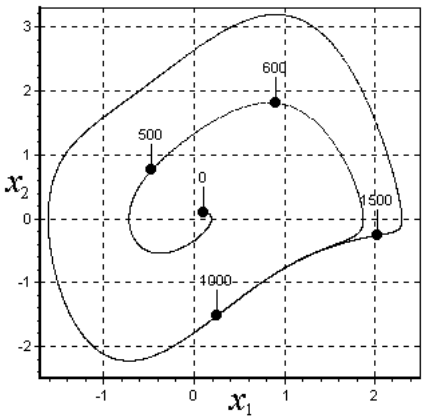
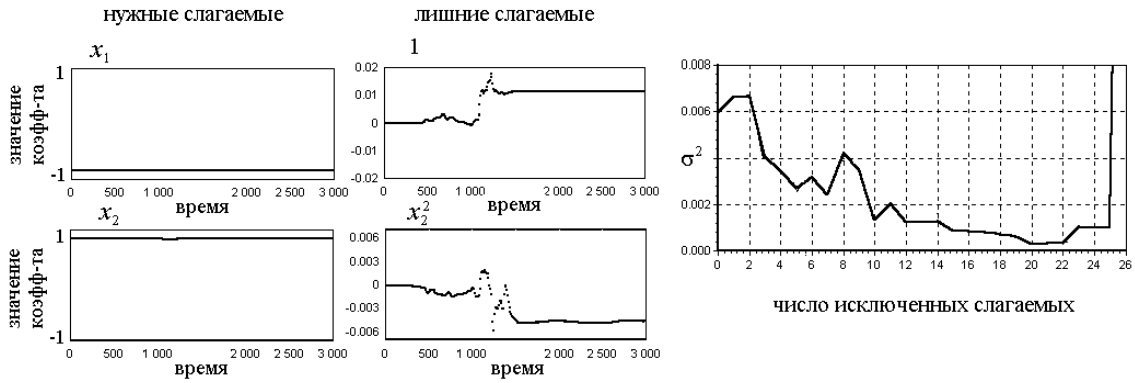


Рис.9.2. Фазовая траектория осциллятора Ван дер Поля – Тоды (9.6), включающая переходный процесс. Аттрактор – предельный цикл. Цифры – номера отсчетов, интервал выборки 0.01

$$dx_1/dt = x_2,$$
$$dx_2/dt = f(x_1, x_2, \mathbf{c}), \tag{9.7}$$

где $f(x, y, \mathbf{c}) = \sum_{i,j=0}^{K} c_{i,j} x^i y^j$, $i + j \le K$. Многие слагаемые этого многочлена «лишние» – не имеют аналогов в уравнении (9.6): $c_{0,0}$, $c_{1,1}x_1x_2$, $c_{0,2}x_2^2$ и др. При расчете по временному ряду коэффициенты, соответствующие лишним слагаемым, могут оказаться ненулевыми из-за различных источников погрешностей и сильно ухудшить итоговое качество модели. Их желательно удалить из модельных уравнений.

Лишние слагаемые можно идентифицировать путем наблюдения за поведением оценок коэффициентов модели при реконструкции по различным участкам временного ряда, т.е. по точкам, лежащим в различных областях фазового пространства. Параметры адекватной глобальной модели стационарной системы не должны зависеть от того, по каким участкам ее временного ряда ведется реконструкция. А коэффициенты при лишних слагаемых могут претерпевать, в зависимости от выбора участка, заметные изменения. Причем наиболее сильно это проявляется, если временной ряд содержит переходный процесс, т.к. при этом фазовой траекторией «осваиваются» существенно различные области фазового пространства (рис.9.2).[2]



а) **б)**

[2] Обычно модели строятся по временным реализациям установившихся движений, соответствующих аттрактору в фазовом пространстве объекта. Это разумно, если необходимо осуществить прогноз поведения объекта после установления колебаний. При нацеленности на описание динамики во всем фазовом пространстве или значительной его части успех более вероятен при использовании переходных процессов, когда изображающая точка еще не достигла аттрактора [179, 190]. Подобные глобальные модели полезны в тех случаях, когда необходимо осуществить прогноз пути эволюции из произвольного начального состояния. Кроме того, они оказываются полезными и для оптимизации структуры модели.

Рис.9.3. Результаты реконструкции осциллятора Ван дер Поля – Тоды, начиная с полного многочлена порядка K = 7. а) зависимость коэффициентов при указанных сверху слагаемых многочлена в (9.7) от стартового момента сегмента реконструкции (в единицах интервала выборки); б) погрешность минимальна при 20 исключенных слагаемых

Будем строить модель (9.7) с многочленом высокого порядка K по последовательным сегментам временного ряда длиной W: $\{\eta_{(k-1)W+1},...,\eta_{(k-1)W+W}\}$, $k=1,2,...,L$. Получим набор оценок коэффициентов $\hat{c}_{i,j}^{(k)}$ (рис.9.3,а). Степень стабильности оценки каждого коэффициента $\hat{c}_{i,j}$ определим как модуль отношения эмпирического среднего $\left\langle \hat{c}_{i,j} \right\rangle = (1/L)\sum_{k=1}^{L} \hat{c}_{i,j}^{(k)}$ к стандартному отклонению $\sqrt{(1/L)\sum_{j=1}^{L}\left(\hat{c}_{k,j} - \langle c_k \rangle\right)^2}$. Исключим слагаемое, соответствующее наименее стабильному коэффициенту. Для упрощенной структуры модели повторим всю процедуру. Продолжая ее дальше, будем последовательно удалять «нестабильные слагаемые».

Исключение слагаемых прекращается, когда качество модели перестает улучшаться. На рис.9.3,б мы использовали как критерий качества погрешность описания объекта в широкой области V фазового пространства $\sigma^2 = \iint_V \left\{ f(x_1, x_2, \hat{\mathbf{c}}) - \left[(1-x_1^2)x_2 - 1 + e^{-x}\right]\right\}^2 dx_1 dx_2$. После исключения 20 слагаемых из модельного многочлена порядка $K = 7$ погрешность уменьшается на порядок по сравнению со стартовой структурой модели [190].

9.3. Восстановление характеристик нелинейного элемента электрической цепи

Рассмотрим показательный пример из области радиофизики, когда хаотическое поведение достаточно простой нелинейной системы успешно моделируется в постановке «серый ящик». Объект – *RLC*-контур с переключаемыми конденсаторами, находящийся под гармоническим внешним воздействием амплитуды U_0 и частоты ω_0. Его схема представлена на рис.9.4,а. К – электронный ключ: микросхема, содержащая десятки транзисторов и других пассивных элементов, которая питается от специального источника постоянного напряжения. При малых значениях напряжения U на емкости C_1 происходят линейные колебания в контуре RLC_1 (сопротивление ключа очень велико), когда напряжение U достигает порогового значения $U_{\text{пор}}$, сопротивление ключа резко падает, он замыкает цепь и подключает емкость C_2. Обратное переключение

происходит при понижении U относительно $U_{\text{пор}}$ (ключ обладает гистерезисом). Наличие нелинейности приводит к возможности хаотических колебаний в контуре.

При $U_{\text{пор}} < 0$ модель этой системы, полученная на основе законов Кирхгофа, примет вид уравнения неавтономного нелинейного осциллятора (9.1), где безразмерные переменные $t = t'/\sqrt{LC_1}$, $x = q/C_2\left|U_{\text{пор}}\right|$ (t' – время, q – суммарный заряд на емкостях C_1 и C_2), а F – кусочно-линейная функция, связанная с емкостями, т.е. с вольт-фарадной характеристикой нелинейного элемента (переключающихся конденсаторов).

В эксперименте измерялся хаотический временной ряд силы тока через резистор R, это величина dx/dt в уравнениях (9.1). С помощью численного интегрирования наблюдаемого ряда был получен временной ряд значений x, с помощью численного дифференцирования – оценки d^2x/dt^2. Будем считать, что информации о кусочно-линейном виде функции F нет, тем более что это лишь приближение, игнорирующее гистерезис при переключении ключа и т.п. Модели строились в виде (9.2) с многочленом f различных порядков K. На рис.9.4,в представлены результаты для наилучшей модели с $K = 9$, которая хорошо воспроизводит наблюдаемое хаотическое поведение (рис.9.4,б). Теоретическая кусочно-линейная «возвращающая сила» и модельный многочлен f с хорошей точностью совпадают в области наблюдаемого движения, показанной штриховой линией на рис.9.4,г. Отметим, что без информации о структуре уравнений (9.2) получить адекватную эмпирическую модель с физическим смыслом невозможно [34].

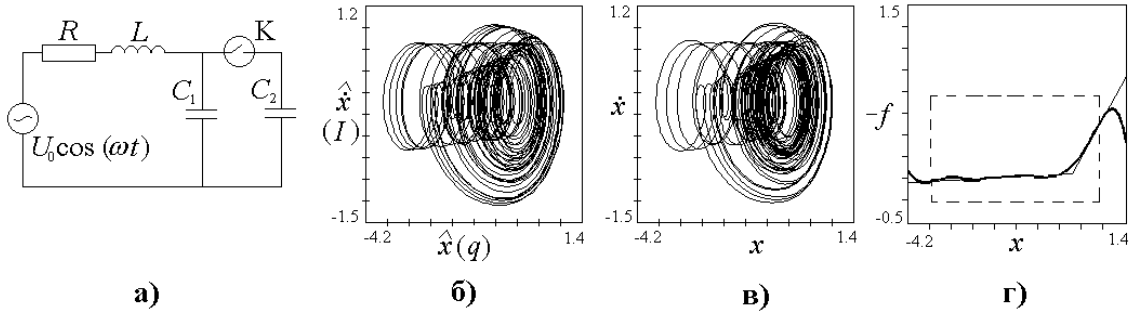


Рис.9.4. Моделирование радиофизической системы: а) схема экспериментальной установки; б) экспериментальная хаотическая траектория на плоскости заряд – сила тока, измерения I проводились с помощью 12-разрядного АЦП при $\Delta t = 4$ мкс, $C_1 = 0.1$ мкФ, $C_2 = 4.4$ мкФ, $L = 0.02$ Гн, $R = 10$ Ом, $U_{\text{пор}} = -0.2$ В, периоде воздействия $T \approx 84.02\tau$, $U_0 = 2.344$ В (т.е. $\gamma \approx 0.02$, $\omega \approx 1.02$, $C_1/(C1+C2) \approx 1/45$), единицы по осям безразмерные [34]; в) траектория восстановленной модели (9.2) с многочленом f 9-го порядка, г) график f с обратным знаком (жирная линия) и ожидаемая кусочно-линейная зависимость (тонкая)

Рассмотренный простой пример иллюстрирует возможность определения характеристик элемента нелинейной системы с помощью процедуры моделирования по временному ряду, причем даже в режимах больших амплитуд и хаоса, когда эти характеристики могут быть недоступны измерениям с помощью обычных средств. Он успешно применялся для исследования динамических характеристик конденсатора с сегнетоэлектриком [236], полупроводниковых диодов [322], волоконно-оптических систем [333]. Подробнее познакомиться с объектом и процедурой моделирования на примерах эталонных теоретических осцилляторов, контура с переключаемыми конденсаторами и контура с полупроводниковым диодом с *p-n* переходом можно в лабораторных работах [30].

9.4. Специфические подходы к выбору структуры модели

Неопределенность в структуре модели может быть не столь мала, как в примерах, описанных выше. «Ящик» может быть «темно-серым», а не «светло-серым» (п. 5.2), что сильно усложняет моделирование. Но в ряде случаев даже небольшой объем априорной информации о свойствах системы или результаты предварительного анализа рядов наблюдаемых могут привести к успеху моделирования при их учете в структуре модели. Проиллюстрируем это на примерах реконструкции для двух важных классов объектов: систем под регулярным воздействием и систем с запаздыванием.

9.4.1. Системы под регулярным внешним воздействием

Широкий класс объектов, для которых можно учесть априорную информацию об их свойствах – неавтономные системы, находящиеся под регулярным (периодическим или квазипериодическим) воздействием. Часто наличие воздействия можно выявить по спектру мощности наблюдаемого ряда, если последний обнаруживает дискретные составляющие на частотах воздействия и высших гармониках. Однако этот признак не является достаточным.

Если предположение о наличии воздействия сформировано, то в уравнения модели полезно включить функции, *явно* зависящие от времени, для описания этого воздействия. Например, для описания гармонического аддитивного воздействия целесообразна структура модели [34, 35, 194]:

$$d^D x/dt^D = f(x, dx/dt, ..., d^{D-1}x/dt^{D-1}, \mathbf{c}) + a\cos\omega t + b\sin\omega t, \qquad (9.8)$$

где x – наблюдаемая, f – алгебраический многочлен. В этом случае достаточно использовать меньшее число переменных D, чем было бы необходимо при использовании стандартной структуры (9.4), что и дает преимущества при использовании специальной структуры (9.8), см. также

п. 10.2.2. Уравнение осциллятора (9.2) – частный случай (9.8) при $D = 2$ и неполном многочлене от двух переменных.

Отметим, что для успеха моделирования кроме выбора структуры уравнений необходимо еще преодолеть специфическую техническую проблему. Это проблема оценки частоты воздействия ω, которая входит как нелинейный параметр в уравнения модели (9.8). Как обычно, задают стартовую догадку и решают задачу минимизации целевой функции типа (9.5) итерационным методом. Но особенность здесь состоит в том, что правая часть модельных уравнений (9.8) очень чувствительна к значению ω при больших t, аналогично примеру (7.19) в п. 7.1.2.2. Поэтому и целевая функция S типа (9.5) чувствительна к ω при большой длине ряда N. Это ведет к тому, что в случае отыскания глобального минимума S дисперсия оценки ω быстро уменьшается с ростом длины ряда: как N^{-3}, аналогично примеру (7.19). С одной стороны, это дает возможность очень точно определить ω. С другой стороны, возникают трудности отыскания глобального минимума, т.к. требуется очень удачная стартовая догадка для ω. Учитывая это, следует тщательно перебирать различные стартовые догадки.

Если же по условиям эксперимента ω известна заранее, но с погрешностью, то важно помнить, что в случае очень длинного ряда малая погрешность ω может привести к плохому описанию «истинного» воздействия соответствующими слагаемыми в (9.8) из-за «набега разности фаз» между ними [34] и к бесполезности использования структуры (9.8). Поэтому разумно рассматривать известное значение лишь как стартовую догадку и более точно определять ω по временному ряду. Все сказанное относится и к прочим неавтономным моделям, рассматриваемым ниже.

В случае произвольного регулярного воздействия (сложного периодического и квазипериодического) более адекватна структура модели

$$d^D x/dt^D = f(x, dx/dt, ..., d^{D-1}x/dt^{D-1}, \mathbf{c}) + g(t, \mathbf{c}), \qquad (9.9)$$

где функция $g(t)$ описывает воздействие и может иметь вид тригонометрического многочлена [159]:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{K_i} c_{i,j} \cos(j\omega_i t + \varphi_{i,j}). \qquad (9.10)$$

Причем адекватные модели с тригонометрическими многочленами могут быть получены и при очень большом числе (сотни) используемых гармоник K_i, тогда как при аппроксимации алгебраическими многочленами увеличение их порядка чревато неустойчивостью траекторий модели.

Чтобы учесть и мультипликативное, и более сложное воздействие, зависимость от времени можно вводить во все коэффициенты многочлена f в (9.8) [194]. Так, на рис.9.5 показан пример реконструкции неавтономного осциллятора Тоды при комбинированном гармоническом воздействии

$$d^2x/dt^2 = -0.45\,dx/dt + (5 + 4\cos t)(e^{-x} - 1) + 7\sin t\,. \qquad (9.11)$$

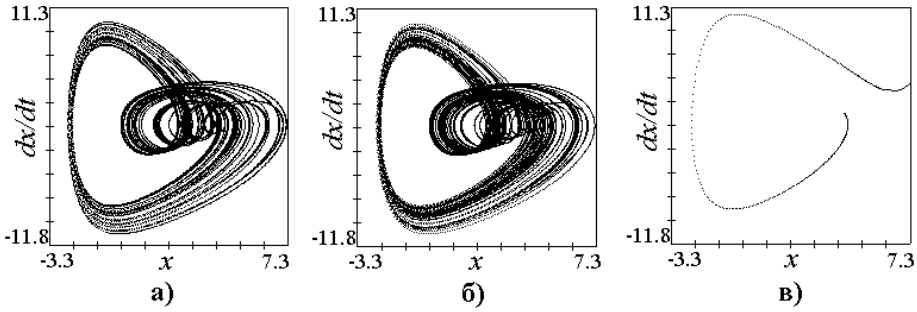


Рис.9.5. Реконструкция уравнений нелинейного осциллятора Тоды (9.11) по ряду переменной x: а) аттрактор объекта, б) аттрактор неавтономной модели с зависимостью от времени во всех коэффициентах многочлена (D = 2, K = 9, см. текст), в) траектория стандартной модели (9.4) с D = 4, K = 6

Модель строилась в виде (9.4), где воздействие вводилось во все коэффициенты многочлена f, т.е. вместо c_k подставлялись выражения $c_k + a_k \cos\omega t + b_k \cos\omega t$. Лучшая модель получена при $D = 2$, $K = 9$, ее фазовая траектория очень схожа с экспериментальной (рис.9.5,а,б). Типичная неустойчивая траектория эмпирической стандартной модели (9.4), размерность которой должна быть не менее 3 для описания хаотического режима, показана на рис.9.5,в.

Эффективность всех упомянутых подходов была показана на численных примерах реконструкции уравнений по зашумленным хаотическим реализациям эталонных осцилляторов при различных видах воздействия: периодическом импульсном, периодическом с субгармониками, квазипериодическом [159, 193, 194].

9.4.2. Системы с запаздыванием

Методы построения моделей систем с запаздыванием активно развиваются в последнее время [202, 203, 331, 332, 241, 191, 290, 139, 140]. Несмотря на то, что это системы бесконечномерные, для их моделирования пригодны многие изложенные ранее методы без изменений или с некоторыми техническими усложнениями, например, метод множественной стрельбы [241]. Существуют и некоторые принципиальные отличия [203], которые мы не комментируем здесь подробнее.

Рассмотрим пример, когда моделирование системы с запаздыванием попадает под раздел «серый ящик» и может быть проведено с помощью подходов, близких к описанным выше. Речь пойдет о системах вида:

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + F(x(t-\tau)), \tag{9.12}$$

где наблюдаемая $\eta = x$, возможно с измерительным шумом. Проиллюстрировать процедуру на примере реконструкции по хаотической временной реализации уравнения Икеды (рис.9.6,а), описывающего динамику пассивного оптического резонатора:

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + \mu_0 \sin(x(t-\tau_0) - x_0). \tag{9.13}$$

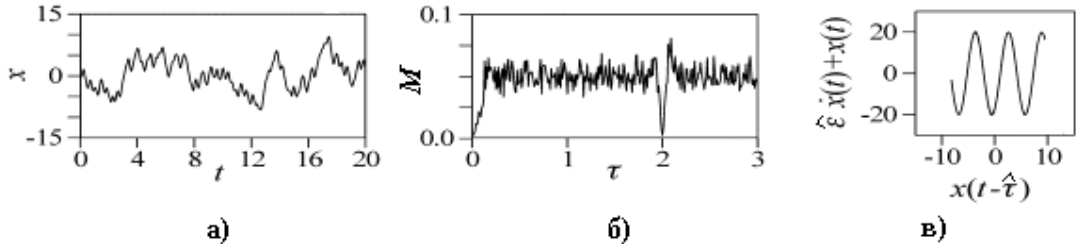


Рис.9.6. а) Временная реализация уравнения Икеды (9.13), $\varepsilon_0 = 1.0$, $\mu_0 = 20.0$, $\tau_0 = 2.0$. б) Число пар экстремумов $M(\tau)$, нормированное на общее число экстремумов ряда. $M_{\min}(\tau) = M(2.0)$. в) Восстановленная нелинейная функция. Численные эксперименты с добавлением измерительного шума показывают возможность реконструкции при уровнях шума до 20% (по отношению среднеквадратичных амплитуд шума и сигнала)

Модели строятся в виде:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-\tau), \mathbf{c}). \tag{9.14}$$

Аналогично выше рассмотренным примерам, можно решать задачу $\sum_n \left(\varepsilon \dot{x}(t_n) + x(t_n) - f(x(t_n - \tau), \mathbf{c})\right)^2 \to \min$, рассматривая параметр инерционности ε и время задержки τ как дополнительные неизвестные параметры [203]. Но есть и специальный, более эффективный подход [191], который состоит в следующем.

Статистический анализ временных интервалов, разделяющих экстремумы во временных реализациях различных модельных и реальных систем с запаздыванием (9.12), позволяет установить, что зависимость числа M пар экстремумов временной реализации, удаленных друг от друга на время τ, от величины τ, имеет четкий минимум при τ, соответствующем времени запаздывания системы, рис.9.6,б. Это наблюдение дает способ оценки времени запаздывания и диагностический признак принадлежности объекта к системам этого класса. Имея оценку $\hat{\tau} \approx \tau_0$, можно найти оценку параметра инерционности ε и аппроксимирующую функцию f путем перебора пробных значений ε и выбора такого $\hat{\varepsilon}$, при котором экспериментальные точки на плоскости $\left(x(t-\hat{\tau}), \hat{\varepsilon}\dot{x}(t) + x(t)\right)$ наилучшим образом ложатся на некоторую гладкую кривую. Последняя и представляет собой график искомой функции f. Рис.9.6,в иллюстрирует

такое восстановление «истинной» функции $F(x)$ для системы (9.13). По полученному графику можно найти и формулу для аппроксимирующей функции f в некотором функциональном базисе или в специальном виде.

Описанный статистический подход к определению времени задержки и реконструкции уравнения в целом может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка и на системы с несколькими различными временами задержки. Он экономен по отношению к машинному времени и не критичен к присутствию измерительного шума [140, 290].