

УДК 530.18

<https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики

Е. В. Навроцкая, Д. А. Смирнов, Б. П. Безручко

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38

E-mail: sidakev@gmail.com, smirnovda@yandex.ru, bezruchkobp@gmail.com

Автор для переписки Навроцкая Елена Владимировна, sidakev@gmail.com

Поступила в редакцию 4.08.2018, принята к публикации 15.10.18

Тема. В работе исследуется применимость известного метода выявления связи между двумя осцилляторами, основанного на экспериментальном моделировании фазовой динамики по временным рядам фаз в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигнала. Задача выявления структуры связей в ансамблях (наличия, направлений и интенсивности взаимодействий между элементами) по экспериментальным записям их колебаний актуальна для систем различной природы и приложений. При ее решении применительно к системе двух осцилляторов метод реконструкции моделей фазовой динамики по временным рядам доказал свою эффективность при условии, что в спектре мощности сигнала имеется единственный пик. **Цель.** Исследование условий применимости указанного метода в менее благоприятных случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности и ширина этих пиков значительна. **Методы.** В качестве тестовой системы в численном эксперименте рассмотрен ансамбль из трех осцилляторов ван дер Поля: два взаимодействующих осциллятора, подвергались одновременному воздействию со стороны третьего. С помощью исследуемого метода по временным реализациям фаз осцилляторов оценивалось наличие связи между ними. Численный эксперимент проводился при различных значениях параметров осцилляторов. **Результаты.** Продемонстрирована возможность ложных выводов о структуре связей в рассматриваемой системе и предложен диагностический критерий возможных ошибок, основанный на оценке автокорреляционной функции остатков модели фазовой динамики. Для получения надежных оценок связи в проблемных ситуациях апробирована предварительная фильтрация сигналов.

Ключевые слова: фазовая динамика, выявление связей, ансамбль осцилляторов.

Образец цитирования: Навроцкая Е.В., Смирнов Д.А., Безручко Б.П. Восстановление структуры связей в ансамбле осцилляторов по записям колебаний через моделирование фазовой динамики // Изв. вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 1. С. 41–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-12-00291).

The reconstruction of the couplings structure in the ensemble of oscillators according to the time series via phase dynamics modeling

E. V. Navrotskaya, D. A. Smirnov, B. P. Bezruchko

Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering & Electronics of Russian Academy of Sciences
38, Green str., 410019 Saratov, Russia

E-mail: sidakev@gmail.com, smirnovda@yandex.ru, bezruchkobp@gmail.com
Correspondence should be addressed to Navrotskaya Elena V., sidakev@gmail.com
Received 4.08.2018, accepted for publication 15.10.18

Topic. In this paper, we investigate the applicability of the known method for detecting the couplings between two oscillators, based on experimental phase dynamics modeling by phases time series in cases where there are several peaks in the signal power spectrum. The problem of revealing the structure of couplings in ensembles (presence, directions and intensity of interactions between elements) by experimental recordings of their oscillations is relevant for systems of different nature and applications. In its solution for the system of two oscillators, the method of reconstruction of phase dynamics models by time series has shown its efficiency provided that there is a single peak in the signal power spectrum. **Aim.** The investigation of the conditions for the applicability of this method in less favorable cases when there are several peaks in the power spectrum and the width of these peaks is significant. **Methods.** An ensemble of three Van der Pol oscillators is considered as a test system in the numerical experiment: two coupled oscillators were exposed to the simultaneous influence from the third one. Using the investigated method, the presence of a couplings between the oscillators was estimated from the time series of the oscillator phases. The numerical experiment was carried out at different values of oscillator parameters. **Results.** The possibility of false conclusions about the structure of couplings in such system is demonstrated. The diagnostic criterion of possible errors based on the estimation of the autocorrelation function of the phase dynamics model residues is proposed. To obtain reliable estimates of interactions in problem situations, pre-filtering of signals was tested.

Key words: phase dynamics, identification of couplings, ensemble of oscillators.

Reference: Navrotskaya E.V., Smirnov D.A., Bezruchko B.P. The reconstruction of the couplings structure in the ensemble of oscillators according to the time series via phase dynamics modeling. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 1, pp. 41–52. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-41-52>

Acknowledgements. This research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 14-12-00291).

Введение

Задача обнаружения связи между колебательными системами по временным рядам их колебаний актуальна во многих областях науки и техники: в радиофизике [1], биомедицине [2–9], климатологии [10–13] и других областях. Существует множество методов анализа динамики колебательных систем по временным рядам. Для выявления связей между системами востребованными оказались методы, основанные на анализе фаз колебаний, поскольку фаза – переменная, характеризующая мгновенное состояние системы, весьма чувствительная к внешним воздействиям и изменениям параметров.

В работах [14–16] предложен метод выявления связей в малых ансамблях связанных осцилляторов по временным рядам, на основе моделирования их фазовой динамики. Метод оказывается эффективным для оценки взаимодействия между двумя осцилляторами в случаях, когда в спектре мощности сигналов имеется единственный узкий пик. Однако на практике при анализе реальных данных такая постановка не всегда выполняется, в частности, востребованной является задача анализа подсистем со сложным спектральным составом наблюдаемых сигналов. В этих условиях могут возникать трудности с введением фазы колебаний, эффективность и надёжность метода при этом могут снижаться.

В данной работе на эталонных системах исследованы условия применимости данного метода в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигналов и ширина этих

пиков значительна. С помощью численных экспериментов выделены условия, при которых метод дает большое количество ошибок, и разработан подход, позволяющий снизить их процент. Кроме того, предложен диагностический критерий ошибочности результата в проблемных ситуациях, основанный на оценке автокорреляционной функции остаточных ошибок построенной модели фазовой динамики. Эффективность предложенного подхода и диагностического критерия показана в численных экспериментах на системе связанных осцилляторов ван дер Поля.

1. Метод оценки связей между двумя осцилляторами

Известный метод выявления направленных связей и оценки времени ее запаздывания основан на построении эмпирической модели фазовой динамики наблюдаемых процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для этого по имеющимся временным рядам $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$ и $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$, например, с помощью введения аналитического сигнала [17–20] рассчитываются временные ряды фаз колебаний $\{\phi_1(t_1), \dots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \dots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_i = i\Delta t$, Δt – интервал выборки, N – длина ряда. Далее по временным рядам фаз строится модель фазовой динамики. Форма модели выбирается из предположений, что фазовая динамика корректно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned} d\phi_1(t)/dt &= \omega_1 + G_1(\phi_1(t), \phi_2(t)) + \xi_1(t), \\ d\phi_2(t)/dt &= \omega_2 + G_2(\phi_2(t), \phi_1(t)) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр ω_k определяет угловую частоту колебаний, $\xi_k(t)$ – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией $\langle \xi_k(t)\xi_k(t') \rangle = \sigma_{\xi_k}^2 \delta(t - t')$. Функции G_k 2π -периодичны по обоим аргументам и определяют взаимодействие осцилляторов и собственную нелинейность их фазовой динамики. При анализе дискретных временных рядов строится модель в разностной форме, которую можно получить путем интегрирования уравнений (1) на интервале конечной ширины τ

$$\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k(\phi_k(t), \phi_j(t), \mathbf{a}_k) + \varepsilon_k(t), \quad k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \quad (2)$$

где $F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{m,n \in \Omega_k} \alpha_{k,m,n} \cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n} \sin(m\phi_k - n\phi_j)$ – тригонометрический многочлен невысокого порядка с коэффициентами $\mathbf{a}_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$; $\varepsilon_k(t) \approx \int_t^{t+\tau} \xi_k(t') dt'$ – гауссов шум с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\varepsilon_k}^2 \approx \sigma_{\xi_k}^2 \tau$, автокорреляционная функция которого $C_k(t') = \langle \varepsilon_k(t)\varepsilon_k(t - t') \rangle / \sigma_{\varepsilon_k}^2$ (угловые скобки означают математическое ожидание) спадает до нуля на интервале от нуля до τ . По временным рядам $\{\phi_k(t_i)\}_{i=1}^N$ и $\{\phi_j(t_i)\}_{i=1}^N$ оценивают коэффициенты \mathbf{a}_k многочлена $F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k)$ путем минимизации среднего квадрата ошибки модели: $S_k^2(\Delta_{j \rightarrow k}) = \frac{1}{N-\tau/\Delta t} \sum_{i=1}^{N-\tau/\Delta t} [\phi_k(t_i + \tau) - \phi_k(t_i) - F_k(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i), \mathbf{a}_k)]^2 \rightarrow \min$.

Интенсивность γ_1 воздействия второй системы на первую можно определить как крутизну зависимости F_1 от ϕ_2 , и интенсивность γ_2 воздействия первой системы на вторую – аналогично:

$$\gamma_k^2 \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) / \partial \phi_j)^2 d\phi_k d\phi_j. \quad (3)$$

Через оценки коэффициентов $\hat{\mathbf{a}}_k$ можно получить оценки интенсивности воздействия j -й системы на k -ю

$$\gamma_k^2 = \sum_{(m,n) \in \Omega_k} n^2 (\alpha_{k,m,n}^2 + \beta_{k,m,n}^2). \quad (4)$$

В работе [16] были получены формулы для их 95 %-х доверительных интервалов вида $\hat{\gamma}_k - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$, $\hat{\gamma}_k + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$, где $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_k}$ рассчитываются по тому же короткому ряду и определяет дисперсию величины γ_k . Если оценка $\hat{\gamma}_k$ вместе со своим доверительным интервалом превышает ноль, то делается вывод о наличии воздействия j -й системы на k -ю с вероятностью ошибки не более 0.05, поскольку доверительный интервал 95 %-й.

Обратим внимание, что даже в случае хорошей определенности фаз подход не применим для режимов фазовой синхронизации, потому что тогда фазы двух осцилляторов не могут выступать в роли «независимых» переменных при построении модели. Эта проблема диагностируется, если оценка коэффициента фазовой когерентности $\hat{\rho} = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \exp(i(\phi_1(t_i) - \phi_2(t_i))) \right|$ близка к единице. Реализация подхода затрудняется при $\hat{\rho} > 0.6$ [16].

2. Методика исследования

Для изучения объявленных во Введении проблем с определением фазы в численном эксперименте в качестве эталонной колебательной системы были взяты три стохастических (возмущенных внешними источниками белого шума) автоколебательных осциллятора ван дер Поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \mu_1(1 - x_1^2(t)) \frac{dx_1}{dt} - \omega_1^2 x_1(t) + \xi_1(t), \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \mu_2(1 - x_2^2(t)) \frac{dx_2}{dt} - \omega_2^2 x_2(t) + k_{1 \rightarrow 2}(x_1(t) - x_2(t)) + \xi_2(t), \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= \mu_3(1 - x_3^2(t)) \frac{dx_3}{dt} - \omega_3^2 x_3(t) + k_{1 \rightarrow 3}(x_1(t) - x_3(t)) + k_{2 \rightarrow 3}(x_2(t) - x_3(t)) + \xi_3(t). \end{aligned} \quad (5)$$

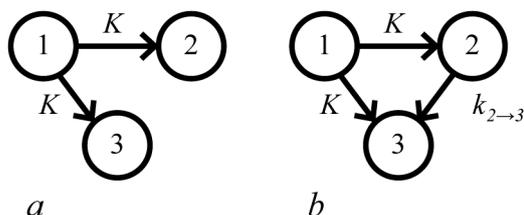


Рис. 1. Схема структуры связей, рассматриваемых в данной работе

Fig. 1. Diagram of the couplings structure considered in this paper

Здесь параметры $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.2$, ω_1 , ω_2 , ω_3 – круговые частоты, $\xi_k(t)$ – белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией (АКФ) $\langle \xi_k(t) \xi_k(t') \rangle = D_{\xi_k} \delta(t-t')$, где D_{ξ_1} , D_{ξ_2} , D_{ξ_3} определяют интенсивности шумов. Осциллятор x_1 влияет на два других x_2 и x_3 с одинаковой силой $k_{1 \rightarrow 3} = k_{1 \rightarrow 2} = K$, значение которого менялось в широком диапазоне, осцилляторы x_2 и x_3 либо взаимодействовали, либо нет, в зависимости от рассматриваемого случая (рис. 1).

Рассматривались различные соотношения частот всех трех осцилляторов: как близкие друг к другу частоты, так и сильно различающиеся. Это соотношение определяло расстояние между пиками в спектрах мощности сигналов. Путем изменения уровня шумов в уравнениях ван дер Поля регулировалась ширина этих пиков. Достаточно интенсивное воздействие первого осциллятора на два других приводит к наличию дополнительного пика в спектре мощности сигналов x_2 и x_3 (рис. 2).

Численный эксперимент проводился по двум схемам.

- **Традиционный метод** [6, 7] – непосредственно по временным рядам решений системы (5). При различных фиксированных значениях параметров осцилляторов (5) генерировался ансамбль из 100 временных рядов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, которые получались путем интегрирования уравнений методом Эйлера–Маруямы с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде), длина ряда – 2000 точек (около 100 характерных периодов). С помощью преобразования Гильберта [8] для каждого временного ряда вводилась

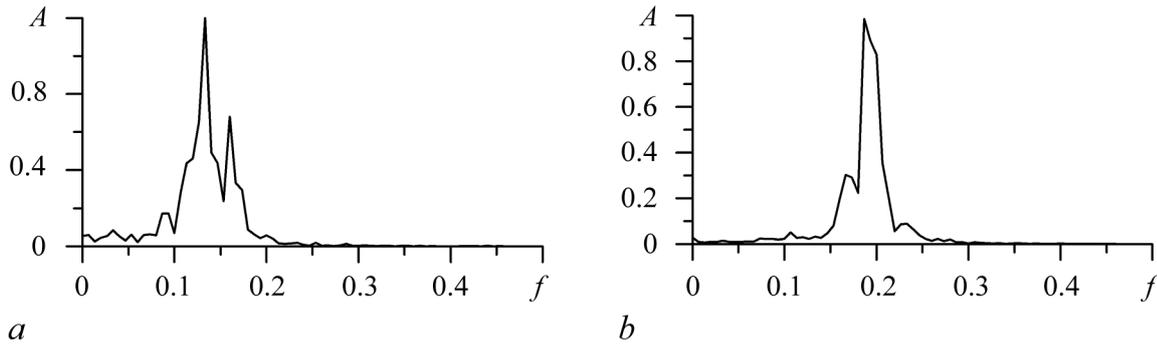


Рис. 2. Амплитудные спектры сигналов осцилляторов $x_2(t)$ и $x_3(t)$ при $K = 0.2$, $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 0.9$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\omega_3 = 1.1$ (на оси f им соответствуют $f_1 \approx 0.16$, $f_2 \approx 0.11$, $f_3 \approx 0.17$). В каждом видна сложная структура, вызванная наличием третьего осциллятора

Fig. 2. The amplitude spectra of the $x_2(t)$ and $x_3(t)$ at $K = 0.2$, $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 0.9$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\omega_3 = 1.1$, (on the f axis $f_1 \approx 0.16$, $f_2 \approx 0.11$, $f_3 \approx 0.17$ correspond to them). Each shows a complex structure caused by the presence of the third oscillator

фаза и по каждой паре временных рядов фаз получались оценки $\hat{\gamma}_{j \rightarrow k}$ вместе с доверительным интервалом. Далее подсчитывалась доля (оценка вероятности) положительных выводов n , то есть доля временных рядов, для которых сделан вывод о наличии связи (при этом оценка $\hat{\gamma}_{j \rightarrow k}$ вместе со своим доверительным интервалом превышает ноль). Чтобы метод гарантировал надежность результатов, вводилось обязательное условие: доля положительных оценок о наличии связи при реальном ее отсутствии (ложные выводы) не должна превосходить уровень 0.05. При наличии реальной связи доля положительных выводов определяет чувствительность метода, и чем она больше, тем метод эффективнее выявляет взаимодействие.

- **Модернизированный подход**, который состоит в том, что для снижения ошибок перед введением фазы рассматривалась возможность предварительной фильтрации сигналов $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Возможности улучшения результатов оценки связей при любой фильтрации не очевидны, так как сигнал скрытого осциллятора не подмешивается аддитивно к наблюдаемым сигналам, а влияет на их динамику. Последующий расчет фазы методом аналитического сигнала является нелинейным преобразованием временного ряда, частично искаженного фильтрацией. В данной работе использовалось три варианта фильтрации: 1) удаление высокочастотным или низкочастотным фильтром широкой области частот (от нуля до собственной частоты или от собственной частоты и выше), в которой содержался спектральный пик воздействующего первого осциллятора, но не содержался собственный спектральный пик наблюдаемого сигнала; 2) удаление режекторным фильтром только относительно узкой полосы частот, в которой представлен спектральный пик воздействующего осциллятора, но не собственные пики обоих наблюдаемых $x_2(t)$ и $x_3(t)$; 3) выделение полосовым фильтром области частот, содержащей собственные пики обоих осцилляторов $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Полезными оказались второй и третий варианты фильтрации, результаты которых в сопоставлении с исходным вариантом (без фильтрации) представлены ниже.

3. Результаты

Были получены зависимости доли положительных выводов n от коэффициента воздействия первого осциллятора K (рис. 3, 4). Данные расчетов позволяют сделать следующие выводы.

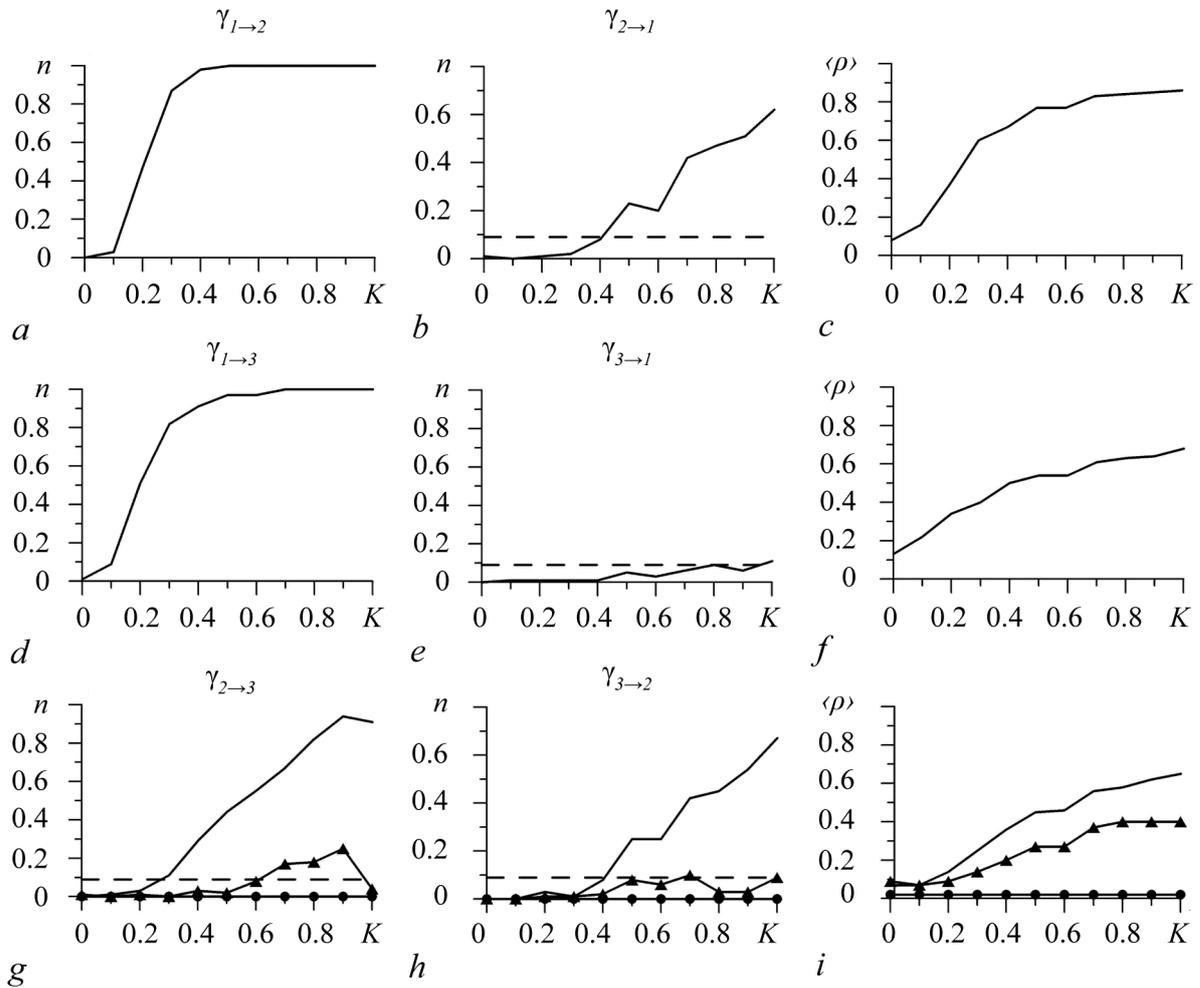


Рис. 3. Результаты для системы (5) при $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\omega_3 = 1.1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: верхний ряд соответствует результатам выявления связи между $x_1(t)$ и $x_2(t)$, средний ряд – между $x_1(t)$ и $x_3(t)$, нижний ряд между $x_2(t)$ и $x_3(t)$; a, b – зависимость частоты положительных выводов n от коэффициента связи K для $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 2}$ и $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$; c – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности $\langle \rho \rangle$ для $x_1(t)$ и $x_2(t)$; d, e – $n(K)$ для $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 3}$ и $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 1}$; f – $\langle \rho \rangle$ для $x_1(t)$ и $x_3(t)$; g, h – $n(K)$ для $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ и $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$; i – $\langle \rho \rangle$ для $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Жирная линия – результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, при этом подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, при этом выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig. 3. Results for the system (5) at $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0.7$, $\omega_3 = 1.1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: the top row corresponds to the results of identifying the relationship between $x_1(t)$ and $x_2(t)$, middle row – between $x_1(t)$ and $x_3(t)$, bottom row between $x_2(t)$ and $x_3(t)$; a, b – the dependence of the frequency of positive conclusions n on the coupling coefficient K for $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 2}$ and $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$; c – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence $\langle \rho \rangle$ for $x_1(t)$ and $x_2(t)$; d, e – $n(K)$ for $\hat{\gamma}_{1 \rightarrow 3}$ and $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 1}$; f – $\langle \rho \rangle$ for $x_1(t)$ and $x_3(t)$; g, h – $n(K)$ for $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ and $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$; i – $\langle \rho \rangle$ for $x_2(t)$ and $x_3(t)$. Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line acceptable level of frequency error

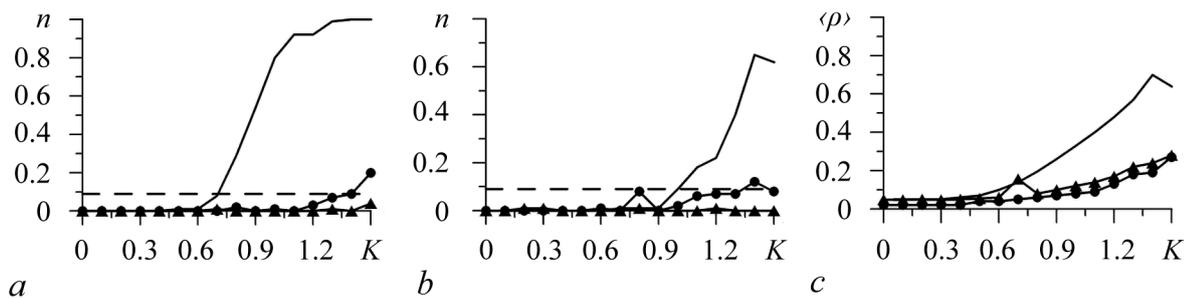


Рис. 4. Результаты выявления связи между x_2 и x_3 в системе (5) при $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: a , b – зависимость частоты положительных выводов $n(K)$ от коэффициента связи K для $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ и $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$; c – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности $\langle \rho \rangle$ для $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Жирная линия результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig.4 The results of identifying the relationship between $x_1(t)$ and $x_2(t)$ in system (5) at $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: a , b – the dependence of the frequency of positive conclusions $n(K)$ on the coupling coefficient K for $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ and $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$; c – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence $\langle \rho \rangle$ for $x_2(t)$ and $x_3(t)$. Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line – acceptable level of frequency error

- Традиционный метод демонстрирует высокую чувствительность при выявлении реально существующих связей, но наличие общего источника воздействия осциллятора x_1 на несвязанные осцилляторы x_2 и x_3 может приводить к ложно-положительным выводам (о наличии связи, когда реально она отсутствует). Как показано на рис. 3, a , d , метод имеет высокую чувствительность к выявлению связи между первым и вторым осцилляторами (см. рис. 3, a) и между первым и третьим осцилляторами (см. рис. 3, d) – величина n быстро возрастает до единичного значения. При этом, как видно на рис. 3, g , h , метод дает большое количество положительных выводов о наличии связи для несвязанных осцилляторов: на рис. 3, g , h при $K > 0.3$ доля положительных выводов (доля ошибок) превышает допустимый уровень, показанный пунктирной линией.
- Аналогичная ситуация наблюдается и при большей расстройке частот (см. рис. 4) при $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$.
- Кроме того, из рис. 3, b видно, метод может давать ложные выводы о направлении воздействия: на рисунке величина n для $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 1}$ превышает допустимый уровень 0.05 (в тестовом модельном уравнении (5) имеется только однонаправленное воздействие от осциллятора $x_1(t)$ на $x_2(t)$, но нет воздействия в обратную сторону).
- Применение модифицированного метода, предусматривающего предварительную фильтрацию сигналов $x_2(t)$ и $x_3(t)$, позволяет снизить процент ошибок до требуемого малого уровня: на рис. 3, g , h и рис. 4, a , b доля положительных выводов n как после полосового (линия, помеченная кружками), так и после режекторного (линия, помеченная треугольниками) фильтров практически не превышает уровень 0.05, показанный пунктирной горизонтальной линией.

Диагностический критерий (оценка вероятной ошибки в определении структуры связей). Для поиска критериев проблемных ситуаций проводился анализ остаточных ошибок («фазовых» шумов) построенных моделей фазовой динамики и рассчитывались их АКФ.

На рис. 5, *a* показана АКФ остатков модели (2) для $x_2(t)$ в (5) при $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $K = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$, $D_{\xi_3} = 0.3$. Наличие огибающей в АКФ может выступать в качестве диагностического критерия наличия скрытого источника воздействия, не учтенного при построении модели фазовой динамики. Применение режекторного фильтра к обоим сигналам x_2 и x_3 (подавлялись частоты в области основного пика частоты воздействующего скрытого осциллятора) приводит к тому, что огибающая в АКФ остатков модели пропадает (рис. 5, *b*).

Также были получены графики зависимости величины n от коэффициента воздействия осциллятора x_2 на x_3 при сохранении воздействия на них со стороны первого осциллятора (соответствующая структура связи показана на рис. 1, *b*). На рис. 6 приведены графики для случая слабого воздействия со стороны x_1 (при $K = 0.6$, рис. 6, верхний ряд) и более сильного (при $K = 1$, рис. 6, нижний ряд). При слабом воздействии (при $K = 0.6$) первого осциллятора на x_2 и x_3 традиционный и модифицированный методы выявления связи эффективны уже при малых значениях $k_{2 \rightarrow 3}$: доля положительных выводов велика как без предварительной фильтрации сигналов (рис. 6, *a*, жирная линия), так и в случае применения полосового и режекторного фильтров (на рис. 6, *a*, линии с треугольниками и кружками, соответственно). Однако при оценке воздействия в обратную сторону, то есть осциллятора x_3 на x_2 (рис. 6, *b*), доля ошибочных выводов превышает требуемый уровень. Применение полосовой фильтрации даже увеличивает долю ошибок. Такую ситуацию можно диагностировать как с помощью предложенного критерия, основанного на оценке автокорреляционной функции остатков модели для сигнала $x_2(t)$, так и по большому значению оценки коэффициента фазовой когерентности $\hat{\rho}$ (рис. 6, *c*), которое, как отмечалось ранее в п. 1, для работоспособности метода не должно превышать значение 0.6.

Самая сложная ситуация наблюдается при сильном воздействии осциллятора x_1 на x_2 и x_3 (при $K = 1$). При $k_{2 \rightarrow 3} = 0$ доля ошибок принимает большое значение (рис. 6, *d*),

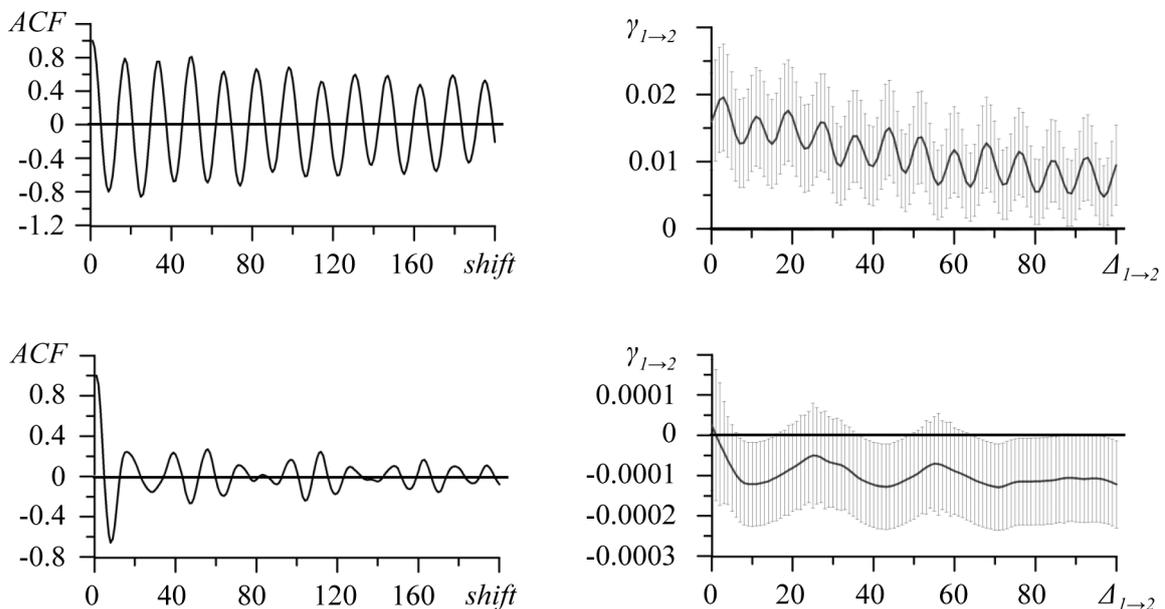


Рис. 5. Автокорреляционная функция остатков модели (2) для $x_2(t)$ в (5) при $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $K = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$, $D_{\xi_3} = 0.3$: *a* – $x_2(t)$ не фильтровался; *b* – перед введением фазы к $x_2(t)$ был применен режекторный фильтр

Fig. 5. Autocorrelation function of residuals of the model (2) for $x_2(t)$ in (5) at $k_{2 \rightarrow 3} = 0$, $K = 1$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1.5$, $\omega_3 = 1$, $D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = 0.1$, $D_{\xi_3} = 0.3$: *a* – $x_2(t)$ is not filtered; *b* – a rejection filter was applied to the $x_2(t)$ before the phase extraction

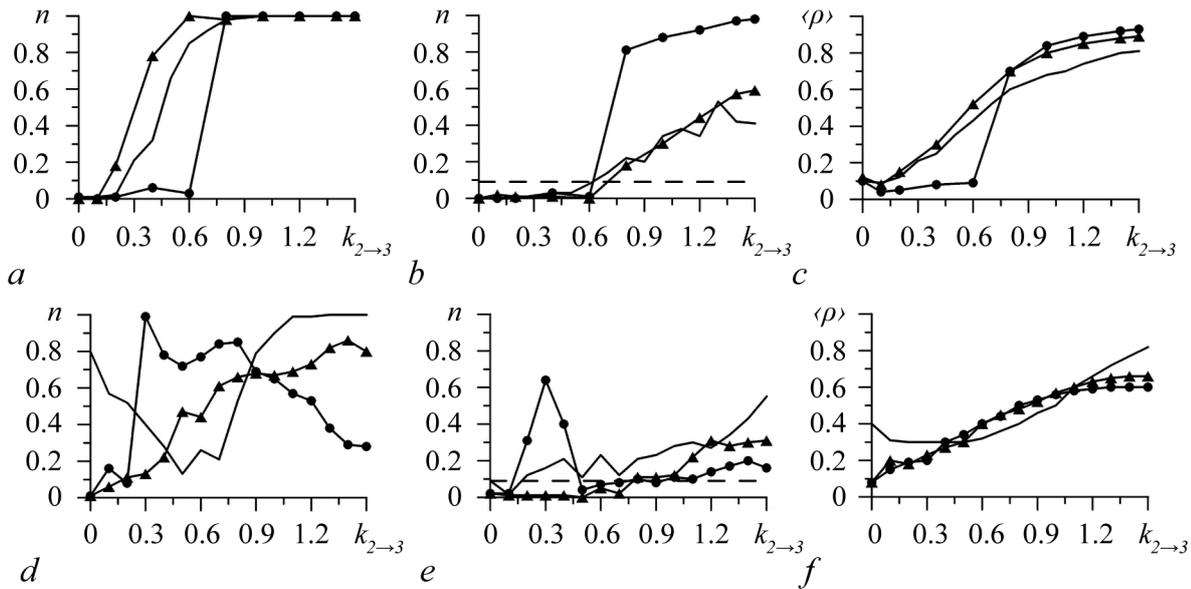


Рис. 6. Результаты выявления связи между x_2 и x_3 в системе (5) при $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 1, D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: верхний ряд для $K = 0.6$, нижний ряд для $K = 1$; a, b, d, e – зависимость частоты положительных выводов $n(k_{2 \rightarrow 3})$ от коэффициента связи между осцилляторами x_2 и x_3 для $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ (a, b) и $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ (d, e); c, f – усреднённое по ансамблю значение коэффициента фазовой когерентности $\langle \rho \rangle$ для $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Жирная линия – результаты получены без предварительной фильтрации сигналов; линия с треугольниками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *режекторного* фильтра, при этом подавлялись частоты, соответствующие первому (воздействующему) осциллятору; линия с кружками – временные ряды предварительно фильтровались с помощью *полосового* фильтра, при этом выделялись частоты, соответствующие второму и третьему осцилляторам; горизонтальная штриховая линия – допустимый уровень частоты ошибок

Fig. 6. The results of identifying the relationship between x_2 and x_3 in (5) at $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1.5, \omega_3 = 1, D_{\xi_1} = D_{\xi_2} = D_{\xi_3} = 1$: the top row corresponds to $K = 0.6$, bottom row for $K = 1$; a, b, d, e – the dependence of the frequency of positive conclusions $n(k_{2 \rightarrow 3})$ on the coefficient of coupling between oscillators x_2 and x_3 for $\hat{\gamma}_{2 \rightarrow 3}$ (a, b) and $\hat{\gamma}_{3 \rightarrow 2}$ (d, e); c, f – the ensemble-averaged value of the mean phase coherence $\langle \rho \rangle$ for $x_2(t)$ and $x_3(t)$. Bold line – results obtained without pre-filtering signals; line with triangles – time series were pre-filtered using a *rejection* filter, the frequencies corresponding to the first (acting) oscillator were suppressed; line with circles – time series were pre-filtered using a *bandpass* filter, the frequencies corresponding to the second and third oscillators were distinguished; dashed horizontal line – acceptable level of frequency error

а при $k_{2 \rightarrow 3} > 0$ вплоть до 0.8 чувствительность метода к связи принимает малые значения. Таким образом, наличие общего источника воздействия может снизить эффективность метода при выявлении существующей связи.

Применение режекторного фильтра в этом случае оказывается более эффективным по сравнению с полосовым фильтром, так как при $k_{2 \rightarrow 3} > 0.9$ чувствительность модифицированного метода с применением полосового фильтра снижается сильнее, чем при использовании режекторного фильтра. При этом оба фильтра снижают долю ошибок при $k_{2 \rightarrow 3} = 0$.

Заключение

Метод выявления связи, основанный на моделировании фазовой динамики может давать ложные выводы о наличии/отсутствии связи в случаях, когда имеется несколько пиков в спектре мощности сигналов и ширина этих пиков значительна (порядка 10% и более от частоты максимума). Для решения этой проблемы можно предложить (как наиболее эффективные из проверенных нами) два подхода к фильтрации сигналов в окрестности одного из наблюдаемых пиков: 1) удаление режекторным фильтром полосы частот общего источника воздействия, пик которого

наблюдается в спектрах обоих исследуемых сигналов; 2) выделение полосовым фильтром области частот, содержащей собственные пики обоих исследуемых осцилляторов. При выявлении реально существующей связи более эффективным оказывается подход с применением режекторного фильтра.

Диагностическим критерием возможных проблемных ситуаций может служить оценка автокорреляционной функции остаточных ошибок построенной модели фазовой динамики: автокорреляционная функция остатков модели медленно спадает до нулевого значения в случае наличия общего (не учтенного при построении модели) источника воздействия на наблюдаемые осцилляторы.

Эффективность предложенных подходов и диагностического критерия продемонстрирована численными экспериментами на системе связанных осцилляторов ван дер Поля.

Библиографический список

1. *Hung Y.C., Hu C.K.* Chaotic communication via temporal transfer entropy // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 101. P. 244102.
2. *Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buhrle C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A.* The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis // *Europhysics Letters*. 2008. Vol. 83. P. 20003.
3. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
4. *Tass P.A.* Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modeling and Data Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 329 p.
5. *Pereda E., Quian Quiroga R., Bhattacharya J.* Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals // *Progr. Neurobiol.* 2005. Vol. 77. P. 1–37.
6. *Tass P., Smirnov D., Karavaev A., Barnikol U., Barnikol T., Adamchic I., Hauptmann C., Pawelczyk N., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Bezruchko B.* The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor // *J. Neural Engineering*. 2010. Vol. 7. P. 016009.
7. *Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Kiselev A.R., Gridnev V.I., Ruban E.I., Bezruchko B.P.* Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system // *Chaos*. 2009. Vol. 19. P. 033112.
8. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.R.* Olivo-cerebellar clusterbased universal control system // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2003. Vol. 100, № 22. Pp. 13064.
9. *Lacaux J.-P., Rodriguez E., Le Van Quyen M., Lutz A.* Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain // *Int. J. Bif. Chaos*. 2000. Vol. 10. Pp. 2429–2455.
10. *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44. С. 283–293.
11. *Barnston A.G., Livezey R.E.* Classification, seasonality and persistence of low frequency atmospheric circulation patterns // *Mon. Wea. Rev.* 1987. Vol. 115. P. 1083.
12. *Mokhov I.I., Smirnov D.A.* El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices // *Geophys. Res. Lett.* 2006. Vol. 33. L03708.
13. *Мохов И.И.* Диагностика структуры климатической системы. СПб.: Гидрометеиздат, 1993. 271 с.
14. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E*. 2001. Vol. 64. P. 045202(R).

15. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. P. 046204.
16. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. P. 046209.
17. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
18. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis // *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 1998. Vol. 79. Pp. 61–78.
19. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. Москва: Физматлит, 2003. 176 с.
20. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J., Schafer C. Phase synchronization: From theory to data analysis // *Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics*. 2000. Vol. 4. P. 279.

References

1. Hung Y.C., Hu C.K. Chaotic communication via temporal transfer entropy. *Physical Review Letters*, 2008, vol. 101, p. 244102.
2. Smirnov D.A., Barnikol U.B., Barnikol T.T., Bezruchko B.P., Hauptmann C., Buhrlé C., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Tass P.A. The generation of parkinsonian tremor as revealed by directional coupling analysis. *Europhysics Letters*, 2008, vol. 83, p. 20003.
3. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002.
4. Tass P.A. Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modeling and Data Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 329 p.
5. Pereda E., Quiroga R., Bhattacharya J. Nonlinear multivariate analysis of neurophysiological signals. *Progr. Neurobiol.*, 2005, vol. 77, pp. 1–37.
6. Tass P., Smirnov D., Karavaev A., Barnikol U., Barnikol T., Adamchic I., Hauptmann C., Pawelczyk N., Maarouf M., Sturm V., Freund H.-J., Bezruchko B. The causal relationship between subcortical local field potential oscillations and parkinsonian resting tremor. *J. Neural Engineering*, 2010, vol. 7, p. 016009.
7. Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Kiselev A.R., Gridnev V.I., Ruban E.I., Bezruchko B.P. Synchronization of low-frequency oscillations in the human cardiovascular system. *Chaos*, 2009, vol. 19, p. 033112.
8. Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.R. Olivo-cerebellar clusterbased universal control system. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2003, vol. 100, iss. 22, p. 13064.
9. Lacaux J.-P., Rodriguez E., Le Van Quyen M., Lutz A. Studying single-trials of phase synchronous activity in the brain. *Int. J. Bif. Chaos*, 2000, vol. 10, pp. 2429–2455.
10. Mokhov I.I., Smirnov D.A. *News of RAS. Atmospheric and ocean physics*, 2008, no. 44, pp. 283–293.
11. Barnston A.G., Livezey R.E. Classification, seasonality and persistence of low frequency atmospheric circulation patterns. *Mon. Wea. Rev.*, 1987, vol. 115, p. 1083.
12. Mokhov I.I., Smirnov D.A. El Nino Southern Oscillation drives North Atlantic Oscillation as revealed with nonlinear techniques from climatic indices. *Geophys. Res. Lett.*, 2006, vol. 33, L03708.
13. Mokhov I.I. SpB: Hydrometeoizdat, 1993. 271 p. (in Russian).
14. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. Detecting direction of coupling in interacting oscillators. *Phys. Rev. E.*, 2001, vol. 64, p. 045202(R).

15. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Detection of coupling in ensembles of stochastic oscillators. *Physical Review E.*, 2009, vol. 79, p. 046204.
16. Smirnov D.A., Bezruchko B.P. Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series. *Phys. Rev. E.*, 2003, vol. 68, p. 046209.
17. Weinstein L.A., Vakman D.E. *Razdelenie chastot v teorii kolebanij i voln.* M.: Nauka, 1983, 288 p. (in Russian).
18. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis. *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 1998, vol. 79, pp. 61–78.
19. Koronovskij A.A., Hramov A.E. *Nepreryvnyj Vevvletnyj Analiz i Ego Prilozheniya.* M.: Fizmatlit, 2003, 176 p. (in Russian).
20. Rosenblum M.G., Pikovsky A., Kurths J. Phase synchronization: From theory to data analysis. *Neuro-informatics. Handbook of Biological Physics*, 2000, vol. 4, p. 279.



Навроцкая Елена Владимировна родилась (1987) в Алма-Ата, республика Казахстан. Окончила Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского (2011) по направлению «Биомедицинская инженерия». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.03 «Радиофизика» (2016, СГУ). Работает в Саратовском университете с 2008 года, в настоящее время – в должности доцента кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии. Автор более 15 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
 E-mail: sidakev@gmail.com



Смирнов Дмитрий Алексеевич родился (1977) в Саратовской области. Окончил Саратовский университет (1999). Защитил кандидатскую (2001, СГУ) и докторскую (2010, СГУ) диссертации по специальности «Радиофизика» на темы, связанные с анализом временных рядов, реконструкцией уравнений динамики и оценкой направленных связей по временным рядам. С 2002 года работает в СФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, в настоящее время – ведущий научный сотрудник. Автор и соавтор двух монографий и 74 статей в рецензируемых научных журналах, профессор РАН, имеет звание «Выдающийся рецензент Американского физического общества» (APS Outstanding referee).

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
 E-mail: smirnovda@yandex.ru



Безручко Борис Петрович родился (1946) в посёлке Шиханы Саратовской обл. Окончил Саратовский государственный университет (1969) по направлению «Радиофизика и электроника». Работает в СГУ на должности профессора кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии и в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН ведущим научным сотрудником лаборатории моделирования в нелинейной динамике. Доктор физико-математических наук по специальности 01.04.03 «Радиофизика», профессор. Автор более 100 статей в рецензируемых журналах.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
 E-mail: bezruchkobp@gmail.com