

01

Реконструкция ансамблей осцилляторов с нелинейными запаздывающими связями

© И.В. Сысоев^{1,2}, В.И. Пономаренко^{1,2}, М.Д. Прохоров¹

¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступило в Редакцию 30 июля 2018 г.

Предложен метод реконструкции ансамблей нелинейных осцилляторов, связанных между собой нелинейными связями с запаздыванием. Метод позволяет восстановить по временным рядам собственные нелинейные функции всех элементов ансамбля, а также архитектуру связей между осцилляторами и параметры всех сигмоидных функций связи, включая время запаздывания.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.22.46922.17479

Задача реконструкции модельных уравнений и определения параметров колебательных систем по их экспериментальным временным рядам актуальна для многих научных дисциплин [1]. Для решения этой задачи разработаны различные методы, причем в последние годы все большее внимание уделяется реконструкции не отдельных систем, а ансамблей связанных между собой осцилляторов [2–8]. При этом помимо восстановления собственных параметров элементов ансамбля возникает задача выявления наличия, структуры и характеристик связей между элементами. Недавно нами были предложены методы реконструкции архитектуры и величины связей в ансамблях линейно связанных нелинейных систем с запаздыванием [9–11] и в ансамблях нелинейно связанных линейных осцилляторов [12]. В настоящей работе рассмотрен более общий случай ансамбля нелинейных осцилляторов, связанных между собой нелинейными связями с запаздыванием, и предложен метод, позволяющий по временным рядам реконструировать собственные нелинейные функции всех элементов ансамбля, а также

архитектуру связей и нелинейные функции связи между каждой парой осцилляторов ансамбля.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из нелинейно связанных нелинейных осцилляторов, каждый из которых описывается дифференциальным уравнением первого порядка следующего вида:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \tanh(g_{i,j}(x_j(t - \tau_{i,j}) - c_{i,j})), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, D$; D — число осцилляторов в ансамбле; f_i — нелинейная функция осциллятора; $k_{i,j}$ — коэффициенты связи, характеризующие воздействие j -го элемента на i -й; сигмоидная функция связи описывается гиперболическим тангенсом с масштабным коэффициентом $g_{i,j}$ и параметром сдвига $c_{i,j}$; $\tau_{i,j}$ — время запаздывания в связи от j -го элемента к i -му. Уравнение (1) является обобщением уравнения, предложенного в [13] для ансамбля линейных осцилляторов, не имеющих задержек в связях.

Пусть даны временные ряды $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$ длиной N точек всех осцилляторов ансамбля, измеренные с шагом выборки $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Для простоты обозначим $x_i(t_n) = x_i(n)$ и $\dot{x}_i(t_n) = \dot{x}_i(n)$. Введем дискретные времена запаздывания в связях $\theta_{i,j} = \tau_{i,j}/\Delta t$ и обозначим максимальное из $\theta_{i,j}$ для данного i как θ_i . Теперь выразим нелинейную функцию f_i из уравнения (1) в виде

$$f_i(x_i(n)) = \dot{x}_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \tanh(g_{i,j}(x_j(n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})), \quad (2)$$

где $n \in [\theta_i + 1, N]$. Введем отображение Q , которое производит сортировку значений $x_i(n)$ по возрастанию и ставит в соответствие номеру n величины $x_i(n)$ в исходном временном ряду ее номер $Q_i(n)$ в отсортированном ряду. Обратное отображение, ставящее в соответствие номеру $Q_i(n)$ величины $x_i(n)$ в отсортированном ряду ее номер n в исходном временном ряду, обозначим как Q^{-1} . Тогда две соседние точки в отсортированном ряду, имеющие номера $Q_i(n)$ и $Q_i(n) - 1$, будут иметь номера n и p_n в исходном ряду, где $p_n = Q_i^{-1}(Q_i(n) - 1)$.

В предположении непрерывности функции f_i близким значениям $x_i(n)$, имеющим в исходном ряду порядковые номера n и p_n , соответствуют близкие значения функции $f_i(x_i(n))$ и $f_i(x_i(p_n))$. Разность

значений функции в точках n и p_n обозначим $\delta_i(n)$

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(n)) - f_i(x_i(p_n)) = \Delta \dot{x}_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D \Delta h_{i,j}(n - \theta_{i,j}), \quad (3)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{j,j}(n - \theta_{i,j}) &= k_{i,j} \tanh\left(g_{i,j}(x_j(n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})\right) \\ &- k_{i,j} \tanh\left(g_{i,j}(x_j(p_n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})\right). \end{aligned} \quad (5)$$

При $N \rightarrow \infty$ разности $\delta_i(n) \rightarrow 0$. Предположим сначала, что нам известны все времена запаздывания $\theta_{i,j}$ в связях, а параметры $k_{i,j}$, $g_{i,j}$ и $c_{i,j}$ являются неизвестными. Эти неизвестные параметры, характеризующие связь осцилляторов ансамбля, можно восстановить, решая задачу минимизации следующей целевой функции:

$$S_i(k_{i,1}, \dots, k_{i,D}, g_{i,1}, \dots, g_{i,D}, c_{i,1}, \dots, c_{i,D}) = \sum_{n=\theta_i+1}^N \delta_i^2(n). \quad (6)$$

Минимум функции (6) дает оценку параметров $k_{i,j}$, $g_{i,j}$ и $c_{i,j}$, точность которой зависит от длины ряда, наличия шумов и точности оценки производной. Для нахождения производной $\dot{x}_i(n)$ по временному ряду мы использовали численный метод Савицкого–Голея [14]. Задача минимизации функции (6) сводится к нелинейному методу наименьших квадратов, для реализации которого мы использовали метод Левенберга–Марквардта [15] и метод отображения доверительных областей [16]. Оба метода дали близкие результаты. Восстановив все коэффициенты связи и параметры функций связи элементов ансамбля, можно восстановить собственные нелинейные функции f_i всех осцилляторов по формуле (2). Следует отметить, что описанный подход позволяет восстанавливать нелинейные функции f_i произвольного вида.

Проиллюстрируем эффективность метода на примере ансамбля восьми связанных осцилляторов вида (1), имеющих кубическую нелинейную функцию

$$f_i(x_i) = a_i x_i + b_i x_i^3. \quad (7)$$

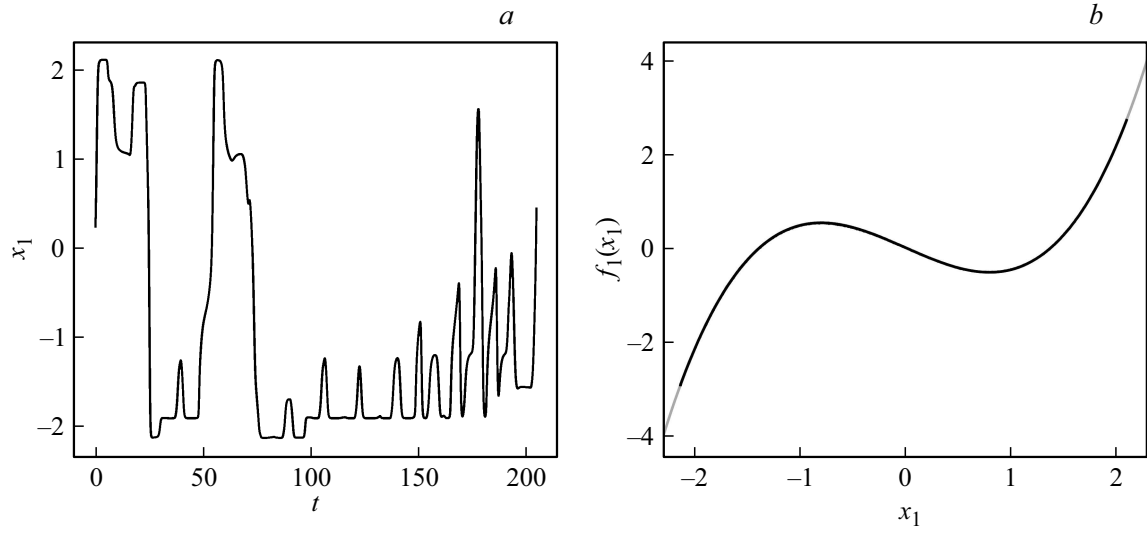
Все осцилляторы ансамбля являются неидентичными. Параметры нелинейных функций и функций связи принимают случайные значения из

равномерного распределения на следующих отрезках: $a_i \in [0.5, 1.5]$, $b_i \in [0, 1]$, $g_{i,j} \in [0.5, 1.5]$, $c_{i,j} \in [-1, 1]$, $\theta_{i,j} \in [130, 200]$. Из 56 возможных связей между осцилляторами ансамбля половина случайно выбранных связей была положена равной нулю ($k_{j,j} = 0$), а остальные 28 коэффициентов $k_{i,j}$ были заданы случайным образом из нормального распределения с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением, равным $6/\sqrt{D}$. Для численного решения уравнений использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка с адаптивным шагом и $\Delta t = 0.05$. Длина временных рядов $N = 2^{12}$.

На рисунке, *a* приведен хаотический временной ряд первого осциллятора. Восстановленная нелинейная функция первого осциллятора показана на рисунке, *b*. Она практически совпадает с истинной нелинейной функцией f_1 . На рисунке, *c* восстановлена одна из функций связи первого осциллятора, которая описывает воздействие второго осциллятора на первый. Как видно из этого рисунка, восстановленная функция связи достаточно близка к истинной функции связи $h_{1,2}$. Хорошее качество реконструкции нелинейных функций f_1 и $h_{1,2}$ свидетельствует о высокой точности восстановления параметров $k_{i,j}$, $g_{i,j}$ и $c_{i,j}$. Аналогичным образом проводится реконструкция остальных функций связи первого осциллятора, а также собственных нелинейных функций и функций связи остальных элементов ансамбля.

Всего было рассмотрено четырнадцать реализаций ансамбля из восьми связанных осцилляторов при различных значениях параметров. В семи случаях архитектура связей в ансамбле была восстановлена без ошибок, в четырех случаях была найдена одна лишняя связь, а в остальных трех случаях имелись как лишние, так и пропущенные связи. На рисунке, *d* приведена диаграмма восстановленной архитектуры связей в ансамбле, соответствующая случаю абсолютно точной реконструкции.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда времена запаздывания в связях $\theta_{i,j}$ заранее неизвестны. Зададим стартовые догадки $\tilde{\theta}_{i,j}$ при фиксированном индексе i и найдем для них минимум S_{i0} целевой функции (6). Затем для одной из связей увеличим дискретное время задержки $\tilde{\theta}_{i,j}$ на 1 и найдем минимум S_{i+} функции (6), после чего вернем прежнее значение $\tilde{\theta}_{i,j}$. Повторим эту процедуру по очереди для каждой связи. Далее найдем минимумы S_{i-} функции (6) при поочередном уменьшении каждого $\tilde{\theta}_{i,j}$ на 1. Из $D - 1$ минимумов S_{i+} и $D - 1$ минимумов S_{i-} найдем наименьший $S_{i \min}$. Если $S_{i \min} < S_{i0}$, то



a — временной ряд колебаний первого осциллятора; b — восстановленная (черная кривая) и истинная (серая кривая) функция f_1 ; c — восстановленная на плоскости $(x_2, y_{1,2})$ (черная кривая), где $y_{1,2} = k_{1,2} \tanh(g_{1,2}(x_2 - c_{1,2}))$, и истинная (серая кривая) функция связи $h_{1,2}$; d — диаграмма восстановленной архитектуры связей, где черным цветом показаны правильно восстановленные связи, а белым — правильно диагностированные отсутствующие связи.

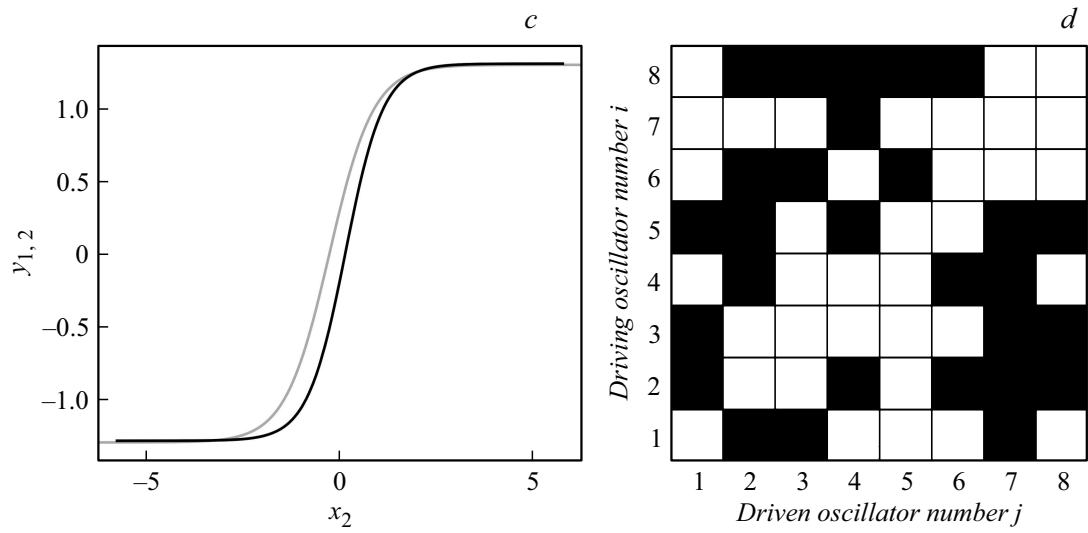


Рисунок (продолжение).

значения $\tilde{\theta}_{i,j}$, соответствующие $S_{i \min}$, принимаются за новые стартовые догадки и процедура повторяется, пока $S_{i \min}$ не достигнет минимума.

Недостатком такого подхода является возможность попадания в локальный минимум целевой функции (6). В рассмотренных нами примерах алгоритм позволял точно восстановить $\theta_{i,j}$, если стартовые догадки $\tilde{\theta}_{i,j}$ отличались от $\theta_{i,j}$ менее чем на 5%. С увеличением разности $|\theta_{i,j} - \tilde{\theta}_{i,j}|$ растет вероятность ошибок при реконструкции $\theta_{i,j}$. Такие ошибки можно исправить, сканируя область стартовых догадок для $\theta_{i,j}$ с некоторым шагом, что требует существенного увеличения вычислительных затрат.

Итак, нами предложен метод реконструкции архитектуры и параметров связей в ансамблях нелинейных осцилляторов, связанных нелинейными связями с запаздыванием. Помимо функций связи между каждой парой осцилляторов в ансамбле метод позволяет восстановить по временным рядам собственные нелинейные функции произвольного вида для каждого осциллятора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-02-00091).

Список литературы

- [1] *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Extracting knowledge from time series. An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin: Springer, 2010. 405 p.
- [2] *Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z.* // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114. N 2. P. 028701.
- [3] *Yang X.L., Wei T.* // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 82. P. 319–332.
- [4] *Pikovskiy A.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 93. N 6. P. 062313.
- [5] *Koutlis C., Kugiumtzis D.* // Chaos. 2016. V. 26. N 9. P. 093120.
- [6] *Wang W.-X., Lai Y.-C., Grebogi C.* // Phys. Rep. 2016. V. 644. P. 1–76.
- [7] *Cestnik R., Rosenblum M.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. N 1. P. 012209.
- [8] *Ma H., Leng S., Tao C., Ying X., Kurths J., Lai Y.-C., Lin W.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. N 1. P. 012221.
- [9] *Сысоев И.В., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Безручко Б.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 10. С. 16–26.
- [10] *Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Kulminskiy D.D., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. N 5. P. 052207.
- [11] *Сысоев И.В., Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. N 3. С. 21–37.

- [12] *Сысоев И.В., Пономаренко В.И.* // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. N 4. С. 567–576.
- [13] *Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.-J.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. N 3. P. 259–262.
- [14] *Savitzky A., Golay M.* // Anal. Chem. 1964. V. 38. P. 1627–1639.
- [15] *Marquardt D.* // SIAM J. Appl. Math. 1963. V. 11. P. 431–441.
- [16] *Coleman T.F., Li Y.* // SIAM J. Optimiz. 1996. V. 6. P. 418–445.