



УДК 537.86

Управление коллективной динамикой в сети бистабильных систем с запаздыванием, связанных через общее поле

В. И. Пономаренко, Д. Д. Кульминский,
Е. И. Боровкова, М. Д. Прохоров



Пономаренко Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН; профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ponomarenkovi@gmail.com

Кульминский Данил Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН; доцент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, kulminskydd@gmail.com

Боровкова Екатерина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела продвижения новых кардиологических информационных технологий, Саратовский государственный медицинский университет имени В. И. Разумовского; ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, rubane1@mail.ru

Прохоров Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике, Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, mdprokhorov@yandex.ru

Объект исследования – сеть идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле и находящихся под воздействием внешнего гармонического сигнала. Общее поле, осуществляющее глобальную связь систем с задержкой, имеет собственное время запаздывания, что позволяет учесть конечную скорость распространения и обработки сигналов в среде, через которую связаны осцилляторы. **Цель исследования** – изучить возможность управления с помощью внешнего гармонического воздействия коллективной динамикой в исследуемой сети связанных бистабильных осцилляторов с запаздыванием. **Методы и подходы** – нелинейная функция осцилляторов и ее параметры выбраны таким образом, чтобы обеспечить существование бистабильных колебательных режимов, в которых основные частоты колебаний осциллятора отличаются в три раза, причем один из бистабильных режимов является периодическим, а другой – хаотическим. Начальные условия в связанных осцилляторах заданы так, чтобы в исследуемой сети сформировались два кластера, каждый из которых в зависимости от величины фазового сдвига сигнала общего поля мог демонстрировать как синхронное, так

и несинхронное поведение входящих в него элементов. Управление колебательными режимами в сети осуществляется с помощью вариации параметров общего поля и внешнего гармонического воздействия. **Основные результаты** – показано, что с помощью гармонического сигнала относительно малой амплитуды можно эффективно управлять колебательными режимами, в том числе формировать или разрушать состояния «химера», в сети идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, глобально связанных через общее поле.

Ключевые слова: сеть связанных осцилляторов, системы с запаздыванием, бистабильность, управление коллективной динамикой, состояния «химера».

Поступила в редакцию: 21.06.2019 / Принята: 03.09.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-258-269>

Введение

Сети, состоящие из связанных нелинейных колебательных систем, характеризуются большим разнообразием коллективного поведения своих элементов [1–5]. Особенности собственной динамики составляющих сеть осцилляторов, а также структура и интенсивность связей между осцилляторами определяют происходящие в сети процессы, приводящие к синхронизации элементов, их кластеризации и образованию различных пространственно-временных структур. Интересным типом коллективной динамики связанных осцилляторов является относительно недавно обнаруженное в сетях состояние «химера», при котором в сети идентичных осцилляторов одновременно существуют кластеры с синхронным и несинхронным поведением элементов [6–16].

Управление сложной коллективной динамикой в сетях, в том числе управление состояниями «химера», является важной задачей, представляющей большой интерес для многих научных дисциплин. Для решения задачи управления коллективной динамикой в сетях связанных осцилляторов были предложены различные методы [17–27]. Как правило, методы управления сетевой динамикой основаны на использовании особым образом введенных связей (как постоянных, так и адаптивно меняющихся) между осцил-



ляторами сети или на использовании внешнего воздействия. При этом в большинстве случаев управление коллективной динамикой направлено на достижение синхронизации всех элементов сети, а задачи управления кластерной синхронизацией и состояниями «химера» исследованы в меньшей степени.

В данной работе впервые исследована задача управления с помощью внешнего гармонического воздействия коллективной динамикой в сети

идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, глобально связанных между собой через общее поле.

1. Исследуемая система

Рассмотрим сеть, состоящую из идентичных кольцевых систем с запаздыванием, связанных через общее поле и находящихся под действием внешнего гармонического воздействия. Блок-схема исследуемой сети представлена на рис. 1.

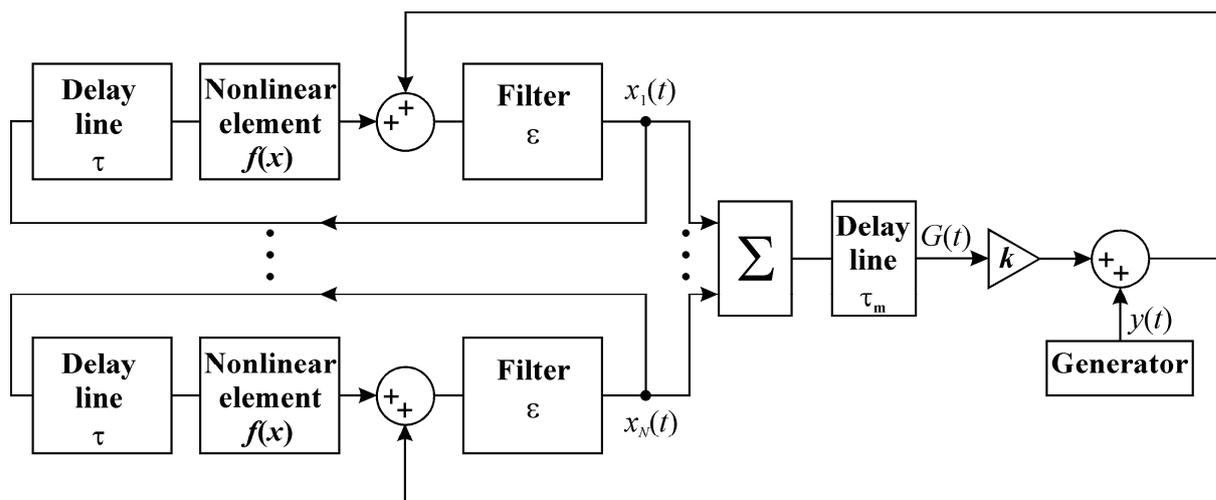


Рис. 1. Блок-схема сети, состоящей из кольцевых систем с запаздывающей обратной связью, глобально связанных через общее поле, на которые действует внешнее воздействие. Показаны только первая и N-я системы с задержкой. Σ – сумматор

Fig. 1. Block diagram of a network composed of ring time-delayed feedback systems globally coupled via the mean field and driven by external force. The first and Nth time-delay systems are depicted. The summator is denoted by Σ

Динамика каждого из осцилляторов сети описывается следующим дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом:

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau)) + kG(t) + y(t), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$, N – число элементов в сети; $\varepsilon = RC$ – параметр низкочастотного RC-фильтра первого порядка, определяющий инерционные свойства системы; $x_i(t)$ – состояние i -го осциллятора в момент времени t ; τ – время запаздывания; $f(x)$ – нелинейная функция, описывающая передаточную характеристику усилителя, играющего роль нелинейного элемента; $G(t)$ – общее поле; k – коэффициент связи; $y(t)$ – внешнее воздействие.

Все осцилляторы с запаздыванием связаны между собой через общее поле $G(t)$, которое действует на каждый элемент сети и осуществляет глобальную связь между элементами. Общее

поле формируется путем сложения сигналов $x_i(t)$ всех осцилляторов, нормировки суммарного сигнала на N и его задержки на собственное время запаздывания общего поля τ_m . В результате общее поле $G(t)$ описывается уравнением следующего вида:

$$G(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t - \tau_m). \quad (2)$$

Введение собственной задержки общего поля позволяет учесть конечную скоростью распространения и обработки сигналов в среде, через которую связаны осцилляторы. Силу связи осцилляторов через общее поле определяет величина коэффициента k . На каждый осциллятор сети действует также внешнее гармоническое воздействие

$$y(t) = A \sin(\omega t), \quad (3)$$

где A и ω – амплитуда и частота внешнего воздействия соответственно. Отметим, что сигналы $G(t)$ и $y(t)$ можно подать в различные точки



кольцевой системы с запаздыванием, и при изменении точки их подключения изменится и вид модельного уравнения (1), описывающего динамику осцилляторов.

В качестве собственной нелинейной функции осцилляторов (1) возьмем кубическую функцию

$$f(x) = a(x - c) - b(x - c)^3, \quad (4)$$

позволяющую получить бистабильность в исследуемых осцилляторах. При $a = 2.3$, $b = 1.0$, $c = 0.11$ осциллятор может совершать в зависимости от начальных условий либо периодические колебания, частота которых близка к величине $\nu_1 = 1/(2\tau)$, либо хаотические колебания, основная частота которых близка к величине $\nu_2 = 3/(2\tau)$. Качественно похожие периодические и хаотические колебательные режимы наблюдаются в осцилляторах (1) с синусоидальной нелинейностью. Как было показано в [28], в таких осцилляторах возникают колебательные режимы с частотами вблизи $\nu = n/(2\tau)$, соответствующие фундаментальному решению дифференциальных уравнений с запаздыванием (случай $n = 1$) и решениям на высших гармониках (случай, где n – целое нечетное число, большее 1).

Вид колебательного режима в исследуемой сети определяется выбором начальных условий в связанных осцилляторах. Если задать начальные условия так, чтобы часть осцилляторов совершала колебания на частоте вблизи ν_1 , а другая часть осцилляторов совершала колебания на частоте вблизи ν_2 , то элементы сети окажутся разделены на два кластера, которые отличаются частотой колебаний осцилляторов. В отсутствие внешнего воздействия ($y(t) = 0$) коллективная динамика осцилляторов внутри каждого кластера зависит от величины фазового сдвига $\Delta\phi$ сигнала общего поля $G(t)$ относительно $x_i(t)$. Если $|\Delta\phi| < \pi/2$, то связь через общее поле является притягивающей и приводит к синхронизации осцилляторов. Если $\pi/2 < |\Delta\phi| < 3\pi/2$, то связь является отталкивающей, и осцилляторы демонстрируют несинхронные колебания [29].

Так как общее поле формируется путем сложения сигналов $x_i(t)$ всех осцилляторов сети, сигнал (2) содержит две основные частотные составляющие, частоты которых близки к ν_1 и ν_2 [30, 31]. Из-за наличия собственной задержки общего поля эти частотные составляющие

претерпевают фазовые сдвиги $\Delta\phi_1$ и $\Delta\phi_2$ соответственно, которые линейно зависят от τ_m и зависят от параметра фильтра ε :

$$\Delta\phi_1 = -2\pi\nu_1\tau_m - \arctg(2\pi\nu_1\varepsilon), \quad (5)$$

$$\Delta\phi_2 = -2\pi\nu_2\tau_m - \arctg(2\pi\nu_2\varepsilon). \quad (6)$$

На рис. 2 построены зависимости $\Delta\phi_1(\tau_m)$ и $\Delta\phi_2(\tau_m)$ при $\tau = 100$ ($\nu_1 = 1/200$ и $\nu_2 = 3/200$) и $\varepsilon = 8$. Области различных колебательных режимов обозначены на рис. 2 как SS, CS1, CS2 и AS. В области SS синхронные колебания совершают как осцилляторы в первом кластере, так и осцилляторы во втором кластере. В области AS колебания осцилляторов несинхронны и в первом, и во втором кластерах. В областях CS1 и CS2 существуют два разных состояния «химера». В области CS1 синхронны осцилляторы первого кластера, совершающие периодические колебания на частоте вблизи ν_1 , и несинхронны осцилляторы второго кластера, совершающие хаотические колебания, основная частота которых близка к ν_2 . В области CS2 имеет место обратная ситуация, при которой периодические осцилляторы первого кластера колеблются несинхронно с частотой вблизи ν_1 , а осцилляторы второго кластера совершают синхронные хаотические колебания, основная частота которых близка к ν_2 .

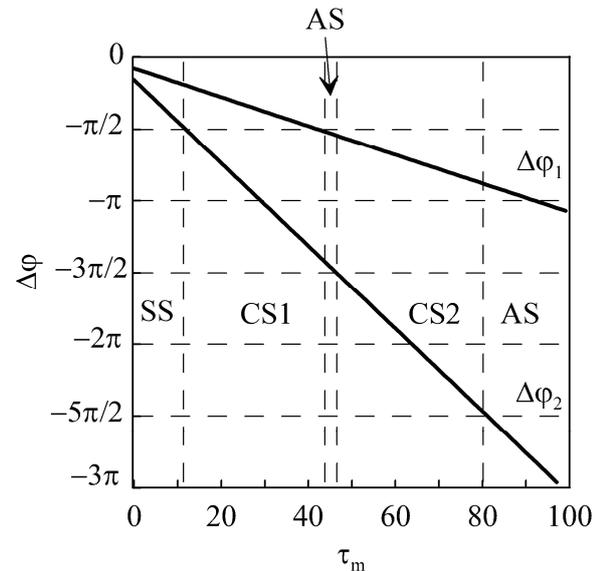


Рис. 2. Зависимости $\Delta\phi_1(\tau_m)$ и $\Delta\phi_2(\tau_m)$ при $\nu_1 = 1/200$, $\nu_2 = 3/200$ и $\varepsilon = 8$

Fig. 2. Dependencies $\Delta\phi_1(\tau_m)$ and $\Delta\phi_2(\tau_m)$ for $\nu_1 = 1/200$, $\nu_2 = 3/200$ and $\varepsilon = 8$



2. Управление коллективной динамикой связанных осцилляторов с помощью гармонического воздействия

Исследуем возможность управления колебательными режимами в сети идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью с помощью внешнего гармонического воздействия. Рассмотрим сеть, состоящую из восьми идентичных бистабильных осцилляторов с запаздыванием (1) при $\tau = 100$ и $\varepsilon = 8$, имеющих кубическую функцию $f(x)$ вида (4) с указанными в разделе 1 значениями параметров и связанных через общее поле $G(t)$ вида (2) при $k = 0.003$. Начальные условия зададим таким образом, чтобы четыре осциллятора совершали периодические колебания с частотой вблизи ν_1 , а четыре остальных осциллятора демонстрировали хаотические колебания с основной частотой вблизи $\nu_2 = 3\nu_1$.

Рассмотрим сначала случай $\tau_m = 90$ и $u(t) = 0$, соответствующий области AS на рис. 2. При этом в сети устанавливается колебательный режим, при котором осцилляторы совершают несинхронные колебания как в первом, так и во втором кластерах. Временные реализации колебаний во всех восьми связанных осцилляторах показаны на рис. 3, а слева градиациями серого цвета. Реализации периодических колебаний осцилляторов первого кластера показаны в верхней части рисунка, а хаотические колебания осцилляторов второго кластера показаны в нижней части рисунка. В середине рисунка черным цветом показана временная реализация сигнала $kG(t)$, отвечающего за связь осцилляторов с общим полем.

На рис. 3, а справа показаны сечения Пуанкаре для каждого из периодических осцилляторов, обозначенных номерами 1–4, и хаотических осцилляторов, обозначенных номерами 5–8. Для построения этих сечений мы откладывали на графиках значения x_1 , x_2 и x_4 в моменты времени, когда $x_3 = \text{const}$, $\dot{x}_3 > 0$ и значения x_5 , x_7 и x_8 в моменты времени, когда $x_6 = \text{const}$, $\dot{x}_6 > 0$. Осцилляторы первого кластера совершают близкие к периодическим колебания с периодом около $T_1 = 215$, которые имеют одинаковую амплитуду, но сдвинуты относительно друг друга по фазе. Небольшие флуктуации периода колебаний объясняются влиянием общего поля, в формировании которого участвуют, в том числе хаотические осцилляторы.

Если подействовать на все осцилляторы сети внешним гармоническим сигналом (3) с $A = 0.004$ и $T = 2\pi/\omega = 215$, то он синхронизирует периодические колебания элементов первого кластера, а динамика хаотических осцилляторов при этом качественно не изменится (рис. 3, б). Временная реализация гармонического сигнала $u(t)$ показана в середине рис. 3, б, слева серым цветом рядом с сигналом $kG(t)$. Так как все осцилляторы идентичны, временные реализации периодических колебаний четырех осцилляторов первого кластера полностью совпадают в результате синхронизации и неразличимы между собой на рис. 3, б. Их сечения Пуанкаре тоже одинаковы и имеют единственную точку $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Аналогичный результат достигается при небольшой вариации периода внешнего гармонического воздействия вблизи величины $T = 215$. Таким образом, гармонический сигнал даже относительно небольшой амплитуды способен синхронизовать периодические осцилляторы первого кластера, если частота воздействия близка к собственной частоте колебаний осцилляторов. В результате такого внешнего воздействия в сети возникает состояние «химера», качественно похожее на состояние «химера», наблюдаемое в области CS1 на рис. 2.

Если на осцилляторы, временные реализации которых показаны на рис. 3, а, подействовать внешним гармоническим сигналом (3) с $A = 0.015$ и $T = 71$, то это приведет к синхронизации осцилляторов второго кластера, совершающих хаотические колебания, а осцилляторы первого кластера по-прежнему останутся несинхронными (рис. 3, в). В результате в сети возникает состояние «химера», качественно похожее на состояние «химера», наблюдаемое в области CS2 на рис. 2. Следует отметить, что в отличие от периодических осцилляторов, демонстрирующих полную синхронизацию на рис. 3, б, хаотические осцилляторы на рис. 3, в демонстрируют фазовую синхронизацию, при которой они могут иметь разную амплитуду колебаний. Сечения Пуанкаре представляют при этом множества точек, значения x_i которых близки для разных осцилляторов. Для синхронизации хаотических осцилляторов нам потребовалось в несколько раз увеличить амплитуду гармонического воздействия по сравнению со случаем синхронизации периодических осцилляторов.

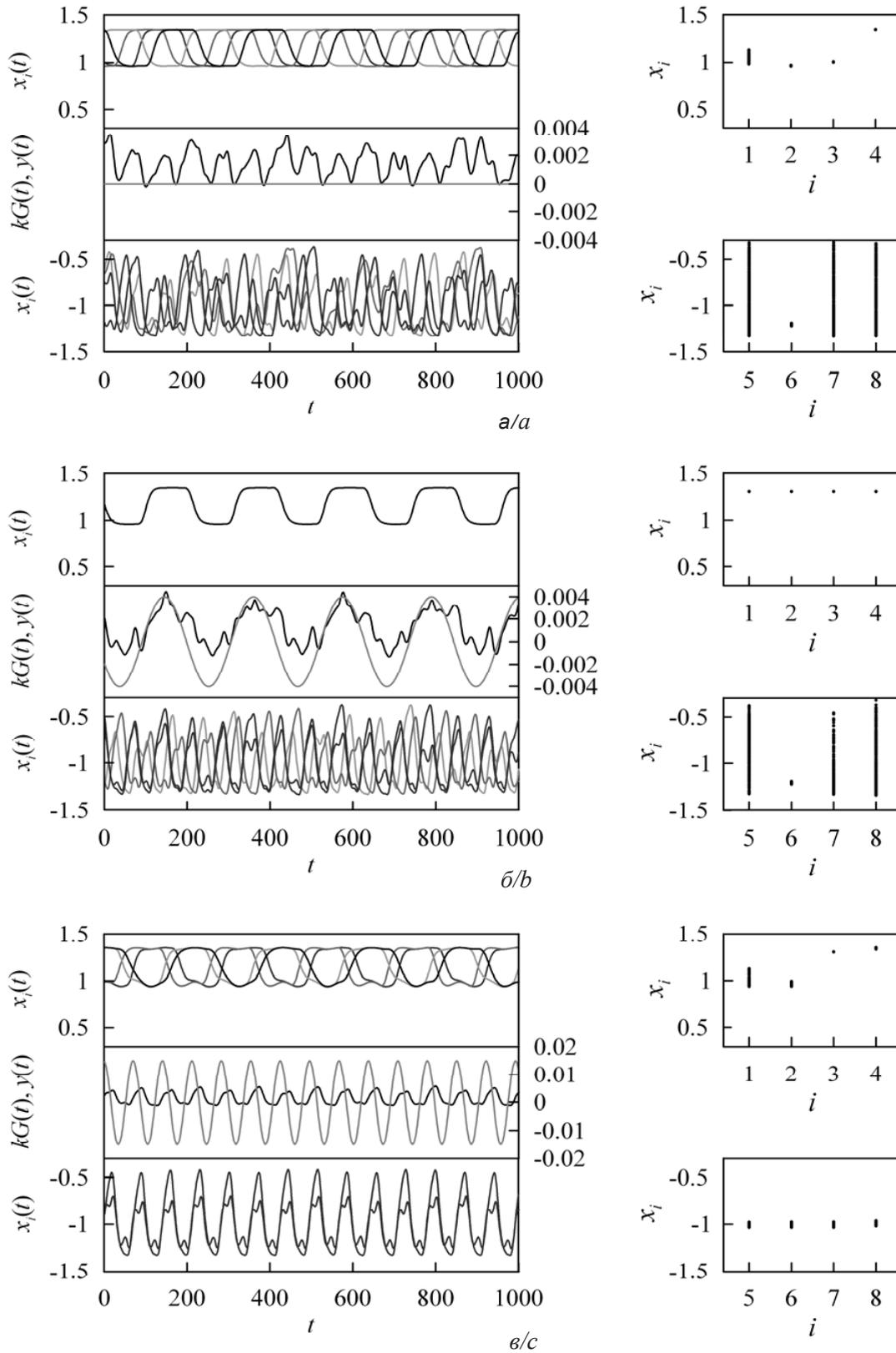


Рис. 3. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (1), сигнала $kG(t)$ (черный цвет) при $\tau_m = 90$ и $y(t)$ (серый цвет), а также сечения Пуанкаре при $A = 0$ (а), $A = 0.004$ и $T = 215$ (б), $A = 0.015$ и $T = 71$ (в)
Fig. 3. Time series of oscillations of the coupled oscillators (1), signal $kG(t)$ (black color) at $\tau_m = 90$, and signal $y(t)$ (grey color) and Poincaré sections at $A = 0$ (a), $A = 0.004$ and $T = 215$ (b), $A = 0.015$ and $T = 71$ (c)



Рассмотрим теперь случай $\tau_m = 60$, который в отсутствие внешнего воздействия соответствует области CS2 на рис. 2. Временные реализации колебаний и сечения Пуанкаре для всех осцилляторов при $y(t) = 0$ показаны на рис. 4, а. Осцилляторы второго кластера, совершающие хаотические колебания, находятся в режиме фазовой синхронизации, а периодические осцилляторы первого кластера колеблются

несинхронно, т.е. в сети наблюдается состояние «химера». Воздействие на осцилляторы внешним гармоническим сигналом с $A = 0.004$ и $T = 215$ привело к синхронизации периодических колебаний осцилляторов первого кластера (рис. 4, б). Коллективная динамика осцилляторов второго кластера при этом практически не изменилась, т.е. в сети установился синхронный колебательный режим, как в области SS на рис. 2.

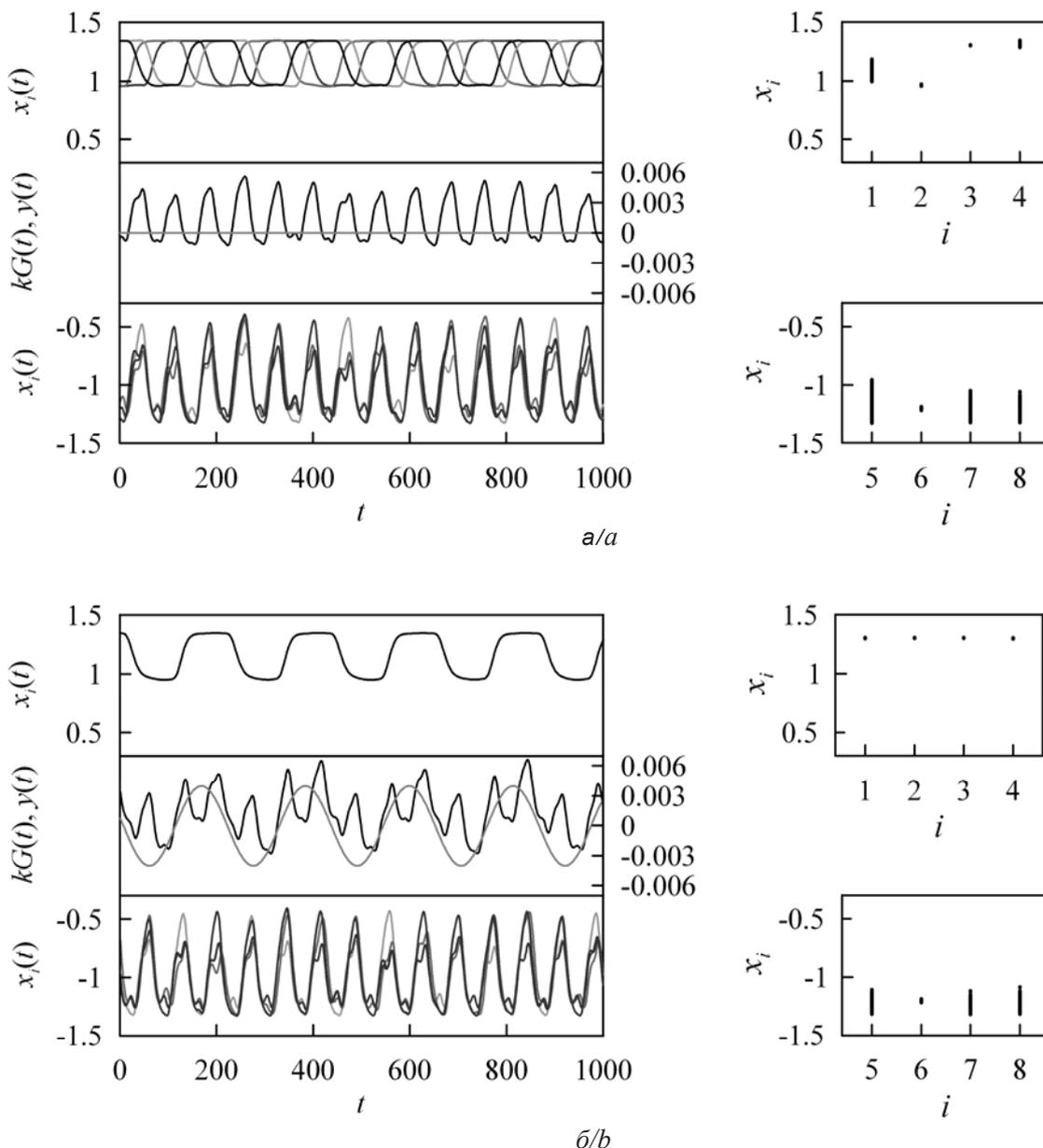


Рис. 4. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (1), сигнала $kG(t)$ (черный цвет) при $\tau_m = 60$ и $y(t)$ (серый цвет), а также сечения Пуанкаре при $A = 0$ (а), $A = 0.004$ и $T = 215$ (б)

Fig. 4. Time series of oscillations of the coupled oscillators (1), signal $kG(t)$ (black color) at $\tau_m = 60$, and signal $y(t)$ (grey color) and Poincaré sections at $A = 0$ (a), $A = 0.004$ and $T = 215$ (b)



На рис. 5 приведены временные реализации колебаний осцилляторов при времени запаздывания общего поля $\tau_m = 30$, соответствующем при $y(t) = 0$ области CS1 на рис. 2. Рис. 5, *a* иллюстрирует состояние «химера», при котором периодические осцилляторы первого кластера полностью синхронны, а осцилляторы второго кластера совершают несинхронные хаотические колебания. Если подействовать на все осцилляторы внешним гармоническим сигналом с $A = 0.015$ и $T = 71$, то это приведет к фазовой синхронизации

осцилляторов второго кластера, совершающих хаотические колебания, при сохранении синхронизации периодических колебаний осцилляторов первого кластера (рис. 5, *б*). В результате в сети установится синхронный колебательный режим, как в области SS на рис. 2.

В рассмотренных примерах внешнее гармоническое воздействие, имеющее частоту, близкую к характерной частоте колебаний несинхронных осцилляторов (как периодических, так и хаотических), приводило к их синхронизации.

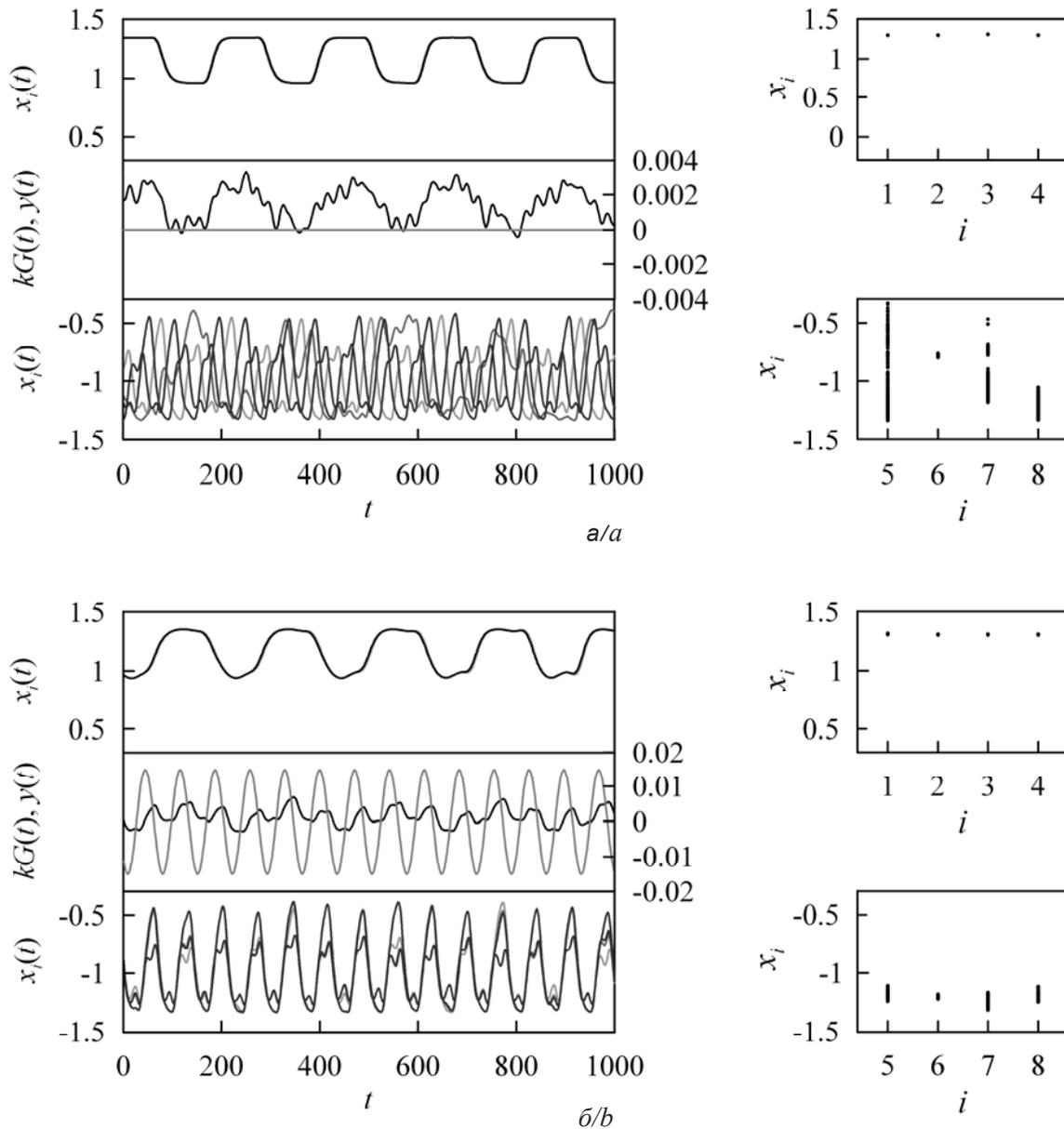


Рис. 5. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (1), сигнала $kG(t)$ (черный цвет) при $\tau_m = 30$ и $y(t)$ (серый цвет), а также сечения Пуанкаре при $A = 0$ (а), $A = 0.015$ и $T = 71$ (б)

Fig. 5. Time series of oscillations of the coupled oscillators (1), signal $kG(t)$ (black color) at $\tau_m = 30$, and signal $y(t)$ (grey color) and Poincaré sections at $A = 0$ (a), $A = 0.015$ and $T = 71$ (b)



Однако с помощью гармонического воздействия можно добиться и противоположного результата, а именно разрушить синхронные колебания осцилляторов. Например, при $\tau_m = 5$, соответствующем при $y(t) = 0$ области SS на рис. 2, в сети наблюдается колебательный режим, при котором осцилляторы первого кластера полностью синхронны, а осцилляторы второго кластера демонстрируют фазовую синхронизацию (рис. 6, а).

Воздействие на осцилляторы внешним гармоническим сигналом с $A = 0.004$ и $T = 215$

приводит к разрушению фазовой синхронизации хаотических колебаний осцилляторов второго кластера и установлению в сети состояния «хи-мера» (рис. 6, б). Таким образом, с помощью гармонического сигнала относительно малой амплитуды можно эффективно управлять колебательными режимами в сети идентичных бистабильных систем с запаздыванием, связанных через общее поле.

Качественно похожие результаты получаются и для сетей, число осцилляторов в которых

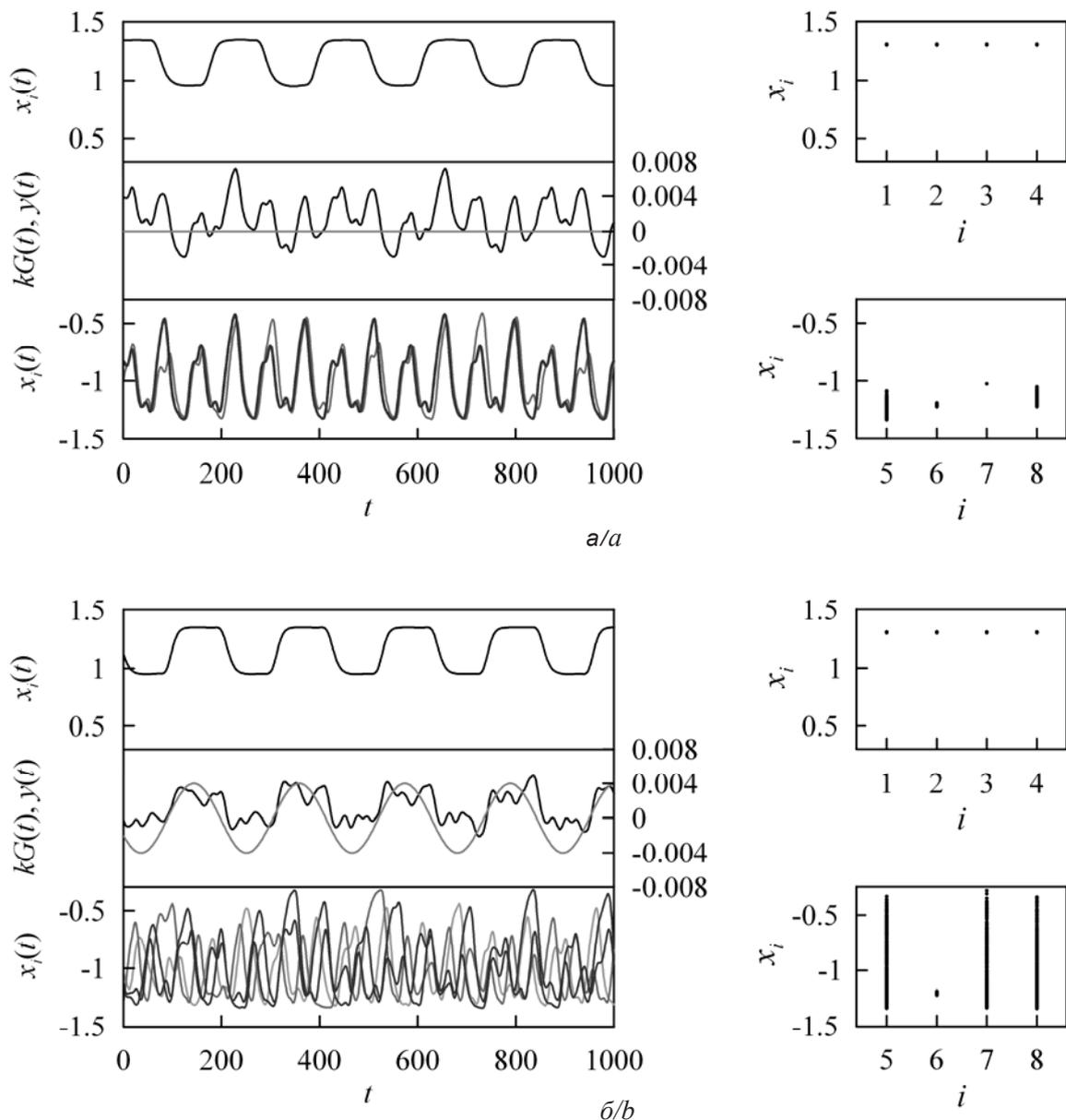


Рис. 6. Временные реализации колебаний связанных осцилляторов (1), сигнала $kG(t)$ (черный цвет) при $\tau_m = 5$ и $y(t)$ (серый цвет), а также сечения Пуанкаре при $A = 0$ (а), $A = 0.004$ и $T = 215$ (б)

Fig. 6. Time series of oscillations of the coupled oscillators (1), signal $kG(t)$ (black color) at $\tau_m = 5$, and signal $y(t)$ (grey color) and Poincaré sections at $A = 0$ (a), $A = 0.004$ and $T = 215$ (b)



отлично от рассмотренного нами случая $N = 8$. Значительное увеличение числа осцилляторов приводит к заметному увеличению длительности расчетов и усложняет визуализацию временных реализаций колебаний одновременно всех осцилляторов. Минимальное возможное количество осцилляторов в сети для иллюстрации обнаруженных эффектов равно 4. Однако для такого случая с трудом можно говорить о понятии среднего поля. Поэтому нами был выбран некий промежуточный вариант $N = 8$.

Заключение

Нами проведено исследование возможности управления с помощью внешнего гармонического воздействия коллективной динамикой в сети идентичных бистабильных систем с запаздыванием, глобально связанных через общее поле, которое формируется путем сложения сигналов всех осцилляторов, нормировки суммарного сигнала и его задержки на собственное время запаздывания общего поля. В отсутствие внешнего воздействия вид колебательного режима в сети определяется выбором начальных условий в связанных осцилляторах и величиной времени запаздывания общего поля.

Показано, что гармонический сигнал даже относительно небольшой амплитуды способен синхронизовать те осцилляторы сети, собственная частота колебаний которых близка к частоте гармонического воздействия. При этом для синхронизации периодических осцилляторов требуется значительно меньшая амплитуда гармонического сигнала, чем для синхронизации хаотических осцилляторов. Вместе с тем внешний гармонический сигнал может привести к разрушению фазовой синхронизации хаотических колебаний осцилляторов, если его частота существенно отличается от основной частоты хаотических колебаний.

Таким образом, воздействие на бистабильные системы с запаздыванием, связанные через общее поле, внешним гармоническим сигналом позволяет управлять колебательными режимами в сети, в том числе формировать или разрушать состояния «химера».

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00071).

Список литературы

1. *Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Nikolaev V. V., Shabunin A. V.* Chaotic synchronization in a network of symmetrically coupled oscillators // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 2. С. 196–203.
2. *Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. U.* Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports. 2006. Vol. 424. P. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009
3. *Osipov G. V., Kurths J., Zhou C.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin : Springer, 2007. 370 p.
4. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи физических наук. 2013. Т. 183, вып. 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323
5. *Otto A., Radons G., Bachrathy D., Orosz G.* Synchronization in networks with heterogeneous coupling delays // Physical Review E. 2018. Vol. 97. P. 012311. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.012311
6. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102
7. *Schmidt L., Schönleber K., Krischer K., García-Morales V.* Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling // Chaos. 2014. Vol. 24. 013102. DOI: 10.1063/1.4858996
8. *Schmidt L., Krischer K.* Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems // Physical Review Letters. 2015. Vol. 114. 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101
9. *Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P. K., Dana S. K.* Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling // Physical Review E. 2015. Vol. 92. 062920. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062920
10. *Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E.* Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements // Physical Review Letters. 2016. Vol. 117. 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
11. *Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S.* New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // Physics Letters A. 2017. Vol. 381. P. 1398–1404. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.02.034>
12. *Анищенко В. С., Стрелкова Г. И.* Химерные структуры в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов // Изв. высших учебных заведений. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 8–9. С. 739–753.
13. *Холуянова И. А., Богомолов С. А., Анищенко В. С.* Синхронизация химерных структур в ансамблях нелокально связанных кубических отображений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 103–111. DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-103-111



14. Andrzejak R. G., Ruzzene G., Malvestio I., Schindler K., Schöll E., Zakharova A. Mean field phase synchronization between chimera states // *Chaos*. 2018. Vol. 28. 091101. DOI: 10.1063/1.5049750
15. Yao N., Huang Z.-G., Ren H.-P., Grebogi C., Lai Y.-C. Self-adaptation of chimera states // *Physical Review E*. 2019. Vol. 99. 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.010201
16. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology // *The European Physical Journal B*. 2019. Vol. 92. 54. DOI: 10.1140/epjb/e2019-90309-6
17. Sun J. Q., Ding G. *Advances in Analysis and Control of Time-Delayed Dynamical Systems*. Singapore : World Scientific, 2013. 352 p.
18. Sieber J., Omel'chenko O. E., Wolfrum M. Controlling unstable chaos : Stabilizing chimera states by feedback // *Physical Review Letters*. 2014. Vol. 112. 054102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.054102
19. Gambuzza L. V., Frasca M. Pinning control of chimera states // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94. 022306. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022306
20. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети // *Успехи физических наук*. 2017. Т. 187, вып. 7. С. 745–756. DOI: 10.3367/UFN.2016.10.037902
21. Bera B. K., Ghosh D., Parmananda P., Osipov G. V., Dana S. K. Coexisting synchronous and asynchronous states in locally coupled array of oscillators by partial self-feedback control // *Chaos*. 2017. Vol. 27. 073108. DOI: 10.1063/1.4993459
22. Gjurchinovski A., Schöll E., Zakharova A. Control of amplitude chimeras by time delay in oscillator networks // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95. 042218. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.042218
23. Shepelev I. A., Vadivasova T. E. Inducing and destruction of chimeras and chimera-like states by an external harmonic force // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. P. 690–696. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.12.055
24. Yuan W.-J., Zhou J.-F., Sendiña-Nadal I., Boccaletti S., Wang Z. Adaptive control of dynamical synchronization on evolving networks with noise disturbances // *Physical Review E*. 2018. Vol. 97. 022211. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022211
25. Novičenko V., Ratas I. In-phase synchronization in complex oscillator networks by adaptive delayed feedback control // *Physical Review E*. 2018. Vol. 98. 042302. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.042302
26. Hart J. D., Zhang Y., Roy R., Motter A. E. Topological control of synchronization patterns : Trading symmetry for stability // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 122. 058301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.058301
27. Ruzzene G., Omelchenko I., Schöll E., Zakharova A., Andrzejak R. G. Controlling chimera states via minimal coupling modification // *Chaos*. 2019. Vol. 29. 0511031. DOI: 10.1063/1.5097570
28. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // *Physica D*. 1987. Vol. 29. P. 223–235. DOI: 10.1016/0167-2789(87)90058-3
29. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2014. Vol. 112. 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
30. Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. 022209. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.022209
31. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Влияние инерционных свойств и запаздывания общего поля на коллективную динамику глобально связанных бистабильных осцилляторов с запаздыванием // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Т. 26, № 1. С. 4–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Образец для цитирования:

Пономаренко В. И., Кульминский Д. Д., Боровкова Е. И., Прохоров М. Д. Управление коллективной динамикой в сети бистабильных систем с запаздыванием, связанных через общее поле // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 258–269. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-258-269>

Control of Collective Dynamics in a Network of Bistable Time-Delay Systems Coupled via the Mean Field

V. I. Ponomarenko, D. D. Kulminskiy,
E. I. Borovkova, M. D. Prokhorov

Vladimir I. Ponomarenko, <https://orcid.org/0000-0002-1579-6465>,
Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia, ponomarenkovi@gmail.com

Danil D. Kulminskiy, <https://orcid.org/0000-0002-3936-2813>, Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics

of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia, kulminskydd@gmail.com

Ekaterina I. Borovkova, <https://orcid.org/0000-0002-9621-039X>,
Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, rubanei@mail.ru

Mikhail D. Prokhorov, <https://orcid.org/0000-0003-4069-9410>, Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia, mdprokhorov@yandex.ru

Background and Objectives: The object of our study is a network of identical bistable time-delayed feedback systems coupled via the



mean field and driven by an external harmonic signal. The mean field that provides the global coupling of time-delay systems has its own delay time, which allows one to take into account the final speed of signal propagation and processing in the medium through which the oscillators are connected. The objective of the paper is to study the possibility of controlling the collective dynamics in the network of coupled bistable time-delay oscillators using an external harmonic force. **Materials and Methods:** The nonlinear function of oscillators and its parameters are chosen in such a way as to ensure the existence of bistable oscillatory regimes in which the basic frequencies of oscillations of the system differ by three times, with one of the bistable regimes being periodic and the other regime being chaotic. The initial conditions in the coupled oscillators are assigned in such a way that two clusters take place in the studied network, each of which, depending on the value of the phase shift of the mean field signal, can demonstrate both the synchronous and non-synchronous behavior of the elements included in it. The control of the oscillation regimes in the network is carried out using the variation of the parameters of the mean field and external harmonic signal. **Results:** It is shown that using a harmonic signal of relatively small amplitude, it is possible to effectively control the oscillation regimes, in particular, to create or destroy chimera states in a network of identical bistable systems with a time-delayed feedback that are globally coupled via the mean field.

Keywords: network of coupled oscillators, time-delay systems, bistability, control of collective dynamics, chimera states.

Received: 21.06.2019 / Accepted: 03.09.2019 / Published: 02.12.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 19-02-00071).

References

1. Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Nikolaev V. V., Shabunin A. V. Chaotic synchronization in a network of symmetrically coupled oscillators. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2000, vol. 45, no. 2, pp. 179–185.
2. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. U. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 2006, vol. 424, pp. 175–308. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.10.009
3. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin, Springer, 2007. 370 p.
4. Klinshov V. V., Nekorkin V. I. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. *Physics-Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 12, pp. 1217–1229. DOI: 10.3367/UFNe.0183.201312c.1323
5. Otto A., Radons G., Bachrathy D., Orosz G. Synchronization in networks with heterogeneous coupling delays. *Physical Review E*, 2018, vol. 97, pp. 012311. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.012311
6. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, 174102. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.012311
7. Schmidt L., Schönleber K., Krischer K., Garcia-Morales V. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling. *Chaos*, 2014, vol. 24, 013102. DOI: 10.1063/1.4858996
8. Schmidt L., Krischer K. Clustering as a prerequisite for chimera states in globally coupled systems. *Physical Review Letters*, 2015, vol. 114, 034101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.034101
9. Mishra A., Hens C., Bose M., Roy P. K., Dana S. K. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, 062920. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062920
10. Semenova N., Zakharova A., Anishchenko V., Schöll E. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements. *Physical Review Letters*, 2016, vol. 117, 014102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.014102
11. Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Physics Letters A*, 2017, vol. 381, pp. 1398–1404. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.02.034>
12. Anishchenko V. S., Strelkova G. I. Chimera structures in the ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2019, vol. 61, iss. 8–9, pp. 659–671. DOI: 10.1007/s11141-019-09926-5
13. Kholuianova I. A., Bogomolov S. A., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in ensembles of nonlocally coupled cubic maps. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 103–111 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2018-18-2-103-111
14. Andrzejak R. G., Ruzzone G., Malvestio I., Schindler K., Schöll E., Zakharova A. Mean field phase synchronization between chimera states. *Chaos*, 2018, vol. 28, 091101. DOI: 10.1063/1.5049750
15. Yao N., Huang Z.-G., Ren H.-P., Grebogi C., Lai Y.-C. Self-adaptation of chimera states. *Physical Review E*, 2019, vol. 99, 010201. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.010201
16. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology. *The European Physical Journal B*, 2019, vol. 92, 54. DOI: 10.1140/epjb/e2019-90309-6
17. Sun J. Q., Ding G. *Advances in Analysis and Control of Time-Delayed Dynamical Systems*. Singapore, World Scientific, 2013. 352 p.
18. Sieber J., Omel'chenko O. E., Wolfrum M. Controlling unstable chaos: Stabilizing chimera states by feedback. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, 054102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.054102
19. Gambuzza L. V., Frasca M. Pinning control of chimera states. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, 022306. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022306
20. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Adaptive dynamical networks. *Physics-Uspekhi*, 2017, vol. 60, no. 7, pp. 694–704. DOI: 10.3367/UFNe.2016.10.037902
21. Bera B. K., Ghosh D., Parmananda P., Osipov G. V., Dana S. K. Coexisting synchronous and asynchronous



- states in locally coupled array of oscillators by partial self-feedback control. *Chaos*, 2017, vol. 27, 073108. DOI: 10.1063/1.4993459
22. Gjurchinovski A., Schöll E., Zakharova A. Control of amplitude chimeras by time delay in oscillator networks. *Physical Review E*, 2017, vol. 95, 042218. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.042218
 23. Shepelev I. A., Vadivasova T. E. Inducing and destruction of chimeras and chimera-like states by an external harmonic force. *Physics Letters A*, 2018, vol. 382, pp. 690–696. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.12.055
 24. Yuan W.-J., Zhou J.-F., Sendiña-Nadal I., Boccaletti S., Wang Z. Adaptive control of dynamical synchronization on evolving networks with noise disturbances. *Physical Review E*, 2018, vol. 97, 022211. DOI: 10.1103/PhysRevE.97.022211
 25. Novičenko V., Ratas I. In-phase synchronization in complex oscillator networks by adaptive delayed feedback control. *Physical Review E*, 2018, vol. 98, 042302. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.042302
 26. Hart J. D., Zhang Y., Roy R., Motter A. E. Topological control of synchronization patterns: Trading symmetry for stability. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, 058301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.058301
 27. Ruzzene G., Omelchenko I., Schöll E., Zakharova A., Andrzejak R. G. Controlling chimera states via minimal coupling modification. *Chaos*, 2019, vol. 29, 0511031. DOI: 10.1063/1.5097570
 28. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback. *Physica D*, 1987, vol. 29, pp. 223–235. DOI: 10.1016/0167-2789(87)90058-3
 29. Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M. Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, 144103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.144103
 30. Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Prokhorov M. D. Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field. *Physical Review E*, 2017, vol. 96, 022209. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.022209
 31. Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Influence of inertial properties and delay of the mean field on the collective dynamics of globally coupled bistable delayed-feedback oscillators. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, iss. 1, pp. 4–20 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-1-4-20

Cite this article as:

Ponomarenko V. I., Kulminskiy D. D., Borovkova E. I., Prokhorov M. D. Control of Collective Dynamics in a Network of Bistable Time-Delay Systems Coupled via the Mean Field. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 258–269 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2019-19-4-258-269>